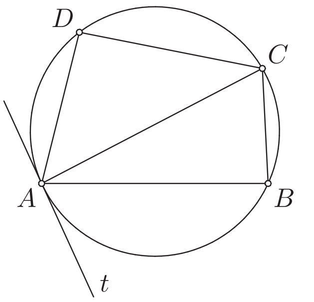
11. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

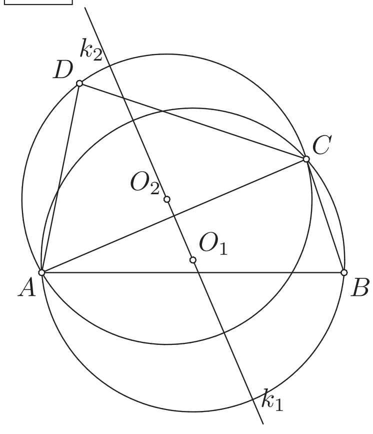
Решење: Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Додавање коинциденције $\mathcal{E}$ (идентичког пресликавања) у композицију не мења њену вредност, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$:



Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, k његов описани круг и t тангента круга k у тачки A. Круг k је описани круг троугла $\triangle ABC$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$. Такође, круг k је описани круг и троугла $\triangle ACD$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_t$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{E}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$:



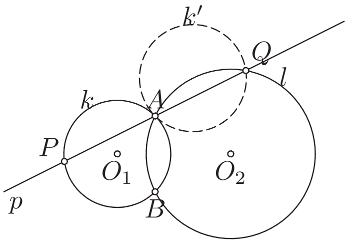
Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Нека су k_1, k_2 редом описани кругови троуглова $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, нека су O_1, O_2 редом њихови центри и нека су t_1, t_2 редом тангенте кругова k_1, k_2 у тачки A. Оба круга садрже тачке A, C, па следи да се O_1, O_2 налазе на медијатриси дужи AC. На основу претходног задатка имамо да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{t_1}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_{t_2}$. Пошто је $\mathcal{E} = \mathfrak{I} = \mathcal{S}_{t_2} \circ \mathcal{S}_{t_1}$, следи да је $\mathcal{S}_{t_2} = \mathcal{S}_{t_1}^{-1} = \mathcal{S}_{t_1}$, па је $t_1 = t_2$, тј. тангенте t_1, t_2 се поклапају. Следи да се центри ових кругова налазе на правој n која је нормална на t_1 у тачки A. Медијатриса дужи AC и права n се разликују, јер A припада правој n, а не припада медијатриси дужи AC.

Дакле, центри O_1, O_2 се налазе на n и на медијатриси дужи AC, па како две разне праве имају највише једну заједничку тачку, следи да се O_1, O_2 поклапају. Према томе, кругови k_1, k_2 имају исти центар и оба садрже тачку A, па се и они поклапају. Следи да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

12. Дата су два круга који имају пресечну тачку A. Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.

Решење:

Анализа: Нека је p права која испуњава услове задатка, тј. права која садржи тачку A и на којој дати кругови k, l одсецају подударне дужи.



Нека су P, Q редом пресечне тачке кругова k, l са правом p, различите од тачке A. Тада је $AP = AQ$. Ако се тачке P, Q поклапају, онда оне представљају другу пресечну тачку кругова k, l. Ако се тачке P, Q разликују, онда је A средиште дужи PQ, што значи да је $\mathcal{S}_A(P) = Q$. Посматрајмо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$. Пошто $P \in k$, следи да $Q = \mathcal{S}_A(P) \in k'$, па је Q пресечна тачка кругова k', l, различита од тачке A. Права p је истоветна с правом AQ.

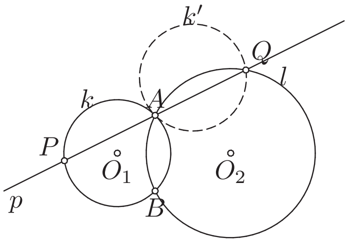
Конструкција: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, конструишимо праву AB.

Конструишимо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$ и означимо са Q пресечну тачку кругова k', l, различиту од тачке A. Конструишимо праву $p = AQ$.

Доказ: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, кругови k, l одсецају дуж AB на правој AB, па одсецају подударне дужи на правој AB.

Нека је $P = \mathcal{S}_A(Q)$. Тада је P пресечна тачка праве p и круга k, различита од тачке A. Заиста, тачка P припада правој AQ (тј. правој p) и припада кругу k (јер је ПК $k' = \mathcal{S}_A(k)$, па је $\mathcal{S}_A(k') = k$). Пошто је Q различита од A, онда је и P различита од A, па следи да је P пресечна тачка праве p и круга k, различита од тачке A. Како је $P = \mathcal{S}_A(Q)$, важи $AP = AQ$, па кругови k, l одсецају подударне дужи на правој p.

