Скице решења са писменог испита из анализе 2

из рока јун 2 за МНВ смерове, одржаног 29.06.2019.

1. Нека је $\mathcal{P}$ скуп полинома по две променљиве са реалним коефицијентима. Дефинишимо $d : \mathcal{P}\times\mathcal{P} \to \mathbb{R}$ као

$$d(p,q) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |p(x,y) - q(x,y)|e^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

(а) Доказати да је $(\mathcal{P}, d)$ метрички простор.

(б) Испитати да ли је низ $p_n(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ Кошијев у $(\mathcal{P}, d)$.

(в) Да ли је простор $(\mathcal{P}, d)$ комплетан?

(г) Дати су скупови

$$A = \{p \in \mathcal{P} \mid \frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 0\}\,,\ B = \{p \in \mathcal{P} \mid \deg p = 2,\ \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) = 0\} \text{ и } C = \{p \in \mathcal{P} \mid d(p,\mathbf{0}) \leqslant 1, \deg p \leqslant 2\}.$$

Испитати компактност и повезаност скупова A, B и C у $(\mathcal{P}, d)$.

Решење.

(а) Ово иде директно по дефиницији. Једино за $d(p,q) = 0 \implies p = q$ би се требало позвати на непрекидност подинтегралне функције, или нешто еквивалентно.

(б) Ово је могло на два начина, прво и рачунски сложеније је по дефиницији. Нека је БУО $m > n$

$$\begin{aligned} d(p_n,p_m) &= \iint_{\mathbb{R}^2} |p_m(x,y) - p_n(x,y)|e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} |\sum_{k=n+1}^{m} \frac{x^k}{k!}|e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &\le \sum_{k=n+1}^{m} \iint_{\mathbb{R}^2} |\frac{x^k}{k!}|e^{-x^2-y^2}dxdy = 2\sqrt{\pi} \sum_{k=n+1}^{m} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!}e^{-x^2}dx \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\Gamma(k/2)}{k!} \le \pi \sum_{k=n+1}^{m} \frac{k!!}{2^k k!} \le \pi \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \end{aligned} \tag{1}$$

а то је остатак конвергентног реда, па се може направити мањим од произвољног ϵ. Коришћена је Фубинијева теорема за несвојствене интеграле, смена $x^2 = t$, процена $k!! \le k!$ и $1 \le \sqrt{\pi}$.

Друго, можемо посматрати простор $\mathcal{C} = \{f \in C(\mathbb{R}^2) \mid \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|e^{-x^2-y^2}dxdy\}$ непрекидних функција које су апсолутно интеграбилне кад се помноже са $e^{-x^2-y^2}$, јасно је да важи $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$. Како је низ $p_n(x,y)$ заправо парцијална сума степеног реда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ чији је домен конвергенције $\mathbb{R}$ имамо да $p_n(x,y)$ равномерно конвергира ка e^x на $[-M,M]\times\mathbb{R}$. Односно вредност $|p_n(x,y) - e^x|$ равномерно тежи нули на $[-M,M]\times\mathbb{R}$ па имамо

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} |p_n(x,y) - e^x|e^{-x^2-y^2}dxdy &= \lim_{n\to+\infty}\lim_{M\to+\infty} \iint_{[-M,M]^2} |p_n(x,y) - e^x|e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{M\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \iint_{[-M,M]^2} |p_n(x,y) - e^x|e^{-x^2-y^2}dxdy \\ &\overset{(2)}{=} \lim_{M\to+\infty} \iint_{[-M,M]^2} \lim_{n\to+\infty} |p_n(x,y) - e^x|e^{-x^2-y^2}dxdy = 0 \end{aligned}$$

где једнакост (1) важи јер је $|p_n(x,y) - e^x| \le 2e^{|x|}$ па интеграл $\iint_{\mathbb{R}^2} |p_n(x,y) - e^x|e^{-x^2-y^2}dxdy$ равномерно конвергира по Вајерштрасу, а једнакост (2) је замена места равномерног лимеса и Римановог интеграла, те добијамо да низ $p_n(x,y)$ конвергира у простору $\mathcal{C}$ те је и Кошијев у $\mathcal{C}$, а то значи да је и Кошијев у $\mathcal{P}$.

