ТМИ- испит (Р смер)

24. 6. 2019.

1. а) Доказати да је $J = \{[a,b) \ | -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ једна полуалгебра над $\mathbb{R}$.

б) Описати минималну σ-алгебру над J.

в) Да ли произвољна тачка припада тој σ-алгебри?

г) Да ли је карактеристична функција Канторовог скупа мерљива у односу на ту σ-алгебру? Навести бар две функиције које нису мерљиве у односу на ту σ-алгебру и објаснити зашто.

2. Израчунати:

а) $\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{n^{-1}}^1 x^2 \operatorname{arctg}(\log(1+\frac{x}{n^2}))dx$.

б) $\lim_{n\to\infty} n^5 \int_0^{n^{-1}} x^2 \operatorname{arctg}(\log(1+\frac{x}{n^2}))dx$.

3. а) Нека $f \in L^3(0,1)$. Доказати $\frac{f}{\sqrt{x}} \in L^1(0,1)$ и $f \in L^2(0,1)$.

б) Да ли оба закључка важе ако $f \in L^1(0,1)$?

в) Нека је $f_n \in L^3(0,1)$ низ функција који конвергира у норми простора L^3 ка функцији f. Да ли тада $f \in L^2(0,1)$ и $f \in L^\infty(0,1)$?

4. а) Дефиниција и пример апсолутно непрекидне функције.

б) Да ли је Канторова сингуларна функција апсолутно непрекидна?

в) Да ли је свака апсолутно непрекидна функција и равномерно непрекидна? Да ли је свака равномерно непрекидна функција и апсолутно непрекидна?

г) Да ли је свака апсолутно непрекидна функција Липшицова? Да ли је свака Липшицова функција апсолутно непрекидна?

1. б) Борелова σ-алгебра. в) да. г) Да, зато што Канторов скуп припада тој σ-алгебри. д) Карактеристичне функције два немерљива скупа (нпр два различита Виталијева скупа).

2. а)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{n^{-1}}^1 x^2 \operatorname{arctg}(\log(1+\frac{x}{n^2}))dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \chi_{[\frac{1}{n},1]}\, x^3 \frac{\operatorname{arctg}(\log(1+\frac{x}{n^2}))}{\log(1+\frac{x}{n^2})} \frac{\log(1+\frac{x}{n^2})}{\frac{x}{n^2}} dx.$$

Користимо $\operatorname{arctg} y \leq y$, $\log(1+y) \leq y$, када је $y \geq 0$. Дакле, подинтегрална функција мања или једнака од функције x^3. Ова функција је интеграбилна на интервалу $[0,1]$, дакле то је тражена интеграбилна доминанта. Можемо применити ТДК. Резултат је $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

б) Слично као под а), још искористити $x < \frac{1}{n}$.

3. а) Хелдерова неједнакост. б) Не. На пример $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. в) $||f||_3 \leq ||f - f_n||_3 + ||f_n||_3 < 1 + ||f_n||_3 < \infty$ следи $f \in L^3(0,1)$, па на основу а) $f \in L^2(0,1)$. Ако $f \in L^3(0,1)$ не мора да значи да $f \in L^\infty(0,1)$. На пример $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$.

4. б) Не. Да јесте важило би $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$. Међутим $f(1) = 1$, $f(0) = 0$ и $f'(x) = 0$ скоро свуда. в) Да (узети у дефиницији $n = 1$). Не. Канторова сингуларна функција је непрекидна, па и равномерно непрекидна на $[0,1]$, али није апсолутно непрекидна. г) Не. $\sqrt{x}$ је апсолутно непрекидна на $[0,1]$, али није Липшицова. Да, $\delta = \epsilon/K$, где је K Липшицова константа.