Писмени испит из Анализе 1
Други колоквијум из Анализе 1
1O1 и 1O4, 22.06.2020.

1. Нека је $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција класе $\mathcal{C}^1$ таква да $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = B$, за $A, B \in \mathbb{R}$. Доказати да $B = 0$.

2. а) Формулисати дефиниције горњег и доњег лимеса функције и низа, као и дефиницију тачке нагомилавања низа.

   б) Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ такав да је $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

   1) Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ које није тачка нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ важи

   $$(\exists \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \implies a_n \geq x + \epsilon) \veebar (n \geq N \implies a_n \leq x - \epsilon)$$

   2) Нека је $l = \liminf_{n\to\infty} a_n$ и $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Доказати да је сваки број из интервала (l, L) тачка нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   3) Одредити скуп тачака нагомилавања низа

   $$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

3. а) Формулисати и доказати Њутн-Лајбницову формулу о вези одређеног интеграла и примитивне функције.

   б) Нека је $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ функција класе $\mathcal{C}^1$ таква да је $f'(0) \neq 0$.

   1) Доказати да за свако $x \in (0, 1]$ постоји број $\alpha(x) \in (0, x)$ такав да важи једнакост

   $$\int_0^x f(t)dt = f(\alpha(x))x.$$

   2) Доказати да

   $$\lim_{x\to 0+} \alpha(x) = 0.$$

   Ако је $g\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ функција таква да $\lim_{t\to 0+} g(t) = 0$, доказати да

   $$\lim_{x\to 0+} g(\alpha(x)) = 0.$$

   3) Доказати да

   $$\int_0^x f(t)dt = f(0)x + \frac{f'(0)}{2}x^2 + o(x^2)\ , x \to 0+\,.$$

   4) Доказати да

   $$f(\alpha(x)) = f(0) + f'(0)\alpha(x) + o(\alpha(x))\ , x \to 0+\,.$$

   5) Доказати да

   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

4. Нека су $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низови такви да редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ конвергирају.

   а) Доказати да низ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира.

   б) Доказати једнакост

   $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n b_n,$$

   где је $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

   в) Доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ конвергира.