Дискусија:



Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B, онда је права AB једно од решења.

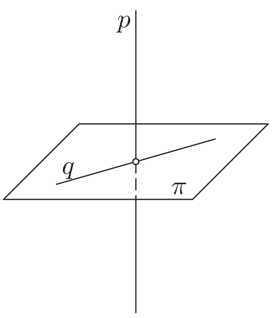
Кругови k', l имају заједничку тачку A. Ако се они поклапају, што се дешава у случају да се k, l додирују споља у тачки A и имају исте полупречнике, постоји бесконачно много решења. Ако се кругови k', l секу у двема тачкама A, Q, постоји јединствена права $p = AQ$. Тада се и кругови k, l секу (у тачкама A, B), па постоје два решења (друго решење је права AB). Ако сем тачке A кругови k', l немају заједничких тачака, задатак нема решења.

Према томе, закључак је следећи. Ако се кругови k, l секу у двема тачкама, постоје два решења. Ако се кругови k, l додирују у тачки A, решење постоји ако и само ако се кругови k, l додирују споља и имају исте полупречнике и онда има бесконачно много решења.

6 Стереометрија

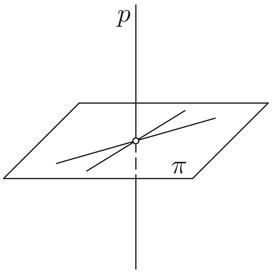
У овој области од интереса нам је еуклидска геометрија у простору. Подсетимо се појмова нормалности правих и равни, диедра, нормалности равни, триедра и мимоилазних правих, као и тврђења везаних за њих.

Дефиниција 34. Нека је π раван и p права која продире ту раван. Кажемо да је права p *управна* (*нормална, ортогонална*) на равни π (и обратно), у ознаци $p \perp \pi$ и $\pi \perp p$, ако је управна на свакој правој q равни π која садржи продорну тачку праве p и равни π.



Услов из дефиниције обично није погодан за проверу. Зато користимо следећу теорему.

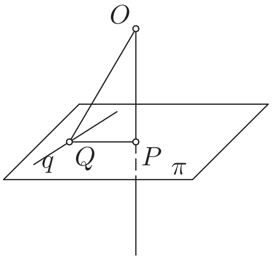
Теорема 22 (Коши)**.** *Нека је π раван и p права која продире ту раван. Ако је права p управна на двема разним правима равни π које садрже продорну тачку праве p и равни π, онда је права p управна на равни π.*



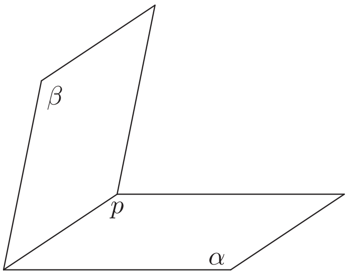
Теорема 23. *Нека је A тачка и π раван. Тада постоји јединствена права n која садржи тачку A и управна је на равни π.*

Теорема 24. *Нека је A тачка и p права. Тада постоји јединствена раван π која садржи тачку A и управна је на правој p.*

Теорема 25 (О трима нормалама)**.** *Ако је права p нормала из тачке O на равни π и продире је у тачки P, а Q подножје нормале из P на правој $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.*

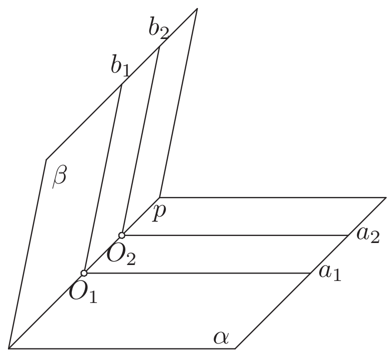


Дефиниција 35. *Диедарска површ* $\angle\alpha p\beta$ јесте унија полуравни $p\alpha$ и $p\beta$ са заједничким рубом p. Ове полуравни називамо *пљоснима* или *странама* те диедарске површи, а праву p њеном *ивицом*.



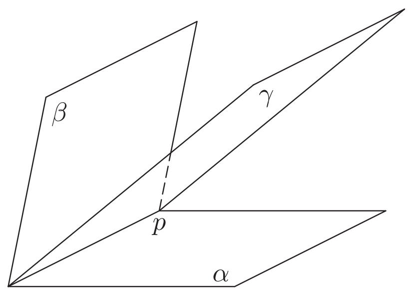
Као што угаона линија разлаже раван којој припада на две области, тако и диедарска површ разлаже простор на две области. Унију диедарске површи и неке од тих области називамо *диедром*. Један од диедара је увек конвексан (представља пресек двају полупростора чији су рубови равни које садрже пљосни диедарске површи) и означавамо га са $\measuredangle\alpha p\beta$.

