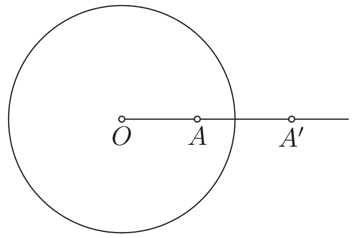
4 Инверзија

Дефиниција 23. Нека је $k(O, r)$ круг неке равни α. *Инверзија* у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \alpha \setminus \{O\} \longrightarrow \alpha \setminus \{O\}$ које тачку A слика у тачку A' полуправе OA такву да важи $OA \cdot OA' = r^2$.



Важно је нагласити да тачка O не припада ни домену ни кодомену пресликавања ψ_k.

Особине овог пресликавања су:

- ψ_k је инволуција, односно $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$;

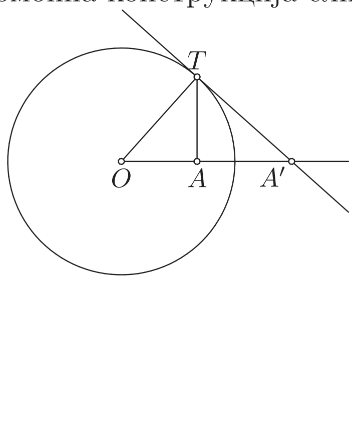
  Инверзија је очигледно инволуција, тј. $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$, јер ако је A' слика тачке A, онда A' припада полуправој OA и важи $OA \cdot OA' = r^2$, па следи да тачка A припада полуправој OA' и важи $OA' \cdot OA = r^2$, што по дефиницији значи да је $\psi_k(A') = A$. Према томе, инверзија је бијекција и инволуција.

- тачка A се слика у себе ако и само ако припада кругу k;

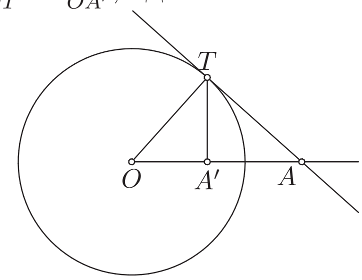
  Ако тачка A припада кругу k, онда је $OA \cdot OA = r^2$, па како A припада полуправој OA, следи да је $\psi_k(A) = A$. Обрнуто, ако је $\psi_k(A) = A$, онда је $OA \cdot OA = r^2$, тј. $OA = r$, па A припада кругу k.

- тачке из унутрашњости круга k, различите од тачке O, сликају се у тачке из спољашњости круга k и обрнуто;

  Помоћна конструкција слике тачке при инверзији:



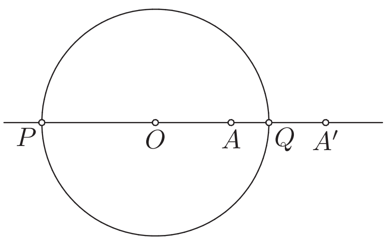
Нека је A тачка у унутрашњости круга k различита од тачке O. Конструишимо полуправу OA и нормалу n на тој полуправој у тачки A. Једну од пресечних тачака нормале n и круга k означимо са T и конструишимо тангенту круга k у тачки T (нормалу на OT у тачки T) и са A' означимо њен пресек с полуправом OA. Троуглови $\triangle OTA$ и $\triangle OA'T$ су слични јер је $\measuredangle TOA = \measuredangle A'OT$ и $\measuredangle OAT = \frac{\pi}{2} = \measuredangle OTA'$, па је $\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'}$, односно $OA \cdot OA' = OT \cdot OT = r^2$. Према томе, $\psi_k(A) = A'$.



Ако је A тачка у спољашњости круга k, онда конструишимо произвољну тангенту круга k из те тачке, означимо додирну тачку са T и конструишимо нормалу n на полуправој OA која садржи тачку T и означимо подножје те нормале са A'. На исти начин као малопре се добија да је $\psi_k(A) = A'$.

Према томе, овим смо доказали да се тачке из унутрашњости круга k, различите од O, сликају у његову спољашњост и обрнуто. Такође, тачке круга k се сликају у себе и све тачке које се сликају у себе припадају кругу k.

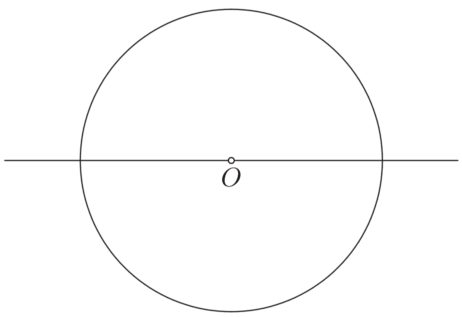
- ако је $\psi_k(A) = A'$ и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$;

