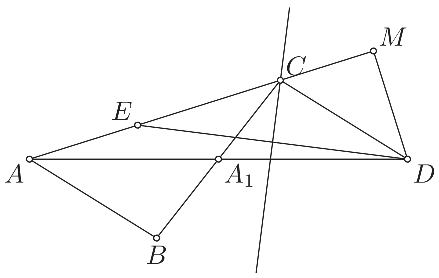
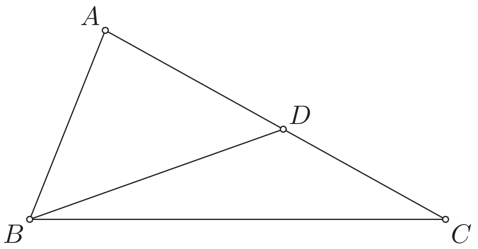


Остаје још да проверимо да ли је испуњено $\mathcal{B}(A, E, C)$. Угао $\measuredangle MED$ је оштар, јер је један од углова правоуглог троугла $\triangle MED$ који није прав ($\measuredangle EMD = \measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$ јер важи $\mathcal{B}(A, E, M)$). Следи да симетрала дужи ED сече крак EM оштрог угла $\measuredangle MED$ у тачки C таквој да важи $M, C \ddot{-} E$, па како важи $A, M \div E$, следи да важи $A, C \div E$, тј. $\mathcal{B}(A, E, C)$.

Према томе, ако је $2t_a > h_b$ и $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

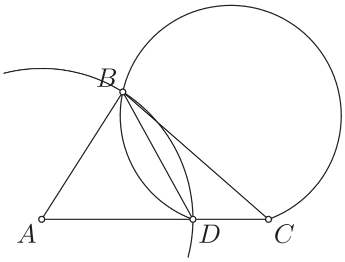
6) $\beta - \gamma, b, c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и важи $AC = b$, $AB = c$ и $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.



Како је наспрам већег угла већа страница, следи да је $AC > AB$, тј. да је $b > c$. Нека је D тачка таква да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = AB$. Тада је троугао $\triangle ABD$ једнакокрак, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = \frac{\pi - \measuredangle BAC}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$. С друге стране, угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle CBD = \varphi$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA = \gamma$. Дакле, $\frac{\beta+\gamma}{2} = \varphi + \gamma$, па је $\varphi = \frac{\beta+\gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta+\gamma-2\gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$ Дакле, $\measuredangle CBD = \frac{\beta-\gamma}{2}$, тј. дуж CD се из тачке B види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AC = b$. Означимо тачку D такву да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = c$. Конструишимо један од лукова ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$ и означимо га са l. Конструишимо круг $k(A, AD)$. Означимо са B ону пресечну тачку круга k и лука l која није тачка D.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$, као и да је $AC = b$ и $AB = c$.

ПК је $AC = b$. Тачка B припада кругу $k(A, AD)$ и ПК је $AD = c$, па је $AB = AD = c$. ПК је $\mathcal{B}(A, D, C)$, па је $AC > AD$. Због $AD = AB$ следи да је $AC > AB$, па је и $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$. Тачка B припада луку l ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$, па следи да је $\measuredangle CBD = \frac{\beta-\gamma}{2}$. С друге стране, троугао $\triangle ABD$ је једнакокрак, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = \frac{\pi - \measuredangle BAD}{2}$, а угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова, тј. $\measuredangle ADB = \measuredangle CBD + \measuredangle BCD$. Због распореда $\mathcal{B}(A, D, C)$ је $\measuredangle BAD = \measuredangle BAC$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA$. Следи да је

$$\begin{aligned}
\measuredangle CBD &= \measuredangle ADB - \measuredangle BCD = \frac{\pi - \measuredangle BAD}{2} - \measuredangle BCD \\
&= \frac{\pi - \measuredangle BAC}{2} - \measuredangle BCA = \frac{\measuredangle ABC + \measuredangle ACB}{2} - \measuredangle BCA \\
&= \frac{\measuredangle ABC + \measuredangle ACB - 2\measuredangle BCA}{2} = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2}.
\end{aligned}$$

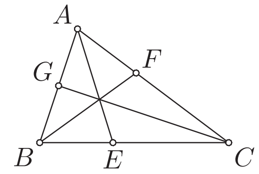
Дакле, важи $\frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$, па следи да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $b \leq c$ или $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.