Теорема 26. *Нека је $\angle\alpha p\beta$ диедарска површ и нека су γ_1, γ_2 равни које су управне на ивици p те диедарске површи. Тада те равни секу диедарску површ по угаоним линијама $\angle a_1O_1b_1, \angle a_2O_2b_2$ таквим да су углови $\measuredangle a_1O_1b_1, \measuredangle a_2O_2b_2$ међусобно подударни.*



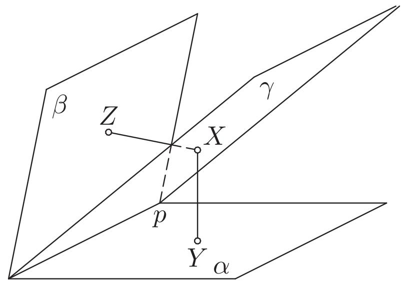
Дефиниција 36. Сваки од углова из претходне теореме назива се *нагибним углом* диедра.

Није тешко приметити да су два диедра међусобно подударна ако и само ако су такви и њихови нагибни углови.



Дефиниција 37. Нека је $\measuredangle\alpha p\beta$ диедар. Полураван $p\gamma$ с рубом p, која припада диедру $\measuredangle\alpha p\beta$ и дели га на два међусобно подударна диедра $\measuredangle\alpha p\gamma, \measuredangle\gamma p\beta$, назива се *симетралном полуравни* диедра $\measuredangle\alpha p\beta$.

Теорема 27. *Нека је $\measuredangle \alpha p \beta$ диедар. Тада је симетрална полураван диедра $\measuredangle \alpha p \beta$ скуп свих тачака X простора које припадају диедру $\measuredangle \alpha p \beta$ такве да је $XY = XZ$, где је Y подножје управне из X на полуравни $p\alpha$, а Z подножје управне из X на полуравни $p\beta$.*

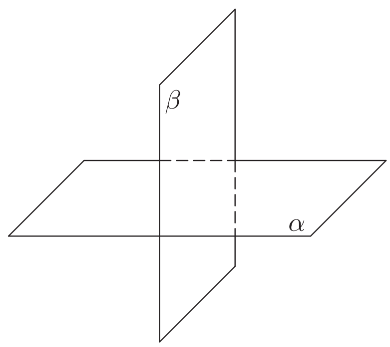


Дакле, симетрална полураван диедра је уопштење бисектрисе угла.

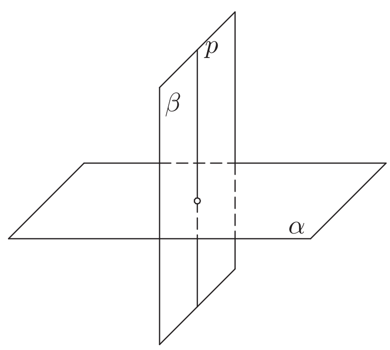
Дефиниција 38. Диедар је *прав* ако је његов нагибни угао прав.

Сличне дефиниције имамо за оштар и туп диедар.

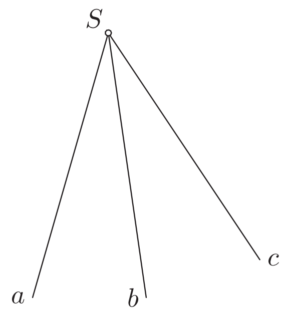
Дефиниција 39. Равни α, β су међусобно *управне* (*нормалне, ортогоналне*), у ознаци $\alpha \perp \beta$, ако садрже пљосни правог диедра.



Теорема 28. *Нека је α раван и p права управна на равни α. Тада је свака раван β, која садржи праву p, управна на равни α.*

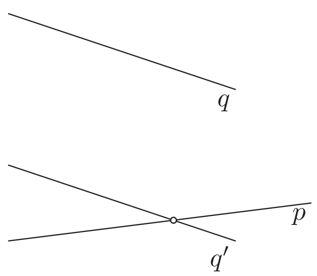


Дефиниција 40. Нека су Sa, Sb, Sc три полуправе у простору са заједничким теменом S, које не припадају истој равни. Тада скуп тачака $\measuredangle aSb \cup \measuredangle bSc \cup \measuredangle cSa$ називамо *триедарском површи*. Тачку S називамо *теменом* тог триедра, полуправе Sa, Sb, Sc његовим *ивицама*, а углове $\measuredangle aSb, \measuredangle bSc, \measuredangle cSa$ његовим *пљоснима* или *странама*.



Може се доказати да триедарска површ разлаже простор на две области, једна од којих је *унутрашњост*, а друга *спољашњост* триедарске површи. Унија триедарске површи и њене унутрашњости назива се *триедром*.

Дефиниција 41. Праве p, q називамо *мимоилазним* правима ако не постоји раван која их садржи.



