Диференцијалне једначине а - МН смерови
Домаћи - друга недеља

асистент: Филип Броћић

1) Нека је $e_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, $\quad e_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ покретни цилиндрични репер, и нека је $\mathbf{r}(t) = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t), z(t))$ крива, показати да је:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}' = \rho' e_r + \rho\theta' e_\theta + z'\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{r}" = (\rho" - \rho\theta'^2)e_r + (\rho\theta" + 2\rho\rho'\theta')e_\theta + z"\mathbf{k}.$$

У наредним задацима посматрамо планету масе m и Сунце масе M у координатном систему тако да је Сунце координатни почетак а да планета у почетном тренутку лежи у равни xOy. Кретање се одвија по Њутновом закону гравитације:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{||\mathbf{r}||^2}\frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||}$$

2) Показати да је $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ за константан вектор $\mathbf{c} = \rho^2\theta'\mathbf{k}$ и одатле закључити да се кретање одвија у једној равни.

3) Показати да је површина захваћена векторима положаја планете у временском интервалу (t_0, t_1)
$$\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t_1)} \frac{1}{2}\rho^2 \mathrm{d}\theta$$
И одатле, користећи део 2) извести Други Кеплеров закон:
Секциона брзина је константна, односно у једником временским интервалима захваћена површина векторима положаја планете је једнака.

4) Нека је ρ_0 најмање растојање између планете и Сунца, и узмимо да се то десило за $t = 0$ $(\rho'(0) = 0)$. Нека је координатни систем изабран тако да је $\theta(0) = 0$, показати да важи $\rho^2\theta' = \rho_0 v_0$.

5) Из другог Њутновог закона извести да је

$$\rho" = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} - \frac{GM}{\rho^2}$$

сменом p $= \rho'$ свести на једначину првог реда, и користећи почетне услове $\rho(0) = \rho_0, \rho'(0) = 0$ извести једначину

$$\rho'^2 = v_0^2\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) + 2GM\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

6) Из 4) и 5) извести

$$\frac{1}{\rho^4}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{\rho^2} + 2\frac{GM}{\rho_0^2 v_0^2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)$$

и сменом $u = \frac{1}{\rho}$ свести на једначину

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{GM}{\rho_0^2 v_0^2}\right)^2 - \left(u - \frac{GM}{\rho_0^2 v_0^2}\right)^2}.$$

7) Показати да је $\rho' \geq 0$ за мало $t \geq 0$ и одатле закључити да је $0 \leq \frac{d\rho}{d\theta} = -\rho^2\frac{du}{d\theta}$, потом решавањем једначине из 6) показати да је:

$$\rho = \frac{(1+e)\rho_0}{1 + e\cos\theta}, \quad \text{где је} \quad e = \frac{\rho_0 v_0^2}{GM} - 1$$

И одатле извести Први Кеплеров закон:
Планете се крећу по конусним пресецима где је Сунце један фокус.

8) Користећи 2) и 3) извести да је површина елипсе по којој се планета креће $\frac{1}{2}T\rho_0 v_0$ а помоћу тога и формуле за површину елипсе $P = ab\pi$ (a је дужа полуоса) извести Трећи Кеплеров закон:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Напомена: Домаћи не мора да се ради и не носи поене, основна намена домаћег је да студенти имају увид у задатке који ће бити урађени на вежбама пре самих вежби.