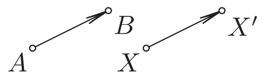
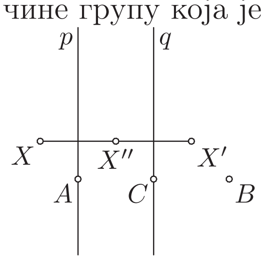
Слично појму осе симетрије неке фигуре, постоји и појам центра симетрије фигуре.

Дефиниција 30. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α. Кажемо да је тачка S *центар симетрије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_S(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар један центар симетрије, онда је она *централносиметрична*.

Дефиниција 31. Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α. Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



Транслација не представља ништа друго него праволинијско кретање у одређеном смеру. Није тешко доказати да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ и $\mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{-\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, транслације (заједно са коинциденцијом) чине групу која је подгрупа групе изометрија.



Нека је p права која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је q права која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB. Јасно, тада је $p \parallel q$. Није тешко доказати да важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју осних рефлексија. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, тј. уместо правих p, q можемо посматрати праве p', q' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од праве p' ка правој q' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

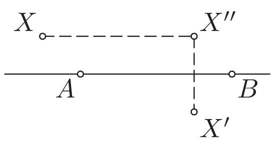
Транслација је директна изометрија. То можемо видети директно из дефиниције (померањем у правцу неког вектора не мења се оријентација равни), а можемо видети и из чињенице да се транслација представља као композиција двеју осних рефлексија. Што се тиче фиксних тачака, важи следеће. Ако је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, тј. ако је у питању коинциденција, све тачке равни α су фиксне, а ако је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, онда је $X' \neq X$ за сваку тачку X равни α, тј. ниједна тачка није фиксна.

Теорема 18. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α.*

Теорема 19 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је* $\overrightarrow{AB}$ *произвољан вектор у равни* α*,* $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ *транслација и* $\mathfrak{I}$ *произвољна изометрија равни* α*. Ако је* $A' = \mathfrak{I}(A)$ *и* $B' = \mathfrak{I}(B)$*, онда је* $\mathfrak{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{A'B'}}$*.*

Испоставља се да постоји само још један тип изометрија равни. Наиме, видели смо како изгледају изометрије равни које су композиције двеју осних рефлексија, у зависности од узајамног положаја оса тих рефлексија. На основу теореме 13 преостаје само још случај кад је изометрија равни композиција трију осних рефлексија. На основу теореме 14, ако су осе тих рефлексија праве једног прамена, композиција је поново рефлексија, а ако нису, онда је у питању следећа изометрија.

Дефиниција 32. Нека је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ненула вектор равни α. Пресликавање $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ назива се *клизајућом рефлексијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$ у односу на праву AB.



Клизајућа рефлексија је, као што јој само име каже, композиција транслације („клизања”) и осне рефлексије. При томе, вектор $\overrightarrow{AB}$ мора бити паралелан оси рефлексије. Најчешће се узима онај представник вектора чије тачке припадају оси рефлексије, чиме се ознака клизајуће рефлексија значајно олакшава (није неопходно посебно означити осу и вектор). Ово је једна индиректна изометрија равни, јер је композиција директне и индиректне изометрије, те мења оријентацију равни. Такође, клизајућа рефлексија нема фиксних тачака.

Теорема 20. *Ако индиректна изометрија* $\mathfrak{I}$ *равни* α *нема фиксних тачака, онда је* $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$*, где је* $\overrightarrow{AB}$ *неки ненула вектор равни* α*.*

Теорема 21 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је* $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ *ненула вектор равни* α*,* $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$ *клизајућа рефлексија и* $\mathfrak{I}$ *произвољна изометрија равни* α*. Ако је* $A' = \mathfrak{I}(A)$ *и* $B' = \mathfrak{I}(B)$*, онда је* $\mathfrak{I} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{A'B'}}$*.*

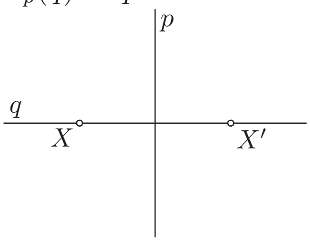
Код клизајуће рефлексије транслација и рефлексија комутирају, тј. није битно да ли ћемо прво извршити транслацију, па онда рефлексију, или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB}$. Транслација се разбија на две осне рефлексије чије су осе нормалне на AB, па следи да је клизајућа рефлексија композиција трију осних рефлексија чије осе не припадају једном прамену. Тај положај правих је веома специфичан (две су паралелне, а трећа је управна на њима). Испоставља се да је композиција трију осних рефлексија чије осе не припадају једном прамену увек клизајућа рефлексија, без обзира на међусобни њихов положај.