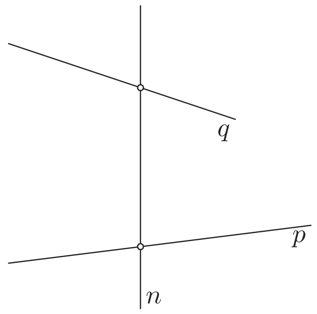
Мимоилазне праве немају заједничких тачака, јер би у супротном постојала раван која их садржи. Мимоилазне праве нису ни паралелне, јер паралелне праве припадају једној равни. *Углом* између мимоилазних правих p, q сматрамо угао између било којих двеју правих p', q' које се секу, таквих да је $p' \parallel p$ и $q' \parallel q$. Према томе, можемо извести следећи закључак.

Теорема 29. *Ако је права n управна на равни π, онда је она управна на свакој правој те равни.*

Теорема 30. *Ако је права n управна на двема непаралелним правима равни π, онда је права n управна на равни π.*

Заиста, ако је права n управна на двема непаралелним правима p, q равни π, тада је она управна на правима p', q' равни π, које садрже продорну тачку праве n и равни π и паралелне су правима p, q, а пошто праве p, q нису паралелне, онда су праве p', q' различите, па тврђење следи на основу Кошијеве теореме.

Теорема 31. *Нека су p, q мимоилазне праве. Тада постоји јединствена права n која сече праве p, q и управна је на њима.*



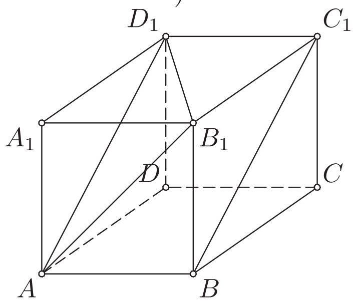
1. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Одредити угао између правих AB_1 и BC_1.

б) Одредити угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D.

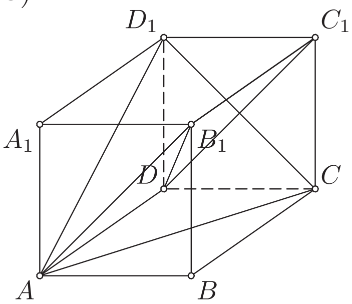
в) Доказати да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1 и дели је у размери $2:1$.

Решење: а)



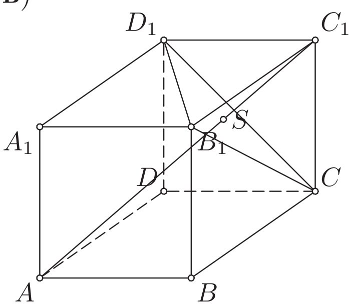
Праве AB_1 и BC_1 су мимоилазне. Како је $AD_1 \parallel BC_1$, следи да је угао између мимоилазних правих AB_1, BC_1 једнак углу између правих AB_1, AD_1. Троугао $\triangle AB_1D_1$ је једнакостраничан, јер су његове ивице међусобно подударне (све три су подударне дијагонали квадрата, који представља страну коцке), па је $\measuredangle B_1AD_1 = 60^\circ$.

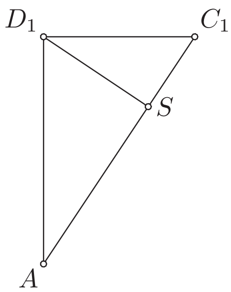
б)



Желимо да одредимо угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D. Делује да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D. Заиста, права CD_1 је управна на правој C_1D (дијагонале квадрата CC_1D_1D), а права B_1C_1 је управна на равни CC_1D_1D, па је управна на правој CD_1. Дакле, $CD_1 \perp C_1D$ и $CD_1 \perp B_1C_1$, па је $CD_1 \perp AB_1C_1D$. Одавде следи да је $ACD_1 \perp AB_1C_1D$, јер раван ACD_1 садржи праву CD_1 која је управна на равни AB_1C_1D.

в)



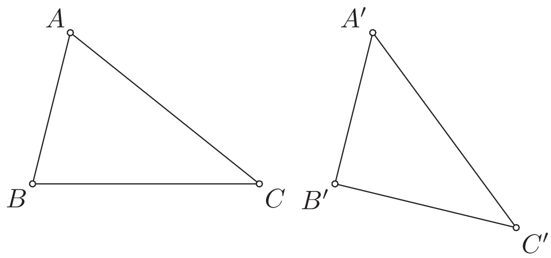


Докажимо прво да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1. Из доказа претходног дела овог задатка следи да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D, па је управна на правој AC_1. Дакле, $AC_1 \perp CD_1$. Такође, права B_1D_1 је управна на равни ACC_1A_1. Заиста, $B_1D_1 \perp A_1C_1$ (дијагонале квадрата $A_1B_1C_1D_1$), а пошто је $CC_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следи да је $CC_1 \perp B_1D_1$. Дакле, $B_1D_1 \perp ACC_1A_1$, па следи да је $AC_1 \perp B_1D_1$. Према томе, из $AC_1 \perp CD_1$ и $AC_1 \perp B_1D_1$ следи да је $AC_1 \perp B_1CD_1$.