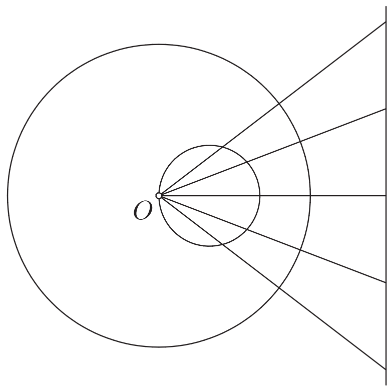


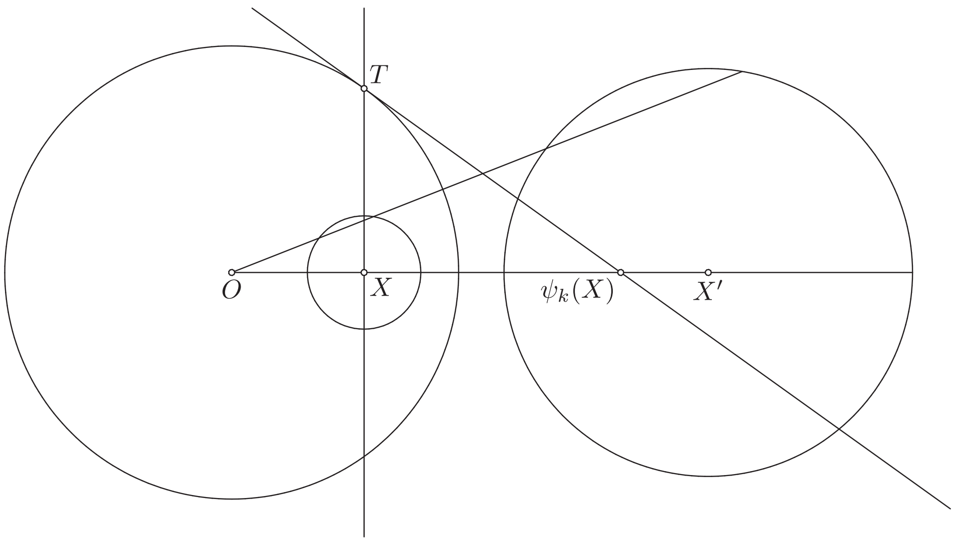
Нека је A произвољна тачка различита од O, $A' = \psi_k(A)$ и нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ, а пошто A' припада полуправој OA, следи да није $\mathcal{B}(A, O, A')$, па по дефиницији 17 следи да је $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = OA \cdot OA' = r^2 = OP^2$. На основу задатка 2.11 следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.

- ако права p садржи тачку O, онда се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$;
- ако права p не садржи тачку O, онда се p слика у $l \setminus \{O\}$, где је l круг који садржи O;
- ако круг l садржи тачку O, онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву p која не садржи O;
- ако круг l не садржи тачку O, онда се l слика у круг l_1 који такође не садржи O, при чему се центар круга l **не слика** у центар круга l_1;

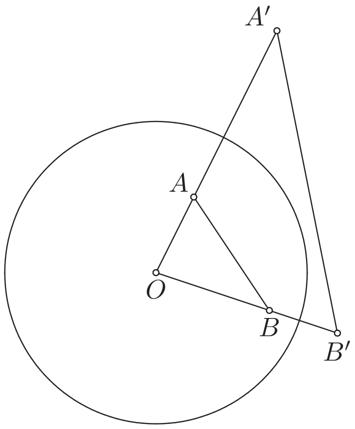
  На следећим сликама видимо како се инверзијом сликавају праве и кругови у зависности од тога да ли садрже тачку O. Такође, видимо да ако је $\psi_k(l) = l_1$, онда се центар круга l не слика у центар круга l_1.







- ако је $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$, онда је $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$;



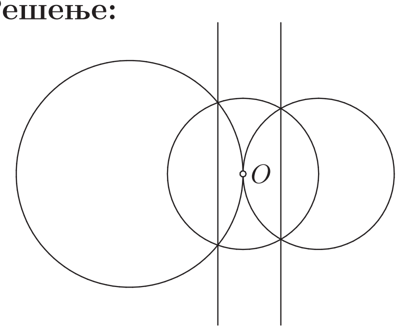
Нека су A, B две разне тачке и $A' = \psi_k(A), B' = \psi_k(B)$. Троуглови $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$ су слични јер имају заједнички угао код темена O и из $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ следи да је $OA : OB' = OB : OA'$. Према томе, $OA : OB' = AB : B'A'$, тј. $A'B' = \frac{OB'}{OA} AB = \frac{OB \cdot OB'}{OA \cdot OB} AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.

- ψ_k чува углове између кривих.

  Угао између двеју кривих које се секу је угао између њихових тангенти у пресечној тачки, при чему је права сама себи тангента у произвољној тачки. Пошто инверзија чува углове, угао између тангенти двеју кривих у њиховој пресечној тачки једнак је углу између тангенти слика тих кривих при инверзији ψ_k у њиховој пресечној тачки. Пошто се инверзијом праве и кругови сликају у праве и кругове, инверзија чува углове између правих и кругова. Пресликавања која чувају углове називамо *конформним* пресликавањима.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.

Решење:



Нека је $k(O,r)$ круг инверзије (дакле, O је центар инверзије) и нека су k_1, k_2 кругови такви да је $k_1 \cap k_2 = \{O\}$. Пошто садржи центар инверзије, кад кажемо да се круг k_1 слика у праву k_1' која не садржи центар инверзије, морамо имати у виду да слика тачке O није дефинисана, па се формално скуп $k_1 \setminus \{O\}$ слика у праву k_1', тј. важи $\psi_k(k_1 \setminus \{O\}) = k_1'$. Слично и за круг k_2 важи $\psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = k_2'$, где је k_2' права која не садржи центар инверзије. Према томе, како је ψ_k бијекција, важи

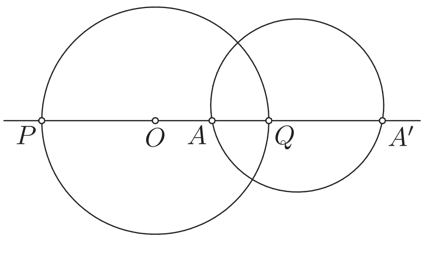
$$\begin{aligned} k_1' \cap k_2' &= \psi_k(k_1 \setminus \{O\}) \cap \psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = \psi_k((k_1 \setminus \{O\}) \cap (k_2 \setminus \{O\})) \\ &= \psi_k((k_1 \cap k_2) \setminus \{O\}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Дакле, праве k_1' и k_2' немају заједничких тачака, па су паралелне, што је и требало доказати.

2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A'. Доказати да је $l \perp k$.

У решењу овог задатка користићемо 11. и 14. задатак из области Сличност. Подсетимо се њихових поставки.
11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB, тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.
14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D. Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff k \perp l$.