Што се инверза клизајуће рефлексије тиче, једноставно се види да је $\mathcal{G}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \left(\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}\right)^{-1} = \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}^{-1}_{AB} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, клизајућа рефлексија није инволуција.

1. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.

Решење: Почетна једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$. На основу теореме 12 (теореме о трансмутацији), с обзиром на то да је $\mathcal{S}_p^{-1} = \mathcal{S}_p$, следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}$, па је полазна једнакост еквивалентна с једнакошћу $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)} = \mathcal{S}_q$. Две осне рефлексије су једнаке ако и само ако су им осе исте, према томе, последња једнакост је еквивалентна са $\mathcal{S}_p(q) = q$. Доказаћемо да је $\mathcal{S}_p(q) = q$ еквивалентно са $p = q \vee p \perp q$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $p = q$. Пошто се све тачке праве p сликају у себе, следи да се и права p слика у себе, тј. да је $\mathcal{S}_p(p) = p$. Пошто је $p = q$, следи да је $\mathcal{S}_p(q) = q$.



Нека је $p \perp q$ и нека је $X \in q$ произвољна. Ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X \in q$. Нека $X \notin p$. Тада је $\mathcal{S}_p(X) = X'$ и p је медијатриса дужи XX'. Дакле, $p \perp XX'$. Такође, $p \perp q$ и $X \in q$, па следи да се праве XX' и q поклапају. Самим тим, $X' \in q$. Према томе, $\mathcal{S}_p(q) \subseteq q$. Пошто је $\mathcal{S}_p$ инволуција, следи да је $q \subseteq \mathcal{S}_p(q)$, па је $\mathcal{S}_p(q) = q$.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $\mathcal{S}_p(q) = q$ и $p \neq q$. Пошто је $p \neq q$, онда постоји тачка X која припада q и не припада p. Нека је $\mathcal{S}_p(X) = X'$. Тада је p медијатриса дужи XX', па је $p \perp XX'$. Такође, из $\mathcal{S}_p(q) = q$ следи да $X' \in q$, па су праве q и XX' исте. Дакле, следи да је $p \perp q$.

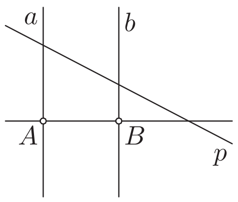
Напомена 10. Претходни задатак нам говори да две осне рефлексије комутирају ако и само ако су им осе идентичне или међусобно нормалне. Како је $(\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, закључујемо да две осне рефлексије комутирају ако и само ако је њихова композиција инволуција. Од директних изометрија, инволуције су само коинциденција и централна симетрија, а оне се добијају управо у случајевима $p = q$ и $p \perp q$ редом.

2. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.

Решење: $\boxed{\Longleftarrow}$: Нека су p, q, r праве једног прамена. Тада је, на основу теореме 14, пресликавање $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осна рефлексија. Дакле, $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$. Осна рефлексија је инволуција, па је $\mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{S}_s$. Како је $\mathcal{S}_s^{-1} = (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} \circ \mathcal{S}_r^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$, следи да важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Означимо $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Тада је $\mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathfrak{I}$, тј. $\mathfrak{I}$ је инволуција. Такође, $\mathfrak{I}$ је индиректна изометрија, па не може бити клизајућа рефлексија, јер клизајућа рефлексија није инволуција. Према томе, $\mathfrak{I}$ је осна рефлексија, тј. $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ је осна рефлексија. На основу теореме 14 следи да праве p, q, r припадају једном прамену, што је и требало доказати.

3. Доказати: $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$.

Решење:



Нека је a права која је нормална на правој AB у тачки A, а нека је b права која је нормална на правој AB у тачки B. Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$. Дакле,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A &= \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} \qquad \text{и} \\ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B &= \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}. \end{aligned}$$

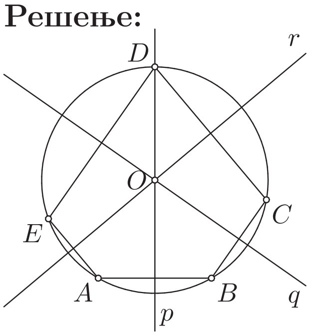
Према томе, једнакост $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$, што важи ако и само ако важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$. На основу 2. задатка, ово важи ако и само ако праве a, p, b припадају једном прамену. Пошто су a, b управне на правој AB, следи да тај прамен једино може бити прамен паралелних правих, према томе, важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$ ако и само ако је $p \parallel a \parallel b$. Пошто је $a \perp AB$ и $b \perp AB$, ово је еквивалентно са $AB \perp p$, што је и требало доказати.