Означимо продорну тачку праве AC_1 и равни B_1CD_1 са S. Троугао $\triangle AC_1D_1$ је правоугли с правим углом код темена D_1, јер је права C_1D_1 управна на равни AA_1D_1D, па је управна и на правој AD_1. Права D_1S припада равни B_1CD_1, па следи да је $AC_1 \perp D_1S$, тј. да је D_1S висина правоуглог троугла $\triangle AC_1D_1$. Како је $\measuredangle ASD_1 = 90^\circ = \measuredangle D_1SC_1$ и $\measuredangle SAD_1$ и $\measuredangle SD_1C_1$ имају нормалне краке, па су подударни, следи да су троуглови $\triangle ASD_1$ и $\triangle D_1SC_1$ слични. Дакле, $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{AD_1}{D_1C_1}$. Ако је a ивица коцке, онда је $AD_1 = a\sqrt{2}$ и $D_1C_1 = a$, па је $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$. Следи да је $\frac{AS}{SC_1} = \frac{AS}{D_1S} \cdot \frac{SD_1}{SC_1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, тј. $AS : SC_1 = 2 : 1$, што је и требало доказати.

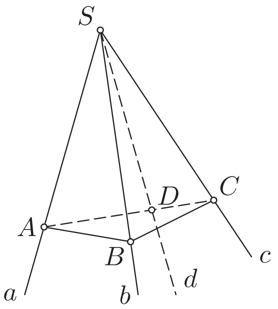
За решавање наредног задатка, потребан је следећи став.

Став 5. *Нека су* $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ *троуглови такви да је* $AB = A'B'$ *и* $AC = A'C'$. *Тада је* $BC > B'C'$ *ако и само ако је* $\measuredangle BAC > \measuredangle B'A'C'$.



2. Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.

Решење:

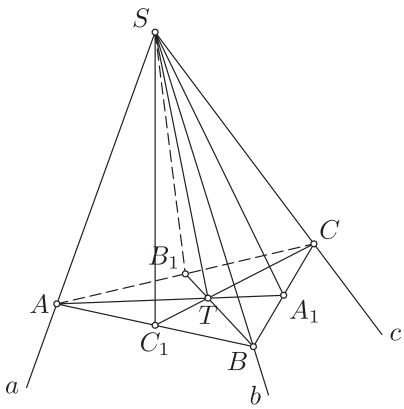


Нека је $Sabc$ триедар. Треба доказати да је $\measuredangle aSb + \measuredangle bSc > \measuredangle aSc$. Ако је $\measuredangle bSc \geq \measuredangle aSc$ неједнакост је тривијално испуњена. Претпоставимо зато да је $\measuredangle bSc < \measuredangle aSc$ и нека је Sd полуправа која припада углу $\measuredangle aSc$ таква да је $\measuredangle dSc = \measuredangle bSc$. Нека су B, C произвољне тачке полуправих Sb, Sc редом, различите од тачке S. Нека је D тачка полуправе Sd таква да је $SD = SB$ и нека је A пресечна тачка полуправе Sa и праве CD. Троуглови $\triangle SCB$ и $\triangle SCD$ су подударни, јер је $SC = SC$, $\measuredangle CSD = \measuredangle CSB$ и $SD = SB$. Следи да је $CD = CB$. Из једнакости $AC = AD + DC$, неједнакости троугла $AC < AB + BC$ и претходно добијене једнакости $DC = BC$ следи да је $AD < AB$. Троуглови $\triangle SAB$ и $\triangle SAD$ имају подударне ивице са заједничким теменом S ($SA = SA$ и $SB = SD$), па пошто је $AB > AD$, на основу става 5 следи да је $\measuredangle ASB > \measuredangle ASD$. Према томе, добијамо да важи

$$\measuredangle aSb + \measuredangle bSc = \measuredangle ASB + \measuredangle BSC > \measuredangle ASD + \measuredangle DSC = \measuredangle ASC = \measuredangle aSc.$$

3. Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.