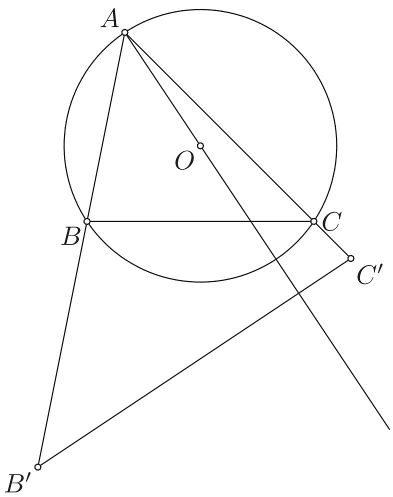
Решење:



Нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ и важи $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = r^2 = PO^2$, па на основу 11. задатка из области Сличност важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$. Дуж PQ је пречник круга k, круг l садржи тачке A, A' и важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$, па на основу 14. задатка из области Сличност следи да је $k \perp l$, што је и требало доказати.

3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC. Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.

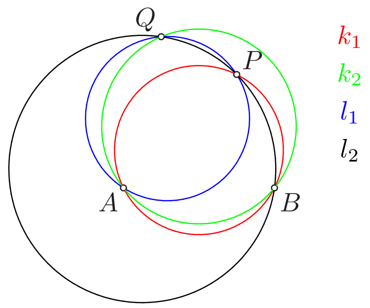
Решење:



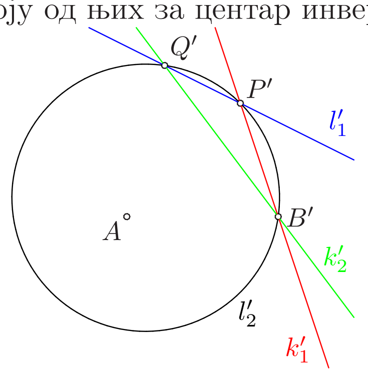
Нека је $k(A,\rho)$ круг с центром у тачки A чији је полупречник ρ једнак $\sqrt{AB \cdot AB'}$. Тада је $B' = \psi_k(B)$ и $C' = \psi_k(C)$. Описани круг l садржи тачку A, па се инверзијом ψ_k слика у праву $B'C'$ (тачније, $\psi_k(l \setminus \{A\}) = B'C'$). Такође, права AO садржи тачку A, па се инверзијом ψ_k слика у себе (тачније, $\psi_k(AO \setminus \{A\}) = AO \setminus \{A\}$). Права AO и круг l су међусобно нормални, јер права AO садржи центар O круга l. Пошто инверзија чува углове, следи да су слике праве AO и круга l међусобно нормални, тј. да је $AO \perp B'C'$, што је и требало доказати.

4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB.

Решење:



Означимо кругове описане око троуглова $\triangle ABP, \triangle ABQ$ редом са k_1, k_2, а кругове описане око троуглова $\triangle PQA, \triangle PQB$ редом са l_1, l_2. Много је лакше наћи угао између правих него између кругова. Инверзија чува углове и одређене кругове слика у праве, па је пожељно применити неку инверзију и пресликати што већи број кругова у праве. Центар инверзије одаберимо тако да припада највећем броју кругова. Пошто све четири тачке A, B, P, Q припадају по трима круговима, одаберимо било коју од њих за центар инверзије, нпр. тачку A.

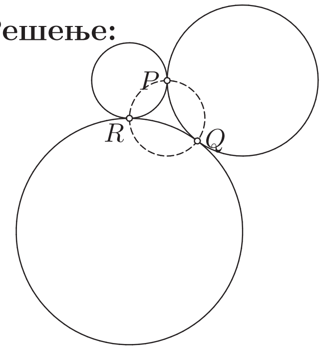


Дакле, нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', P', Q' дате са $B' = \psi_k(B), P' = \psi_k(P), Q' = \psi_k(Q)$, праве k'_1, k'_2, l'_1 дате са $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{A\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{A\}), l'_1 = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$ и нека је круг l'_2 дат са $l'_2 = \psi_k(l_2)$. Знамо да l_2 круг не садржи тачку A (ако би је садржао онда би четвороугао $ABPQ$ био тетиван што је у супротности да претпоставком задатка да је $ABPQ$ нететиван четвороугао), те се он слика у круг l'_2 који не садржи тачку A. Круг k_1 садржи тачке B, P, па је $k'_1 = B'P'$. Слично, $k'_2 = B'Q'$ и $l'_1 = P'Q'$, а како круг l_2 садржи тачке B, P, Q, следи да круг l'_2 садржи тачке B', P', Q'. Угао између праве l'_1 и круга l'_2 једнак је оштром углу између тетиве $P'Q'$ и тангенте круга

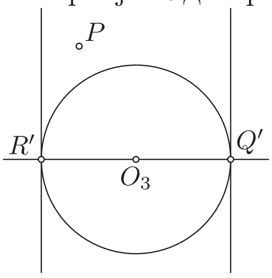
l_2' у некој од тачака P', Q' (подударни су), а тај угао је подударан периферијском углу над тетивом $P'Q'$, тј. углу $\measuredangle P'B'Q'$, што је угао између правих k_1', k_2'. Инверзија чува углове, па следи да је угао између кругова l_1, l_2 подударан углу између кругова k_1, k_2, што је и требало доказати.

5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R. Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.

Решење:



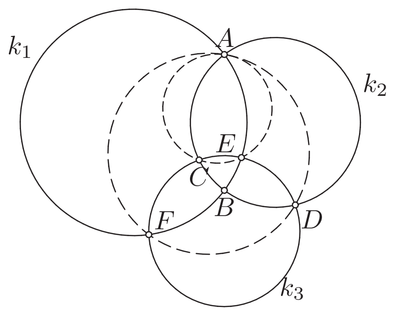
Нека је $k_1 \cap k_2 = \{P\}, k_2 \cap k_3 = \{Q\}, k_3 \cap k_1 = \{R\}$. Означимо круг описан око троугла $\triangle PQR$ са l. Кроз сваку од тачака P, Q, R пролазе по три од четири дата круга, па је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P.



Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R)$, нека су праве k_1', k_2', l' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{P\}), l' = \psi_k(l \setminus \{P\})$ и нека је круг k_3' дат са $k_3' = \psi_k(k_3)$. Кругови k_1, k_2 се додирују у центру инверзије P, па на основу 1. задатка следи да је $k_1' \parallel k_2'$, а такође кругови k_1, k_2 додирују круг k_3 редом у тачкама R, Q, па су k_1', k_2' тангенте круга k_3' редом у тачкама R', Q'. Према томе, ако је O_3 центар круга k_3', онда је $O_3R' \perp k_1'$ и $O_3Q' \perp k_2'$. Због $k_1' \parallel k_2'$, следи да је $O_3R' \parallel O_3Q'$, па следи да су тачке O_3, Q', R' колинеарне. Круг l садржи тачке P, Q, R, па је права $Q'R'$ слика круга l, односно права l'. Дакле, права l' је нормална на k_1', k_2' и садржи центар круга k_3', па је нормална и на k_3'. Инверзија чува углове, па следи да је $l \perp k_1, k_2, k_3$, што је и требало доказати.

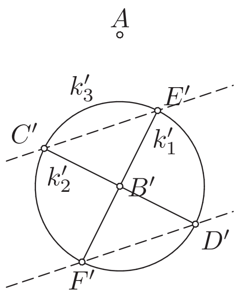
6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B, k_2 и k_3 у тачкама C и D, k_3 и k_1 у тачкама E и F. Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A.

Решење:



Нека су l_1, l_2 кругови описани око троуглова $\triangle ACE, \triangle ADF$. Тачка A припада свим круговима осим кругу k_3, па одаберимо њу за центар инверзије.

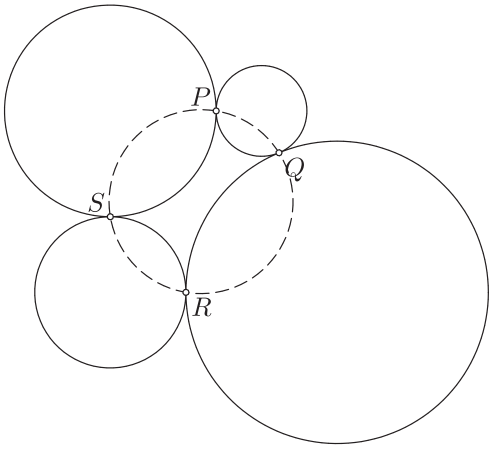
Нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', C', D', E', F' дате са $B' = \psi_k(B)$, $C' = \psi_k(C)$, $D' = \psi_k(D)$, $E' = \psi_k(E)$, $F' = \psi_k(F)$, нека су праве k'_1, k'_2, l'_1, l'_2 дате са $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{A\})$, $k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{A\})$, $l'_1 = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$, $l_2 = \psi_k(l_2 \setminus \{A\})$ и нека је круг k'_3 дат са $k'_3 = \psi_k(k_3)$. Инверзија чува углове, па следи да су праве k'_1, k'_2 међусобно управне у тачки B' и управне на кругу k'_3, тј. садрже његов центар. Према томе, тачка B' је центар круга k'_3. Кругови k_1, k_3 имају заједничке тачке E, F, па следи да се права k'_1 и круг k'_3 секу у тачкама E', F'. Слично, права k'_2 и круг k'_3 се секу у тачкама C', D'. Круг l_1 садржи тачке A, C, E, а круг l_2 тачке A, D, F, па је $l'_1 = C'E'$ и $l'_2 = D'F'$.

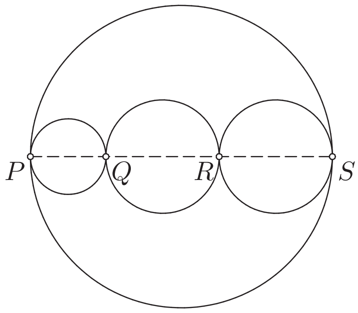


Троуглови $\triangle B'C'E'$ и $\triangle B'D'F'$ су једнакокрако правоугли, па следи да су углови $\measuredangle B'C'E'$ и $\measuredangle B'D'F'$ једнаки по 45°, па су и међусобно подударни. Према томе, следи да су праве $C'E'$ и $D'F'$ паралелне, тј. $l'_1 \parallel l'_2$. Како кругови l_1 и l_2 имају заједничку тачку A, следи да им је то једина заједничка тачка, тј. да се додирују у тачки A.

7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.

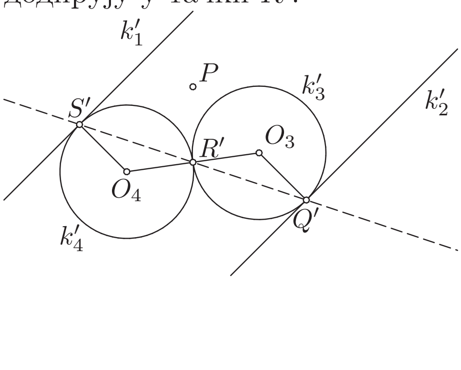
Решење:



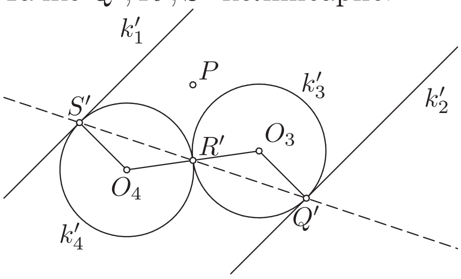


Нека се кругови k_1, k_2 додирују у тачки P, нека се кругови k_2, k_3 додирују у тачки Q, нека се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R и нека се кругови k_4, k_1 додирују у тачки S. Треба доказати да су тачке P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Свака од тачака P, Q, R, S заједничка је за по два круга, тако да је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P.

Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R', S' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R), S' = \psi_k(S)$, праве k_1', k_2' дате са $k_1' = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k_2' = \psi_k(k_2 \setminus \{P\})$ и кругови k_3', k_4' дати са $k_3' = \psi_k(k_3), k_4' = \psi_k(k_4)$. На основу 1. задатка следи да су праве k_1', k_2' паралелне, а пошто се k_2, k_3 додирују у тачки Q и k_1, k_4 додирују у тачки S, следи да су праве k_1', k_2' редом тангенте кругова k_4, k_3 у тачкама S', Q'. Пошто се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R, следи да се кругови k_3', k_4' додирују у тачки R'.



