ТМИ- испит (Р смер)

8. 7. 2019.

1. а) Доказати непрекидност одоздо и условну непрекидност одозго мере. б) Примером показати да је услов коначности мере скупова неопходан услов за непрекидност одозго. в) Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Доказати $\mu(\underline{\lim}\, E_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(E_n)$, где су $E_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$ произвољни скупови.

2. Израчунати $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$, где је а) $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, б) $f_n(x) = \frac{n\cos x}{2+n^2x^{\frac{3}{2}}}\chi_{[0,1]}$. в) Може ли се на ове низове применити ТДК? Може ли ТМК?

3. а) Левијев став (о замени места интеграла и суме).

б) Развити у ред $\int_0^1 \log 2x \sin 3x dx$.

4. Испит је полагало 22 студента и положили су скоро сви, у смислу бројачке мере ν. а) Колики је тачан број студената који су положили испит? б) Нека је f функција која сваком студенту додељује оцену $5, 6, 7, 8, 9$ или 10 и нека је A_k скуп студената који су добили оцену k, $k \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Ако је $\int_{A_{10}} f d\nu = 20$ колико је студената добило 10? в) Да ли је ν комплетна мера?

5. а) Испитати везу између конвергенције по мери и равномерне конвергенције низа функција. б) Испитати везу између конвергенције у L^p, $1 \leq p \leq \infty$ норми и равномерне конвергенције. в) Ако је f_n низ непрекидних функција који конвергира скоро свуда и у L^p норми ка функцији f, да ли је тада f непрекидна? Ако је f_n низ непрекидних функција који равномерно конвергира ка функцији f, да ли је тада f непрекидна?

1. в) $\underline{\lim}\, E_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} E_k$. Нека је $A_n = \cap_{k=n}^{\infty} E_k$. Следи $A_n \subset A_{n+1}$. Тада на основу непрекидности мере одоздо важи $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$. Дакле

$$\mu(\underline{\lim}\, E_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \underline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(E_n).$$

Последња неједнакост важи због услова $A_n \subset E_n$.

2. а) $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{n} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n dx = 1$. Да се могу применити теореме ТДК или ТМК онда би лимес ушао под интеграл па би резултат био нула. б) Користимо неједнакост $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Дакле $2 + n^2x^{\frac{3}{2}} \geq 2\sqrt{2}nx^{\frac{3}{4}}$. Следи

$$|f_n| \leq \frac{n|\cos x|}{2\sqrt{2}nx^{\frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}x^{\frac{3}{4}}}.$$

Функција $\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$ је интеграбилна на интервалу $[0, 1]$, дакле то је наша интеграбилна доминанта, па можемо применити ТДК.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\cos x}{2 + n^2x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{n\cos x}{2 + n^2x^{\frac{3}{2}}} dx = 0.$$

ТМК не може, функције f_n мењају знак.

3. б) $\int_0^1 \log 2x \sin 3x dx = \int_0^1 \log 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \log 2x \frac{(-1)^n(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dx$. Места суми и интегралу смо заменили према Левијевом ставу. Наиме, $\sum \int |f_n| dx$ у нашем случају је

$$\sum \frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^1 |\log 2x| x^{2n-1} dx = \sum \frac{3^{2n-1}\log 2}{(2n-1)!} \int_0^1 x^{2n-1} dx - \sum \frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!} \int_0^1 \log x x^{2n-1} dx$$

$$= \sum \frac{3^{2n-1}\log 2}{(2n-1)!}\frac{1}{2n} + \sum \frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{1}{4n^2}.$$

Оба реда конвергирају (нпр Даламберов критеријум), па је њихов збир коначан. Дакле и почетни ред конвергира. На основу Левијевог става, оправдана је замена места суми и интегралу. Даље је $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \log 2x \frac{(-1)^n(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n-1}}{(2n-1)!}\int_0^1 x^{2n-1}\log 2x dx$. Интеграл с ерешава парцијалном интеграцијом.

4. а) Скуп студената који нису положили је скуп мере нула. Једини скуп мере нула у бројачкој мери је празан скуп. Дакле, сви су положили. б) f је проста функција и $f = \sum_{k=5}^{10} k\chi_{A_k}$. Дакле $\int_{A_{10}} f d\nu = 10\nu(A_{10}) = 20$. Следи $\nu(A_{10}) = 2$. в) Пошто је једино празан скуп мере нула, онда је сваки његов подскуп такође празан скуп, па је мерљив. Дакле, бројачка мера је комплетна.

5. а) Ако низ конвергира равномерно, онда он конвергира по мери. Обрнуто не мора да важи. Нпр, низ $\chi_{[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}]}$ конвергира по мери ка $f = 0$, али не конвергира равномерно. б) Ако низ конвергира равномерно и ако је $\mu(X) < \infty$ онда низ конвергира и у L^p, $1 \leq p < \infty$ норми. (Услов да је мера коначна је битан. Нпр низ $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ конвергира равномерно ка $f = 0$, али не конвергира у норми L^1.) Обрнуто не мора да важи. Низ $\chi_{[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}]}$ конвергира у L^p норми, али не конвергира равномерно. Даље, ако низ конвергира равномерно онда он конвергира у L^∞ норми. И овде обрнуто не мора да важи. Константан низ $f_n(x) = |sgnx|$ конвергира у L^∞ норми ка $f = 1$ али не конвергира равномерно. в) Низ $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ је низ непрекидних функција који конвергира у L^p норми ка $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1) \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$ која је прекидна. Равномерна конвергенција чува непрекидност.