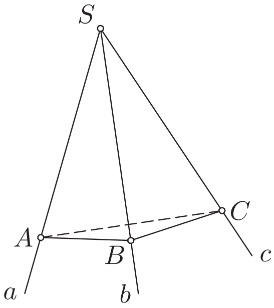
Решење:



Нека је $Sabc$ триедар. Нека A произвољна тачка полуправе Sa, која је различита од тачке S и нека су B, C редом тачке полуправих Sb, Sc такве да је $SB = SC = SA$. Тада су троуглови $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SAC$ једнакокраки. Ако су C_1, A_1, B_1 редом средишта дужи AB, BC, AC, онда су полуправе SC_1, SA_1, SB_1 бисектрисе углова $\measuredangle ASB, \measuredangle BSC, \measuredangle ASC$, односно страна триедра $Sabc$. Према томе, равни које садрже ивицу триедра и симетралу наспрамне стране јесу равни SAA_1, SBB_1, SCC_1. С обзиром на то да су AA_1, BB_1, CC_1 тежишне дужи троугла $\triangle ABC$, следи да се секу у једној тачки и означимо ту тачку са T. Према томе, равни SAA_1, SBB_1, SCC_1 садрже тачке S, T, па стога садрже и праву ST. Дакле, права ST је заједничка за све три равни, што је и требало доказати.

4. Нека су углови при врху триедра једнаки редом $60°, 45°, 45°$. Доказати да је диедар наспрам највеће странице прав.

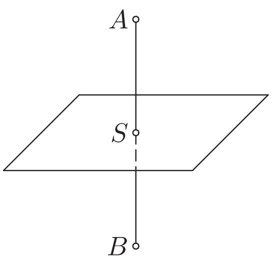
Решење:



Нека је $Sabc$ триедар такав да је $\measuredangle aSb = \measuredangle bSc = 45°$ и $\measuredangle aSc = 60°$. Треба доказати да је диедар овог триедра, чија ивица садржи полуправу Sb и чије су пљосни полуравни које садрже странице $\measuredangle aSb$ и $\measuredangle bSc$ тог триедра, прав диедар. Нека је B произвољна тачка полуправе Sb, различита од тачке S и нека су тачке A, C редом пресечне тачке полуправих Sa, Sc са равни која је у тачки B управна на полуправој Sb. Тада је $\measuredangle ABC$ нагибни угао посматраног диедра, па треба доказати да је $\measuredangle ABC = 90°$.

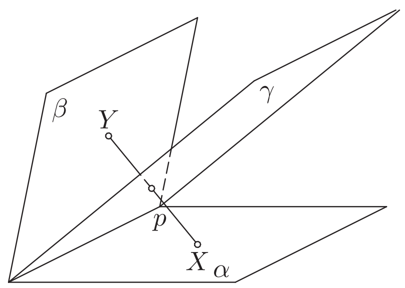
Означимо $SB = x$. Троуглови $\triangle SBA, \triangle SBC$ су једнакокрако правоугли, јер им је један од оштрих углова $45°$, па следи да је $BA = BC = x$ и $SA = SC = x\sqrt{2}$. Троугао $\triangle SAC$ је једнакостраничан, јер је $SA = SC$ и $\measuredangle ASC = 60°$. Следи да је и $AC = x\sqrt{2}$, па су странице троугла $\triangle ABC$ редом $AB = x, BC = x, AC = x\sqrt{2}$. Одавде следи да је у питању правоугли троугао, тј. да је $\measuredangle ABC = 90°$.

Дефиниција 42. Нека је AB дуж. Раван која садржи средиште S дужи AB и управна је на правој AB назива се *медијалном равни* или *симетралном равни* дужи AB.



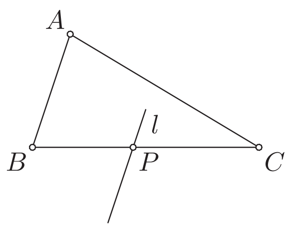
Теорема 32. *Нека је AB дуж. Скуп свих тачака X у простору таквих да важи $XA = XB$ јесте медијална раван дужи AB.*

Теорема 33. *Нека је* $\measuredangle \alpha p \beta$ *диедарска површ и нека је* $p\gamma$ *полураван с рубом* p. *Тада полураван* $p\gamma$ *припада диедру* $\measuredangle \alpha p \beta$ *ако и само ако за сваке две тачке* X, Y *које припадају пљоснима* $p\alpha, p\beta$ *тог диедра важи да* $p\gamma$ *сече дуж* XY.



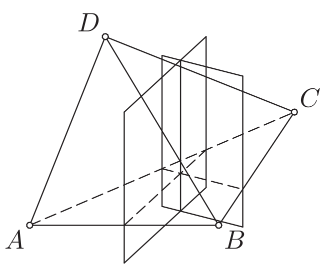
За решење наредног задатка користи се и Пашова аксиома.