Означимо са O_3, O_4 редом центре кругова k'_3, k'_4. Пошто се они додирују у тачки R', следи да су тачке O_3, R', O_4 колинеарне. Према томе, довољно је доказати да важи $\measuredangle S'R'O_4 = \measuredangle Q'R'O_3$, јер ће тада то бити унакрсни углови и доказаћемо да су Q', R', S' колинеарне. Пошто су праве k'_1, k'_2 редом тангенте кругова k'_4, k'_3 у тачкама S', Q', следи да је $S'O_4 \perp k'_1$ и $Q'O_3 \perp k'_2$, а пошто су и паралелне, следи да важи $S'O_4 \parallel Q'O_3$. Према томе, углови $\measuredangle S'O_4R'$ и $\measuredangle Q'O_3R'$ јесу углови с паралелним крацима, па су подударни, тј. важи $\measuredangle S'O_4R' = \measuredangle Q'O_3R'$. Троуглови $\triangle O_4S'R', \triangle O_3Q'R'$ су једнакокраки и имају подударне углове при врху, па следи да имају подударне и остале углове. Специјално, важи $\measuredangle S'R'O_4 = \measuredangle Q'R'O_3$, те су тачке Q', R', S' колинеарне.

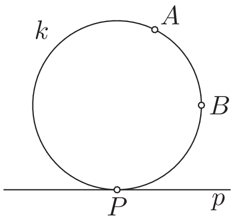


Онда су P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Заиста, нека је p права која садржи тачке Q', R', S'. Инверзија је инволуција, па је $Q = \psi_k(Q')$, $R = \psi_k(R')$, $S = \psi_k(S')$. Ако $p \ni P$, онда је $\psi_k(p \setminus \{P\}) = p \setminus \{P\}$, па следи да $Q, R, S \in p$, што значи да су P, Q, R, S колинеарне. Ако $p \not\ni P$, онда је $\psi_k(p) = p' \setminus \{P\}$, где је p' круг који садржи тачку P и $Q, R, S \in p'$, што значи да су P, Q, R, S концикличне.

8. Конструисати круг k који садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p.

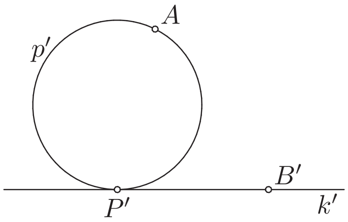
Решење:

Анализа: Нека је k круг који испуњава услове задатка, тј. нека $k \ni A, B$ и нека k додирује p.



Бар једна од тачака A, B не припада правој p, јер се права и круг додирују у тачно једној тачки, а A, B су различите тачке. Без умањења општости, претпоставимо да тачка A не припада правој p и одаберимо њу за центар инверзије.

Нека је $l(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека је тачка B' дата са $B' = \psi_l(B)$, права k' дата са $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$ и круг p' дат са $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$, при чему $k' \not\ni A$ и $p' \ni A$.



Круг k садржи тачку B и додирује праву p, па следи да права k' садржи тачку B' и додирује круг p', тј. да је тангента круга p' из тачке B'.

Конструкција: Нека $p \not\ni A$. Конструишимо круг $l(A, \rho)$ произвољног полупречника $\rho > 0$. Конструишимо круг p' који садржи тачку A такав да важи $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$. Одредимо тачку $B' = \psi_l(B)$ и конструишимо тангенту k' круга p' из тачке B' такву да $k' \not\ni A$. Конструишимо круг k који садржи тачку A такав да важи $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$.

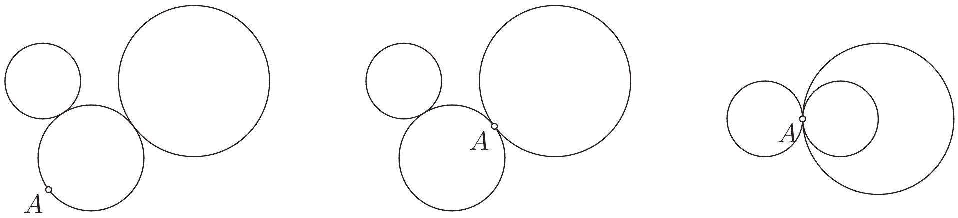
Доказ: По конструкцији, k' је права која не садржи тачку A, тј. центар инверзије, па је k круг који садржи тачку A. Такође, права k' садржи тачку $B' = \psi_l(B)$, па следи да k садржи тачку $B = \psi_l(B')$. По конструкцији, права k' додирује круг p' (у тачки различитој од тачке A, јер је k' не садржи), па следи да круг k додирује праву p.

Дискусија: Ако обе тачке A, B припадају правој p, задатак нема решења. У супротном, број решења је једнак броју тангенти круга p' из тачке B', које не садрже тачку A, што може бити нула ако B' припада унутрашњости круга p', један ако $B' \in p'$ или ако B' припада спољашњости круга p' и једна од тангенти је права AB', односно два у свим осталим случајевима.

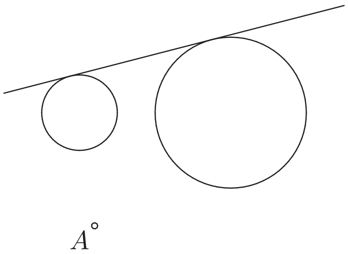
9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2.

Решење:

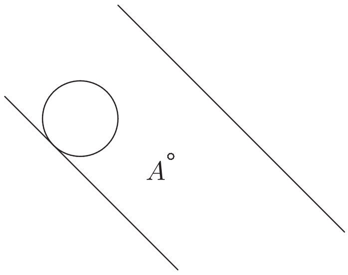
Анализа: Нека је k круг који испуњава услове задатка, тј. нека $k \ni A$ и нека k додирује кругове k_1, k_2.