4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централносиметрична.

Решење: Нека су праве p, q једине осе симетрије фигуре Φ. Тада је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$ и $\mathcal{S}_q(\Phi) = \Phi$. Такође, права $\mathcal{S}_p(q)$ је оса симетрије фигуре Φ, јер је $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}(\Phi) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Пошто нема других оса симетрије сем правих p, q, следи да је $\mathcal{S}_p(q) = p$ или $\mathcal{S}_p(q) = q$. Прва једнакост не може да важи, јер би тада било $q = \mathcal{S}_p(p) = p$, а праве p, q се разликују. Дакле, $\mathcal{S}_p(q) = q$. На основу првог задатка следи да је $p = q$ или $p \perp q$. Пошто није $p = q$, следи да је $p \perp q$. Нека је O пресечна тачка правих p, q. Тада је $\mathcal{S}_O(\Phi) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$, па следи да је тачка O центар симетрије фигуре Φ. Дакле, фигура Φ је централносиметрична.

5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси странице AB.

Решење:



Нека је O центар круга и нека су p, q, r редом медијатрисе страница AB, BC, CD. Како је O једнако удаљена од свих темена петоугла (јер темена петоугла припадају кругу с центром O), следи да O припада медијатрисама p, q, r, па су то праве једног прамена. Такође, како је $q \perp BC$ и $BC \parallel DE$, следи да је $q \perp DE$, а пошто је $OD = OE$ и $O \in q$, следи да је q медијатриса и странице DE. Слично, како је $r \perp CD$ и $CD \parallel EA$, следи да је $r \perp EA$, а пошто је $OE = OA$, следи да је r медијатриса и странице EA.

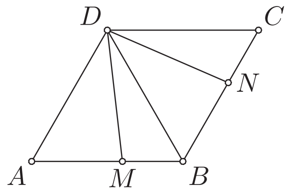
Посматрајмо изометрију $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q$. Важи да је

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(D) &= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(D) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r(E) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(A) \\
&= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(B) = \mathcal{S}_r(C) = D.
\end{aligned}$$

Такође, пошто p, q, r припадају једном прамену, на основу 2. задатка следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p$, па је $D = \mathfrak{I}(D) = \mathcal{S}_p(D)$. Одавде следи да $D \in p$.

6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\measuredangle BAD = 60^\circ$ и нека права p сече редом странице AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.

Решење:

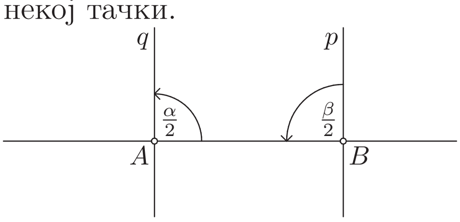


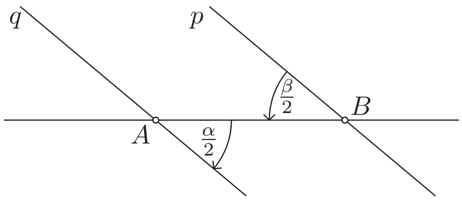
Важи $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(A) = B$ и $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(B) = C$. Дакле, ротацијом око D за 60° се дуж AB слика у дуж BC. Пошто је $BM + BN = AB$ и $BM = AB - AM$, па је $AB - AM + BN = AB$, следи да је $AM = BN$. Нека је $M' = \mathcal{R}_{D,60^\circ}(M)$. Следи да важи $AM = BM'$, па следи $BN = BM'$. Тачке N, M' су између тачака B, C и на истом растојању од B, па следи да је $M' = N$, тј. да је $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(M) = N$. Одавде следи да је троугао $\triangle DMN$ једнакостраничан, јер је $DM = DN$ и $\measuredangle MDN = 60^\circ$.

7. Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$.