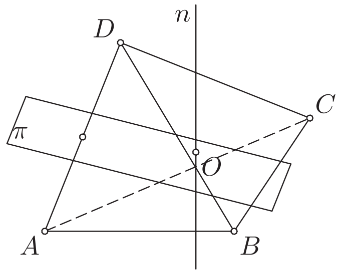
Аксиома (Паш)**.** *Нека су* A, B, C *три неколинеарне тачке и* l *права равни* ABC *која не садржи тачку* A *и сече праву* BC *у тачки* P *таквој да важи* $\mathcal{B}(B, P, C)$. *Тада она сече праву* CA *у тачки* Q *таквој да важи* $\mathcal{B}(C, Q, A)$ *или сече праву* AB *у тачки* R *таквој да важи* $\mathcal{B}(A, R, B)$.



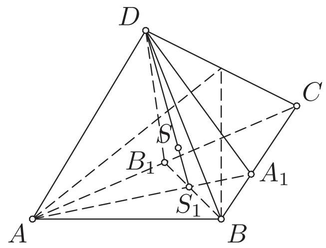
5. Доказати да се око сваког тетраедра може описати сфера, као и да се у сваки тетраедар може уписати сфера.

Решење:





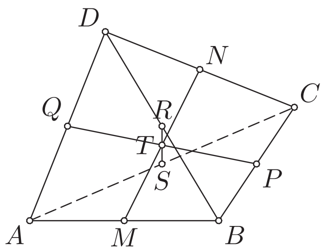
Нека је $ABCD$ тетраедар. Потребно је доказати да постоји тачка O таква да је $OA = OB = OC = OD$. На основу теореме 32, та тачка мора припадати медијалним равнима ивица AB, BC, AC, AD, BD, CD тетраедра $ABCD$. За почетак, докажимо да се медијалне равни ивица AB, AC секу. Ако се оне не би секле, биле би паралелне, па би онда праве AB, AC биле паралелне, јер су управне на паралелним равнима. Тада би тачке A, B, C биле колинеарне, што није могуће. Дакле, медијалне равни ивица AB, AC секу се по правој n. За сваку тачку X праве n важи $XA = XB$ и $XA = XC$, па следи да права n припада и медијалној равни ивице BC. На правој n треба пронаћи тачку O такву да је $OA = OD$, тј. треба проверити да ли се медијална раван π ивице AD и права n секу. Ако то не би био случај, онда би права n и раван π биле паралелне. У равни π би онда постојала права n' паралелна правој n, па пошто је $\pi \perp AD$, било би $n' \perp AD$, па и $n \perp AD$. Све праве које садрже тачку A и управне су на правој n припадају равни која садржи тачку A и управна је на правој n, што је раван ABC. Према томе, следило би да права AD припада равни ABC, тј. да су тачке A, B, C, D компланарне, што није тачно. Дакле, раван π и права n се секу у тачки O. Пошто тачка O припада равни π, следи да је $OA = OD$, а пошто припада правој n, следи да је $OA = OB = OC$, па следи да је тачка O центар описане сфере.



Центар уписане сфере је тачка S таква да је $SA' = SB' = SC' = SD'$, где су A', B', C', D' редом подножја управних из тачке S на странама BCD, ACD, ABD, ABC тетраедра $ABCD$. На основу теореме 27, таква тачка припада симетралним полуравнима диедара које чине стране тог тетраедра, па је довољно доказати да оне имају заједничку тачку. Симетрална полураван диедра чија је ивица AD и симетрална полураван диедра чија је ивица BD имају заједничку тачку D, па се секу по полуправој Dn. За сваку тачку X полуправе Dn важи $XC' = XB'$ и $XC' = XA'$, где су C', B', A' редом подножја управних из X на странама ABD, ACD, BCD тетраедра $ABCD$, па следи да полуправа Dn припада и симетралној полуравни диедра чија је ивица CD. Штавише, полуправа Dn продире раван ABC у тачки која припада унутрашњости троугла $\triangle ABC$. Заиста, на основу теореме 33, симетрална полураван диедра чија је ивица AD сече ивицу BC тетраедра $ABCD$, јер тачка B припада једној пљосни, а тачка C другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са A_1. Слично, симетрална полураван диедра чија је ивица BD сече ивицу AC тетраедра $ABCD$, јер тачка A припада једној пљосни, а тачка C другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са B_1. У равни ABC налазе се троугао $\triangle AA_1C$ и права BB_1 која сече праву AC у тачки B_1 таквој да важи $\mathcal{B}(A, B_1, C)$ и праву CA_1 у тачки B таквој да важи $\mathcal{B}(C, A_1, B)$. На основу Пашове аксиоме следи да се праве BB_1, AA_1 секу у тачки S_1 таквој да важи $\mathcal{B}(A, S_1, A_1)$. Слично, у равни ABC се налазе троугао $\triangle BB_1C$ и права AA_1 која сече праву BC у тачки A_1 таквој да важи $\mathcal{B}(B, A_1, C)$ и сече праву CB_1 у тачки A таквој да важи $\mathcal{B}(C, B_1, A)$. На основу Пашове аксиоме следи да се праве BB_1, AA_1 секу (тачка пресека је S_1) таквој да важи $\mathcal{B}(B, S_1, B_1)$. Дакле, тачка S_1 припада унутрашњости троугла $\triangle ABC$ и припада полуправима AA_1, BB_1, па припада и симетралним полуравнима диедара чије су ивице AD, BD. Како је полуправа Dn пресек тих симетралних полуравни, следи да $S_1 \in Dn$. Уочимо симетралну раван диедра чија је ивица AB. Тачка D припада једној, а тачка S_1 припада другој пљосни тог диедра, па на основу теореме 33 следи да та симетрална полураван сече дуж DS_1 у тачки S. Пошто тачка S припада симетралној полуравни диедра чија је ивица AB, следи да је $SD' = SC'$, где су D', C' редом подножја управних из тачке S на странама ABC, ABD, а пошто припада и полуправој Dn, важи $SA' = SB' = SC'$, где су A', B' редом подножја управних из тачке S на странама BCD, ACD, па следи да је тачка S центар уписане сфере тетраедра $ABCD$.