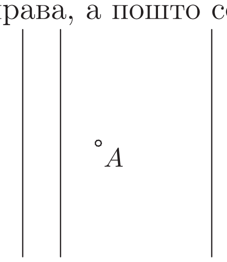
Нека је $l(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека је права k' дата са $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$. За праву k' важи да не садржи тачку A. Разликујемо три случаја: када тачка A не припада ни кругу k_1 ни кругу k_2, када припада тачно једном од њих (без умањења општости, кругу k_2) и када припада и једном и другом.



У првом случају су и $k_1' = \psi_l(k_1)$ и $k_2' = \psi_l(k_2)$ кругови који не садрже тачку A и додирују праву k', тј. k' је заједничка тангента кругова k_1', k_2'.



У другом случају је $k_1' = \psi_l(k_1)$ круг који не садржи тачку A и додирује праву k', тј. k' је тангента круга k_1'. Такође, $k_2' = \psi_l(k_2 \setminus \{A\})$ је права, а пошто се кругови k, k_2 додирују у тачки A, следи да је $k' \parallel k_2'$.



У трећем случају се инверзијом у односу на круг l оба круга (строго формално, без тачке A) сликају у праве које не садрже тачку A. Пошто се кругови k_1, k додирују у тачки A, на основу 1. задатка следи да важи $k_1' \parallel k'$. Исти закључак важи и за праве k_2', k', тј. важи $k_2' \parallel k'$.

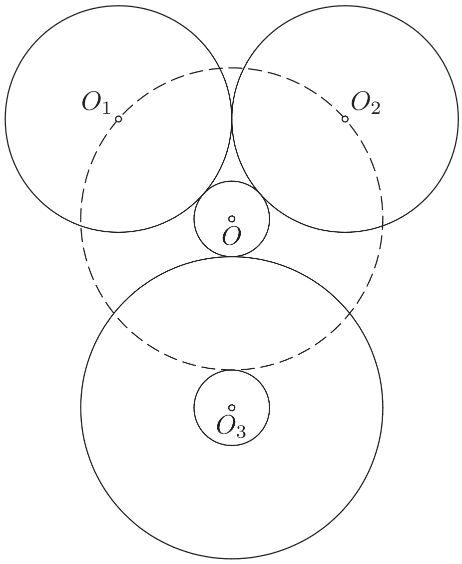
Конструкција: Конструишимо круг $l(A, \rho)$ произвољног полупречника $\rho > 0$. У зависности од тога да ли тачка A припада круговима k_1, k_2 или не, конструишимо њихове слике k_1', k_2' при инверзији ψ_l. Конструишимо праву k' која не садржи тачку A и испуњава један од следећа три услова:
1. заједничка је тангента кругова k_1', k_2', ако $A \notin k_1, k_2$.
2. паралелна је правој k_2' и тангента је круга k_1', ако $A \notin k_1$ и $A \in k_2$;
3. паралелна је правима k_1', k_2' ако $A \in k_1, k_2$;
На крају, конструишимо круг k који садржи тачку A такав да важи $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$.

Доказ: По конструкцији је k' права која не садржи тачку A, тј. центар инверзије, па је k круг који садржи тачку A. Права која не садржи тачку A и паралелна је правој k' слика се у круг који додирује круг k у центру инверзије, тј. у тачки A, а круг који не садржи тачку A и додирује праву k' слика се у круг који не садржи тачку A и додирује круг k. Према томе, у свим претходно разматраним случајевима следи да кругови k_1, k_2 додирују круг k.

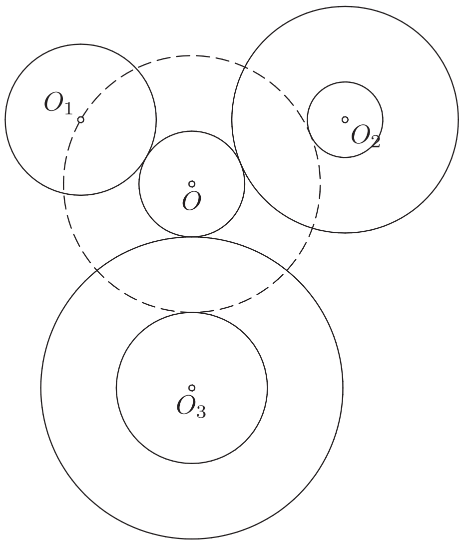
Дискусија: Број решења једнак је броју правих не садрже тачку A и испуњавају одговарајући услов из дела Конструкција. У првом случају број таквих правих може бити од нула до четири, у зависности од међусобног положаја кругова k_1', k_2' (рачунају се и заједничке спољашње и заједничке унутрашње тангенте). У другом случају број таквих правих може бити један или два, у зависности од тога да ли нека од двеју тангенти круга k_1' које су паралелне правој k_2' садржи тачку A или не. У трећем случају има беконачно много решења ако су праве k_1', k_2' паралелне, односно нема решења ако се те праве секу.

10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3.

Решење: Решење овог задатка неће бити дато као решења осталих конструктивних задатака (иако треба исписати све четири етапе, као и у осталим таквим задацима), јер ће се једноставном трансформацијом довести до неког од претходна два задатка, која знамо да решимо. Нека круг $k(O, r)$ додирује кругове $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$ споља. Нека је, без умањења општости, $r_1 \leq r_2, r_3$ и нека је $l(O, r+r_1)$ круг. Тада круг l садржи центар O_1 круга k_1.



Ако важи нека од једнакости $r_1 = r_2$, $r_1 = r_3$, онда круг l садржи и неку од тачака O_2, O_3. Ако садржи обе, онда је он описани круг троугла $\triangle O_1O_2O_3$. Ако садржи само једну од њих (без умањења општости, тачку O_2), онда он додирује круг $l_3(O_3, r_3-r_1)$ споља. Дакле, тада круг l садржи тачке O_1, O_2 и додирује круг l_3 споља, па се његова конструкција врши слично као у 8. задатку. Тамо је, додуше, задатак био да се конструише круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву, а овде уместо праве треба да додирује круг споља, али се и овај задатак решава на исти начин.