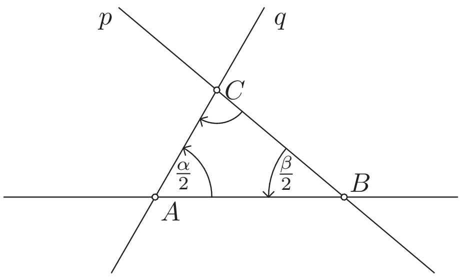
Решење: Нека су $\alpha, \beta \in [-180^\circ, 180^\circ]$. Ако је $A = B$, онда важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{A,\alpha+\beta}$, ако је $\alpha+\beta \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, односно $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{E}$, ако је $\alpha + \beta \in \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$. Претпоставимо да је $A \neq B$.

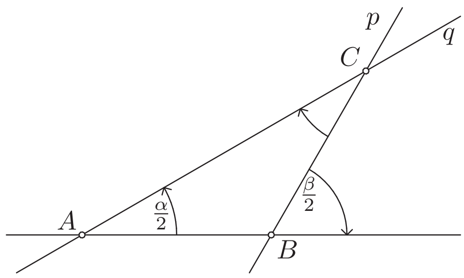
Нека је p права која садржи тачку B таква да је оријентисани угао од p ка AB једнак $\frac{\beta}{2}$ и нека је q права која садржи тачку A таква да је оријентисани угао од AB ка q једнак $\frac{\alpha}{2}$. Тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. У зависности од углова α, β, праве p, q могу бити паралелне или се сећи у некој тачки.





Углови $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ су оштри или прави и могу бити произвољне оријентације, односно $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Ако су углови α, β исте оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ прави углови, тј. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \pm 180^\circ$. Ако су α, β супротне оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ подударни, тј. $\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{2}$. Дакле, $p \parallel q$ ако и само ако $\alpha + \beta \in \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$ и тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BC}}$, где је C подножје управне из B на правој q.





Ако $\alpha+\beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, онда се p, q секу у некој тачки C. Оријентисани угао $\measuredangle BCA$ представља оријентисани угао од праве p ка правој q. Ако су α, β исте оријентације, они су унутрашњи углови троугла $\triangle ABC$, тј. $\measuredangle BAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle CBA = \frac{\beta}{2}$. Угао $\measuredangle BCA$ је супротне оријентације од углова $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$, па је $-\measuredangle BCA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - 180°$ и $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C,2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta-360°}$. Нека су α, β супротне оријентације и нека су α', β' неоријентисани углови подударни угловима α, β редом. Како се p и q секу, један од њих је већи од другог, јер би иначе било $p \parallel q$. Без умањења општости, нека је $\beta' > \alpha'$. Тада је угао $\frac{\beta}{2}$ спољашњи угао троугла $\triangle ABC$ и исте оријентације као угао $\measuredangle BCA$, па је $\frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \measuredangle BCA$. Према томе, $\measuredangle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{C,2\measuredangle BCA} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$.

Напомена 11. Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi-360°}$. Према томе, у решењу претходног задатка, у случају да $\alpha+\beta \notin \{0°, \pm 360°\}$ важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$ и ако су α, β исте оријентације и ако су α, β супротне оријентације.

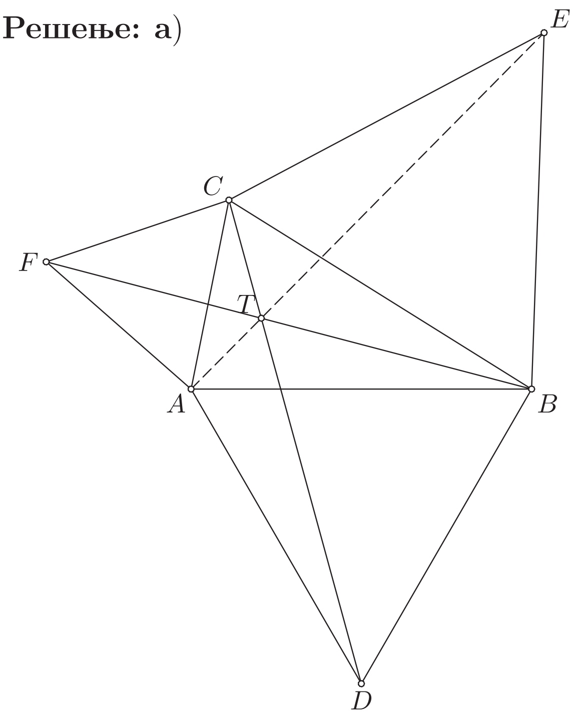
Напомена 12. Дакле, доказали смо да ако важи $\alpha+\beta \notin \{0°, \pm 360°\}$, композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ је ротација за угао $\alpha+\beta$, а ако важи $\alpha+\beta \in \{0°, \pm 360°\}$, онда је композиција ротација $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$ транслација ако је $A \neq B$, односно коинциденција ако је $A = B$.