(в) Како је p_n Кошијев који конвергира ка елементу који не припара простору $\mathcal{P}$ закључујемо да није комплетан.

(г) Скуп A је векторски потпростор, те је конвексан а тиме и повезан. Пошто није ограничен није ни компактан.
НАПОМЕНА!!! То што простору припадају функције које нису ограничене не значи да сам скуп није ограничен! Полином $p(x,y) = x$ припада простору, те има КОНАЧНУ норму а није ограничен.
$B = \{a + bx + cx^2 \mid c \neq 0\}$, он није ограничен јер му припада низ полинома $p_n(x,y) = nx^2$ па није компактан, а није повезан јер ако посматрамо непрекидно пресликавање $f : B \to \mathbb{R}$ дато са $f(a+bx+cx^2) = c$ видимо да је $f(B) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ што је неповезан скуп.
Скуп C је заправо јединична лопта у коначно димензионом векторском простору (скуп полинома две променљиве степена ≤ 2 је ВП димензије 6), а познато је да у коначно димензионим векторским просторима важи да је скуп компактан акко је затворен и ограничен (иначе важи компактак $\Rightarrow$ затворен и ограничен). Скуп је повезан јер пут $\gamma(t) = tp(x,y),\ \ t \in [0,1]$ спаја произвољан полином $p \in \mathcal{P}$ са 0, а цео пут остаје у C.

2. Нека је $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ функција имплицитно задата са

$$\int\limits_1^{f(x,y)} e^{t^2}\, dt = x^2 + y^2.$$

(а) Доказати да f диференцијабилна функција.

(б) Наћи локалне екстремуме функције f. Која је вредност функције у тим тачкама?

(в) Доказати да за $a \geqslant 1$ важи неједнакост

$$\int\limits_1^{a} e^{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{2}(e^{a^2} - e).$$

(г) Доказати да је f равномерно непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

Решење.

(а) Први начин је да се уочи функција $F(x,y,z) = \int_1^z e^2\, dt - x^2 - y^2$. Поменута функција 3 променљиве је класе C^∞ па имплицитна функција коју задаје (ако постоји) је такође $C^{\inf}$. e^{t^2} је позитивна и непрекидна те је $\int_1^z e^2\, dt$ монотон по z и позитиван, те за фиксирано $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ из непрекидности и Коши-Болцанове теореме постоји тачно једно $z \geq 1$ тако да је $\int_1^z e^2\, dt - x^2 - y^2 = 0$. Како је

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^{z^2} > 0$$

видимо да је та јединствена функција $z(x,y)$ осим што је глобално добро дефинисана, заиста и класе C^∞.

Други начин је да посматрамо $F(x,y) = x^2 + y^2$, приметимо да важи да је $f(x,y) \geq 1$

$$|F(x+h, y+k) - F(x,y)| = \left| \int_{f(x,y)}^{f(x+h,y+k)} e^{t^2} dt \right| \geq |f(x+h, y+k) - f(x,y)|,$$

Како је F непрекидна у свакој тачки, пуштањем $(h,k) \to (0,0)$ добијамо да је и f непрекидна. Даље, важи да је

$$\frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{he^{f^2(x+h,y)}} \leq \frac{f(x+h) - f(x,y)}{h} \leq \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{he^{f^2(x,y)}}$$

Како је F диференцијабилна, то постоје парцијални изводи, а како је и f непрекидна важиће

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x,y)}{h} = \frac{2x}{e^{f(x,y)}}$$

аналогно за $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{e^{f(x,y)}}$. Како су оба парцијална извода непрекидне функције то је f диференцијабилна.

(б) Из извода се види да је једина критична тачка $x = y = 0$ и вредност функције у тој тачки је $f(0,0) = 1$. Видимо да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{e^{f^2}}\right) = \frac{2e^{f^2} - 4xe^{f^2} f \frac{\partial f}{\partial x}}{e^{2f^2}} = \frac{2e - 0}{e^2} = \frac{2}{e},$$

рачунато у тачки $(0,0)$, јер је $f(0,0) = 1$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Слично се рачунају и остали изводи и добије се да је матрица других извода позитивно дефинитна, па је $(0,0)$ тачка локалног минимума.