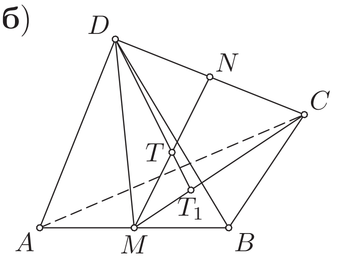
6. а) (**Тежиште тетраедра**) Дужи одређене средиштима наспрамних ивица тростране пирамиде (тетраедра) секу се у једној тачки која их полови. Доказати.
б) Доказати да тежиште тетраедра дели дужи одређене теменима и тежиштима наспрамних страна у односу $3:1$.

Решење: а)



Нека је $ABCD$ тетраедар и нека су M, N, P, Q, R, S редом средишта његових ивица AB, CD, BC, AD, BD, AC. Треба доказати да се дужи MN, PQ, RS секу у једној тачки која их све полови. Дуж MQ је средња линија троугла $\triangle ABD$, па следи да је $MQ \parallel BD$ и $MQ = \frac{1}{2}BD$. Слично, дуж PN је средња линија троугла $\triangle BCD$, па следи да је $PN \parallel BD$ и $PN = \frac{1}{2}BD$. Дакле, $MQ \parallel PN$ и $MQ = PN$, па закључујемо да су тачке M, P, N, Q компланарне и да је четвороугао $MPNQ$ паралелограм. Према томе, његове дијагонале MN, PQ имају заједничко средиште, које ћемо означити са T. Дуж PR је средња линија троугла $\triangle BCD$, па следи да је $PR \parallel CD$ и $PR = \frac{1}{2}CD$. Такође, дуж SQ је средња линија троугла $\triangle ACD$, па следи да је $SQ \parallel CD$ и $SQ = \frac{1}{2}CD$. Дакле, $PR \parallel SQ$ и $PR = SQ$, па закључујемо да су тачке P, R, Q, S компланарне и да је четвороугао $PRQS$ паралелограм. Према томе, његове дијагонале PQ, RS имају заједничко средиште. С обзиром на то да је тачка T средиште дужи PQ, а дуж има јединствено средиште, следи да је тачка T заједничко средиште дужи PQ, RS. Према томе, све три дужи имају заједничку тачку T која их полови, што је и требало доказати.

б)



Нека је T_1 тежиште троугла $\triangle ABC$. Треба доказати да важи распоред $\mathcal{B}(D,T,T_1)$ и $DT : TT_1 = 3 : 1$. Уочимо раван MCD. Та раван садржи тачку N, јер је она средиште дужи CD, па садржи и тачку T, јер је она средиште дужи MN. Такође, та раван садржи тачку T_1 јер она припада тежишној дужи CM троугла $\triangle ABC$. Да бисмо доказали колинеарност тачака D, T, T_1, применимо Менелајеву теорему на троугао $\triangle MCN$. Пошто је $\frac{\overrightarrow{MT_1}}{\overrightarrow{T_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NT}}{\overrightarrow{TM}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot \frac{1}{1} = -1$, следи да су тачке D, T, T_1 колинеарне. Применимо поново Менелајеву теорему, али сада на троугао $\triangle DT_1C$ и колинеарне тачке M, T, N. Следи да је

$$-1 = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{T_1M}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{ND}} = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1},$$

па је $\frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} = 3$. Следи да важи $\mathcal{B}(D,T,T_1)$ и $DT : TT_1 = 3 : 1$, што је и требало доказати.

Дефиниција 43. Тачка T из претходног задатка назива се *тежиште* тетраедра $ABCD$.