8. Над ивицама оштроуглог троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB, BEC, CFA.

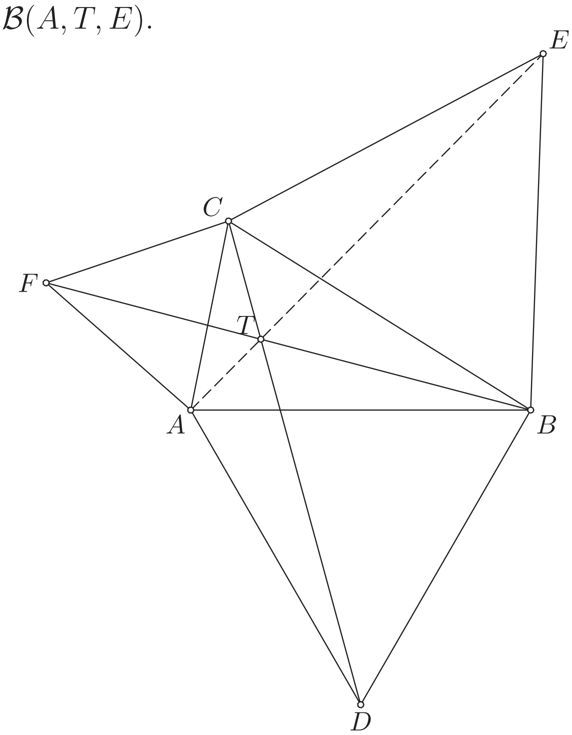
а) (**Торичелијева тачка**) Доказати да су дужи AE, BF, CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки.

б) (**Наполеонов троугао**) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.

Решење: а)



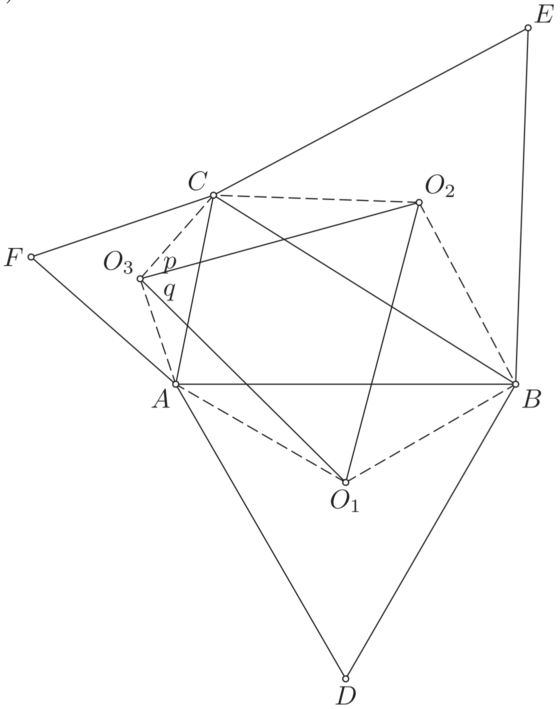
Приметимо да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(D) = B$ и $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(C) = F$. Према томе, следи да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(DC) = BF$, што значи да се дуж DC слика у дуж BF, па су ове дужи подударне. Такође, права DC се слика у праву BF и угао између њих је 60° (сетимо се да је угао између праве и њене слике при ротацији за угао φ једнак управо φ). Нека је њихов пресек тачка T. Треба доказати да тачка T припада дужима DC, BF. Како је $\measuredangle BAC < 90^\circ$, следи да је $\measuredangle DAC = \measuredangle DAB + \measuredangle BAC < 60^\circ + 90^\circ < 180^\circ$, а како је и $\measuredangle DAB = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, B \doteqdot DA$. Слично, $\measuredangle DBC < 180^\circ$, а како је и $\measuredangle DBA = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, A \doteqdot DB$. То значи да тачка C припада углу $\measuredangle ADB$, па следи да полуправа DC сече дуж AB. Другим речима, $A, B \div CD$. То значи и да полуправа CD припада углу $\measuredangle ACB$, па је $\measuredangle DCA < \measuredangle BCA < 90^\circ$ и $\measuredangle DCF < 90^\circ + 60^\circ < 180^\circ$. Следи да важи $A, F \doteqdot CD$, а како важи $A, B \div CD$, онда важи $B, F \div CD$, односно права CD сече дуж BF. Сличним поступком се доказује и да важи $C, D \div BF$, па права BF сече дуж CD. Овим је доказано да је тачка T у пресеку дужи CD, BF. Треба такође доказати да су тачке A, T, E колинеарне и да важи $\mathcal{B}(A, T, E)$. Пошто важи $\mathcal{B}(C, T, D)$, довољно је доказати да је $\measuredangle ATD = \measuredangle ETC$, јер ће тада то бити унакрсни углови, па ће важити $\mathcal{B}(A, T, E)$.