Ако круг l не садржи ниједну од тачака O_2, O_3, онда додирује и круг $l_2(O_2, r_2 - r_1)$ споља и круг $l_3(O_3, r_3 - r_1)$ споља, па се његова конструкција врши исто као у претходном задатку (круг који садржи дату тачку и додирује два дата круга), с тим што се овде узимају у обзир само заједничке спољашње тангенте и то такве да су O_1, l_2', l_3' с исте стране те тангенте, иначе ће круг добијен инверзијом додиривати кругове l_2, l_3 унутра.

5 Изометријске трансформације равни

Дефиниција 24. Нека је α раван. Пресликавање $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$, такво да за сваки пар тачака (A, B) равни α важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом* (*изометријом*) равни α.

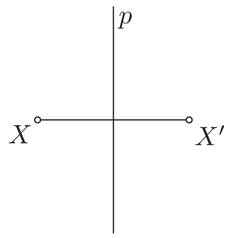
Релација подударности парова тачака је основни појам, тј. не дефинише се. Све изометрије су бијекције, сликају праве у праве (штавише, чувају распоред тачака на правој, тј. ако важи $\mathcal{B}(A, B, C)$, онда важи $\mathcal{B}(\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B), \mathfrak{I}(C))$, полуправе у полуправе, дужи у дужи, полуравни у полуравни, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове итд. Изометрије које мењају оријентацију равни називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију равни називамо *директним* изометријама. За сваке две изометрије $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$, њихова композиција $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{I}$ је такође изометрија, и инверз $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је такође изометрија. Другим речима, изометрије чине групу у односу на операцију композиције пресликавања.

Дефиниција 25. Нека су $\Phi, \Phi' \subseteq \alpha$ фигуре у равни α. Ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$ равни α таква да важи $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$, онда кажемо да је фигура Φ *подударна* фигури Φ' и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

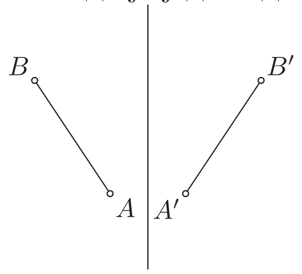
Није тешко доказати да је релација $\cong$ подударности фигура једна релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно подударне*. Дужи $AB, A'B'$ су међусобно подударне ако и само ако важи $(A, B) \cong (A', B')$.

Сада ћемо видети које све изометрије равни постоје и у каквим су оне односима.

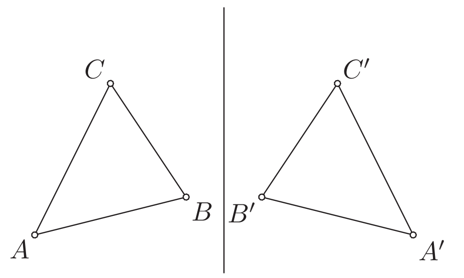
Дефиниција 26. Нека је $p \subset \alpha$ права равни α и нека је пресликавање $\mathcal{S}_p$ дато на следећи начин: ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X$, а иначе је $\mathcal{S}_p(X) = X'$, где је X' тачка таква да је p медијатриса дужи XX' у равни α. Онда се пресликавање $\mathcal{S}_p$ назива *осном рефлексијом* (*осном симетријом*) равни α с осом p.



Није тешко доказати да је овако дефинисано пресликавање изометрија. Слика произвољне дужи AB је дуж $A'B'$ ($A' = \mathcal{S}_p(A)$, $B' = \mathcal{S}_p(B)$) таква да је једна од њих „лик у огледалу” другој и обратно.



Шта се дешава ако двапут применимо осну рефлексију? По дефиницији се тачке праве p сликају у себе, а ако се X слика у X' такво да је p медијатриса дужи XX', онда се X' мора сликати у X. Дакле, $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathrm{Id}$, што значи да је осна рефлексија сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке осе p сликају у себе, а тачке ван осе p се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је p медијатриса), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке осе p.



Што се промене оријентације тиче, ако је $\triangle ABC$ позитивно оријентисан троугао, тј. ако су A, B, C тачке равни α такве да се од темена A ка темену B па затим ка темену C иде у позитивном смеру, онда је троугао $\triangle A'B'C'$, где су A', B', C' редом слике тачака A, B, C при осној рефлексији $\mathcal{S}_p$, негативно оријентисан троугао. Према томе, осна рефлексија мења оријентацију равни, па је индиректна изометрија равни.

Теорема 11. *Ако је $\mathfrak{I}$ индиректна изометрија равни α која има бар једну фиксну тачку P, онда је $\mathfrak{I}$ осна рефлексија $\mathcal{S}_p$ чија оса $p \subset \alpha$ садржи фиксну тачку P.*

Теорема 12 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $p \subset \alpha$ права равни α, $\mathcal{S}_p$ осна рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $p' = \mathfrak{I}(p)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$.*

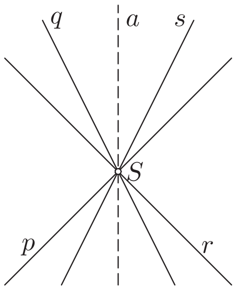
Дефиниција 27. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α. Кажемо да је права p *оса симетрије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар једну осу симетрије, кажемо да је она *осносиметрична*.

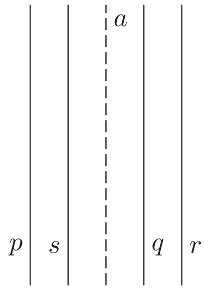
Сваку изометрију равни α можемо изразити преко осних рефлексија. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише три.

Теорема 13. *Нека је $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p$ за неку праву $p \subset \alpha$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке праве $p, q \subset \alpha$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке праве $p, q, r \subset \alpha$.*

У дефиницији 14 увели смо појам прамена правих у равни. Прамен правих је у директној вези с композицијом осних рефлексија. Наиме, важи следећа важна теорема.