(в) Можете наћи извод одговарајуће функције, или проценити

$$\int_1^a e^{t^2}\,dt \leqslant \int_1^a te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{a^2} e^u\,du = \frac{1}{2}(e^{a^2} - e).$$

(г) Ограничићемо парцијалне изводе. Они су дефинисани на целом $\mathbb{R}^2$, тако да не морамо да бринемо о конвексности. Из дела под в за $a = f(x,y)$ следи

$$x^2 + y^2 = \int_1^{f(x,y)} e^{t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{2}(e^{f(x,y)^2} - e),$$

одакле је $e^{f(x,y)^2} \geqslant 2(x^2+y^2) + e$. Сада имамо

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{2\,|x|}{e^{f^2}} \leqslant \frac{2\,|x|}{2(x^2+y^2)+e} \leqslant \frac{|x|}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

слично је за други, па је то теореми функција равномерно непрекидна.

3. Дата је површ $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| = 1, z \geqslant -1/2\}$ и функција $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ са

$$f(x,y,z) = \log\left(z + 8\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

(а) Наћи домен и диференцијал функције f.

(б) Израчунати

$$\iint_S 2x\,dxdy + \frac{8}{\left(z + 8\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dxdz + y\,dydz).$$

Решење.

(а) Домен је $z > -8\sqrt{x^2+y^2}$, што представља $\mathbb{R}^3$ без доњег дела попуњеног конуса. Диференцијал је

$$df = \frac{8x}{\left(z + 8\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{8y}{\left(z + 8\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}\,dy + \frac{1}{\left(z + 8\sqrt{x^2+y^2}\right)}\,dz.$$

(б) Површ по којој се интеграли је (сликовито) коцка окренута тако да јој је теме горе, без половине доњег дела. Руб ове површи је обод квадрата $K : |x| + |y| \leqslant 1/2, z = -1/2$. Најпре, форма је довољно компликована да не треба да покушавате да израчунате интеграл директно, па ћемо зато да тражимо алтернативни начин. Једна од могућности је да се интеграли по телу које је унутар површи (S коју допунимо квадратом K). Међутим! Форма која се интеграли (означимо је са α) није дефинисана на конусу $z = -8\sqrt{x^2+y^2}$, који *пролази* кроз квадрат K, па ово није валидно. Прво решење би било да затворимо нашу површ S нечим другим што није K и не сече конус (на пример, нека пирамида).

Са друге стране, може се видети нека повезаност делова а и б у овом задатку - појављују се слични изрази и то нешто треба да каже. Ако урадимо спољашњи производ $df \wedge dz$ добијамо $\alpha - 2x\,dxdy$. Уз мало пажљивијег гледања израза можемо видети да је форма α тачна и да је кој је примитивна форма $\beta = x^2\,dy + \log\left(z + 8\sqrt{x^2+y^2}\right)\,dz$. Заиста, ако израчунате $d\beta = d(x^2) \wedge dy + df \wedge dz = \alpha$. по делу а, форма β није дефинисана на доњем делу конуса, али то не утиче на површ и њену границу. Сада можемо применити Стоксову теорему на површ S и њену границу ∂K:

$$\iint_S \alpha = \iint_S d\beta = \int_{\partial K} \beta = ...$$

Остаје да се параметризује ∂K као 4 дужи и израчуна интеграл (приметите да ће бити $dz = 0$ ту, тако да само треба интегралити $x^2\,dy$).

4. (а) Развити функцију $f(x) = x^2$ у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$.

(б) Нека је $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4+1} \cos nx$ и $h(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) - g(x)$. Доказати да се h може 4 пута диференцирати и наћи $h^{(4)}$.

(в) Доказати да је $g \in C^{\infty}(-\pi, \pi)$.

Решење.

(а) Функција је парна, па имамо само косинусе у развоју. Уз то је продужена функција непрекидна, па важи

$$f(x) = S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

(б) $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^4+1)} \cos nx$, а то се може диференцирати 4 пута уз помоћ Вајерштраса и важи

$$h^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4+1} \cos nx = g(x)$$

(в) Како је h 4 пута диференцијабилна, то је и $g(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) - h(x)$ 4 пута диференцијабилна и важи

$$g^{(4)}(x) = -g(x).$$

Како је 4-и извод функције једнак функцији која је 4 пута диференцијабилна добијамо да је g 8 пута диференцијабилна итд.