Због ротације важи $\measuredangle DTB = 60°$, па је $\measuredangle BTC = 120°$. Такође, важи $\measuredangle DAB = 60°$, па следи да су $\measuredangle DTB$ и $\measuredangle DAB$ периферијски углови над DB, тј. да је четвороугао $DBTA$ тетиван. Одавде следи да је $\measuredangle ATD = \measuredangle ABD = 60°$. Поред тога, $\measuredangle BEC = 60°$, па је $\measuredangle BTC + \measuredangle BEC = 180°$, па је и четвороугао $BECT$ тетиван. Одавде следи да је $\measuredangle ETC = \measuredangle EBC = 60°$. Дакле, $\measuredangle ATD = \measuredangle ETC$, па следи да су то унакрсни углови, па важи $\mathcal{B}(A, T, E)$, тј. да тачка T припада дужи AE.

Остаје још да се докаже да је $AE = BF = CD$. Већ смо добили $BF = CD$, па остаје да се докаже да је, нпр, $AE = BF$. Међутим, то добијамо на сличан начин као и претходну једнакост. Пошто је $\mathcal{R}_{C,60°}(F) = A$ и $\mathcal{R}_{C,60°}(B) = E$, следи да је $\mathcal{R}_{C,60°}(FB) = AE$, па су и те дужи једнаке, што је и требало доказати.

б)



Означимо центре троуглова $\triangle ADB, \triangle BEC, \triangle CFA$ редом са O_1, O_2, O_3. Посматрајмо изометрију $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ}$. Она је директна, јер је композиција трију директних изометрија. На основу напомене 12, важи $\mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{R}_{S,120^\circ+120^\circ} = \mathcal{R}_{S,240^\circ}$, за неку тачку S. На основу напомене 11, важи $\mathcal{R}_{S,240^\circ} = \mathcal{R}_{S,240^\circ-360^\circ} = \mathcal{R}_{S,-120^\circ}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{S,-120^\circ}$. Како је $120^\circ + (-120^\circ) = 0^\circ$, изометрија $\mathfrak{I}$ мора бити коинциденција или транслација. Пошто је

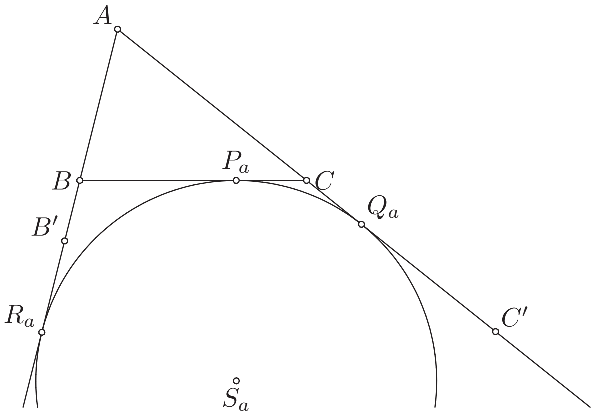
$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(C) &= \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ}(C) = \mathcal{R}_{O_3,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1,120^\circ}(B) \\ &= \mathcal{R}_{O_3,120^\circ}(A) = C,\end{aligned}$$

следи да изометрија $\mathfrak{I}$ има фиксну тачку, па не може бити транслација. Дакле, $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. То значи да је $\mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{R}^{-1}_{O_3,120^\circ} = \mathcal{R}_{O_3,-120^\circ}$. Нека је p права која садржи тачку O_2 и гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ с правом O_1O_2 и нека је q права која садржи тачку O_1 таква да права O_1O_2 гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ са правом q. Тада је $\mathcal{R}_{O_3,-120^\circ} = \mathcal{R}_{O_1,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2,120^\circ} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Следи да тачка O_3 припада правима p, q, па је $\measuredangle O_3O_2O_1 = 60^\circ$ и $\measuredangle O_2O_1O_3 = 60^\circ$. Дакле, троугао $\triangle O_1O_2O_3$ има два угла од 60°, па је он једнакостраничан троугао, што је и требало доказати.