Теорема 14. *Нека су $p, q, r \subset \alpha$ йраве равни α. Онда је комйозиција $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осна рефлексија ако и само ако йраве p, q, r йрийадају једном йрамену. Шшавише, шада оса ше рефлексије (означимо је са s) йрийада шом йрамену и ако је йрава a оса симешрије йара йравих p, r, шада је йрава a оса симешрије и йара йравих q, s.*





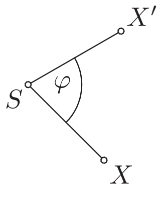
Утврдимо које још изометрије равни постоје.

Дефиниција 28. Пресликавање $\mathcal{E} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{E}(X) = X$ за сваку тачку $X \in \alpha$ називамо *коинциденцијом.*

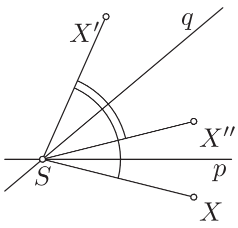
Коинциденција је, у ствари, идентичко пресликавање. Оно је тривијално изометрија, јер је $(A, B) \cong (A, B) = (\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B))$ за сваки пар тачака A, B. С обзиром на то да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathrm{Id} = \mathcal{E}$, имамо репрезентацију коинциденције преко производа двеју осних рефлексија. Тривијално, коинциденција је директна изометрија равни.

Теорема 15. *Ако изомешрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар шри неколинеарне фиксне шачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Ако дирекшна изомешрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар две разне фиксне шачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$.*

Дефиниција 29. Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α и φ оријентисани угао у тој равни. Пресликавање $\mathcal{R}_{S,\varphi} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{R}_{S,\varphi}(S) = S$ и $\mathcal{R}_{S,\varphi}(X) = X'$ где је X' таква да важи $SX = SX'$ и $\measuredangle XSX' = \varphi$ (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке $X \neq S$, назива се *рошацијом* око центра S за оријентисани угао φ.



Да бисмо разумели како ротација пресликава тачке равни α, замислимо да имамо крути штап чији један крај у центру S и који је фиксиран, а други крај је у произвољној тачки X равни α. Ротацијом штапа за оријентисани угао φ добијемо положај тачке $X' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(X)$.



Како видети ротацију као композицију двеју осних рефлексија? Означимо са p произвољну праву равни α која садржи тачку S и са q праву равни α добијену ротацијом праве p око центра S за оријентисани угао $\frac{\varphi}{2}$. Није тешко доказати да у том случају важи $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Напоменимо да репрезентација ротације $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ као $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ није јединствена, јер праве p, q можемо ротирати око центра S за произвољан угао и добити праве p', q' такве да је композиција $\mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'}$ такође једнака полазној ротацији.

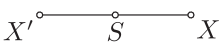
Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\psi} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi+\psi}$, $\mathcal{R}_{S,0^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}^{-1}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,-\varphi}$, где је $-\varphi$ угао подударан углу φ, супротне оријентације.

Теорема 16. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има тачно једну фиксну тачку S, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{S,\varphi}$, за неки оријентисани угао φ различит од 0° или пуног угла.*

Теорема 17 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α, φ оријентисани угао у тој равни, $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ ротација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α. Ако је $S' = \mathfrak{I}(S)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',\varphi}$, ако је $\mathfrak{I}$ директна, односно $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',-\varphi}$, ако је $\mathfrak{I}$ индиректна изометрија.*

Може се доказати да ако је φ конвексан угао различит од 0° или опруженог угла и $p' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(p)$, онда праве p, p' заклапају углове φ и $180^\circ - \varphi$.

Специјални случај ротације јесте онај у коме је угао ротације опружени угао. Тада за тачку $X' = \mathcal{R}_{S,180^\circ}(X)$, где је $X \neq S$, важи да је $SX' = SX$ и $\measuredangle XSX' = 180^\circ$, тј. $\mathcal{B}(X, S, X')$. Тачка S је онда средиште дужи XX'.

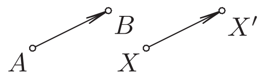


Ово пресликавање се назива *централном симетријом* и означава се са $\mathcal{S}_S$ (не употребљава се термин централна рефлексија; он се користи кад се говори о изометријама једне праве). Јасно је да важи $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$, јер је $\mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_S = \mathcal{R}_{S,180^\circ} \circ \mathcal{R}_{S,180^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$. Такође, ако је $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, онда је оријентисани угао од праве p ка правој q подударан углу $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, тј. важи $p \perp q$.

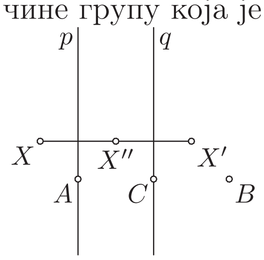
Слично појму осе симетрије неке фигуре, постоји и појам центра симетрије фигуре.

Дефиниција 30. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α. Кажемо да је тачка S *центар симетрије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_S(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар један центар симетрије, онда је она *централносиметрична*.

Дефиниција 31. Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α. Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



Транслација не представља ништа друго него праволинијско кретање у одређеном смеру. Није тешко доказати да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ и $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{-\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, транслације (заједно са коинциденцијом) чине групу која је подгрупа групе изометрија.



Нека је p права која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је q права која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB. Јасно, тада је $p \parallel q$. Није тешко доказати да важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју осних рефлексија. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, тј. уместо правих p, q можемо посматрати праве p', q' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од праве p' ка правој q' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

Транслација је директна изометрија. То можемо видети директно из дефиниције (померањем у правцу неког вектора не мења се оријентација равни), а можемо видети и из чињенице да се транслација представља као композиција двеју осних рефлексија. Што се тиче фиксних тачака, важи следеће. Ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, тј. ако је у питању коинциденција, све тачке равни α су фиксне, а ако је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, онда је $X' \neq X$ за сваку тачку X равни α, тј. ниједна тачка није фиксна.

Теорема 18. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α.*