Дефиниција 33. Тачка T из претходног задатка назива се *Торичелијева тачка.* Троугао $\triangle O_1O_2O_3$ назива се *Наполеонов троугао.*

9. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A,B,B')$ и $\mathcal{B}(A,C,C')$. Ако је P_a тачка у којој споља уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'}$. Видимо да је $\mathfrak{I}$ директна изометрија, јер је композиција трију директних изометрија. Да бисмо доказали да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{P_a}$, докажимо најпре да је P_a фиксна тачка изометрије $\mathfrak{I}$. Нека су Q_a, R_a тачке из Великог задатка. Тангентне дужи BP_a, BR_a су једнаке и важи $\measuredangle P_aBR_a = \measuredangle CBB'$ (оријентисани углови). Слично, важи и $AR_a = AQ_a$ и $\measuredangle R_aAQ_a = \measuredangle BAC$, као и $CQ_a = CP_a$ и $\measuredangle Q_aCP_a = \measuredangle C'CB$. Дакле,

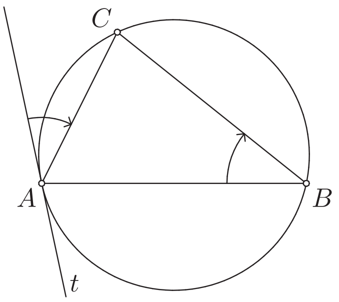
$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(P_a) &= \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'}(P_a) = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC}(R_a)\\ &= \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB}(Q_a) = P_a,\end{aligned}$$

па следи да је P_a фиксна тачка. Дакле, $\mathfrak{I}$ није транслација, па је коинциденција или ротација око тачке P_a. Означимо $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA$, $\gamma = \measuredangle ACB$ (мисли се на оријентисане углове). Пошто су (оријентисани) углови $\measuredangle CBA$ и $\measuredangle CBB'$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\measuredangle CBA + (-\measuredangle CBB') = 180^\circ$, тј. да је $\measuredangle CBB' = \measuredangle CBA - 180^\circ = \beta - 180^\circ$. Слично, пошто су (оријентисани) углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle C'CB$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\measuredangle ACB + (-\measuredangle C'CB) = 180^\circ$, па је $\measuredangle C'CB = \measuredangle ACB - 180^\circ = \gamma - 180^\circ$.

Како је $\measuredangle BAC + \measuredangle CBB' = \alpha + \beta - 180^\circ \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, на основу напомене 12 следи да је $\mathcal{R}_{A,\measuredangle BAC} \circ \mathcal{R}_{B,\measuredangle CBB'} = \mathcal{R}_{M,\alpha+\beta-180^\circ}$, за неку тачку M. Оријентисани углови α, β, γ су исте оријентације, па је $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$. Како је $\alpha+\beta-180^\circ+\measuredangle C'CB = \alpha+\beta-180^\circ+\gamma-180^\circ = \alpha+\beta+\gamma-360^\circ = 180^\circ - 360^\circ = -180^\circ \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, на основу напомене 12 следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C,\measuredangle C'CB} \circ \mathcal{R}_{M,\alpha+\beta-180^\circ} = \mathcal{R}_{P_a,-180^\circ} = \mathcal{S}_{P_a}^{-1} = \mathcal{S}_{P_a}$.

10. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A. Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Како је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} = \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_{CA} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}$, следи да је

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{R}_{B,2\measuredangle ABC} \circ \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{BA}}. \end{aligned}$$

Пошто је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$ директна изометрија и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$, на основу теореме 17 (теореме о трансмутацији), следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{R}_{A,2\measuredangle ABC}$. За тангенту t описаног круга троугла $\triangle ABC$ у тачки A важи да је оријентисани угао од праве t ка тетиви AC подударан периферијском углу над том тетивом, што је угао $\measuredangle ABC$, као и да су исте оријентације. Према томе, важи $\mathcal{R}_{A,2\measuredangle ABC} = \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t$, што је и требало доказати.