Нека је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$. Све што треба проверити јесте да ли круг k и лук l осим тачке D имају још заједничких тачака. Круг k и лук l се секу само у тачки D ако и само ако центар O лука l припада дужи CD или важи $l, O \div CD$, што важи ако и само ако је угао под којим се са лука l види дуж CD прав или туп, односно ако и само ако је $\frac{\beta-\gamma}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, тј. $\beta - \gamma \geq \pi$, што није тачно.

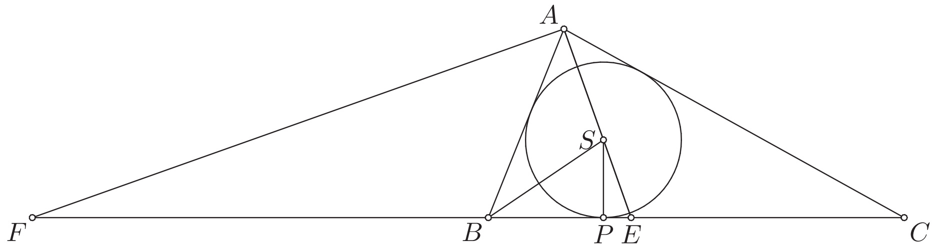
Дакле, ако је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$, онда задатак има јединствено решење до на подударност, а у осталим случајевима нема решења.

Дефиниција 22. Нека је $\triangle ABC$ троугао и нека су E, F, G редом пресечне тачке бисектриса унутрашњих углова код темена A, B, C и наспрамних страница BC, CA, AB. Дужи AE, BF, CG зову се *одсечци бисектриса унутрашњих углова* и означавају се редом са l_a, l_b, l_c.



7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$. Нека је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, нека је E пресечна тачка симетрале угла $\measuredangle BAC$ и странице BC и нека је P подножје нормале из тачке S на страници BC. Следи да је $AE = l_a$ и $SP = \rho$.

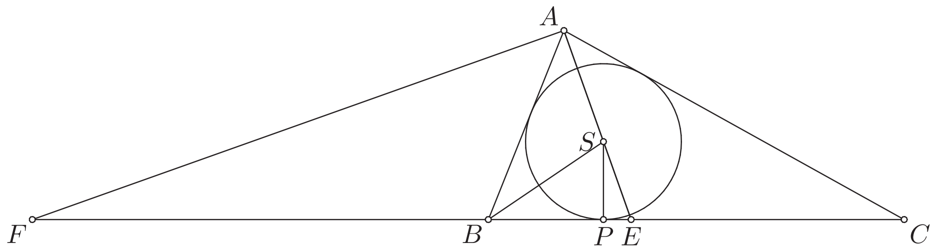


Из $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ следи да је $AC > AB$, па постоји пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и праве BC. Означимо је са F. Тада важи распоред тачака $\mathcal{B}(F, B, E, C)$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle AFB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle AFB$ и $\measuredangle FAB$, а угао $\measuredangle FAE$ је прав, јер је то угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$. Следи да је $\measuredangle FAB = \measuredangle FAE - \measuredangle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\measuredangle BAC}{2}$, па је $\measuredangle ABC = \measuredangle AFB + \measuredangle FAB = \measuredangle AFB + \frac{\pi}{2} - \frac{\measuredangle BAC}{2}$. Дакле, $\measuredangle AFB = \measuredangle ABC - \frac{\pi}{2} + \frac{\measuredangle BAC}{2} = \frac{2\measuredangle ABC - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC - \measuredangle ACB + \measuredangle BAC}{2} = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle AFE$ је $AE = l_a$, $\measuredangle AFE = \measuredangle AFB = \frac{\beta-\gamma}{2}$ и $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Како је P подножје нормале из тачке S на страници BC, тј. на правој FE и важи $SP = \rho$, следи да тачка S припада правој p која је паралелна са FE и налази се на растојању ρ од ње. При томе важи $A, S \div BC$, тј. $A, S \div FE$, па важи и $A, p \div FE$. Уписани круг $k(S, \rho)$ додирује странице AB и AC, па су праве AB и AC тангенте из тачке A на уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$. Тачке B, C су у пресеку тих тангенти и праве FE тако да важи распоред тачака $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle AFE$ такав да је $AE = l_a$, $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$ и $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$. Конструишимо праву p паралелну са FE која се налази на растојању ρ од ње и за коју важи $A, p \ddot{-} FE$. У пресеку праве p и дужи AE означимо тачку S (дакле, важи $\mathcal{B}(A, S, E)$). Конструишимо круг $k(S, \rho)$ и конструишимо тангенте из тачке A на кругу k. У пресеку тих тангенти и праве FE означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и да је $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$, затим да је одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A подударан дужи l_a и да је полупречник уписаног круга подударан дужи ρ.



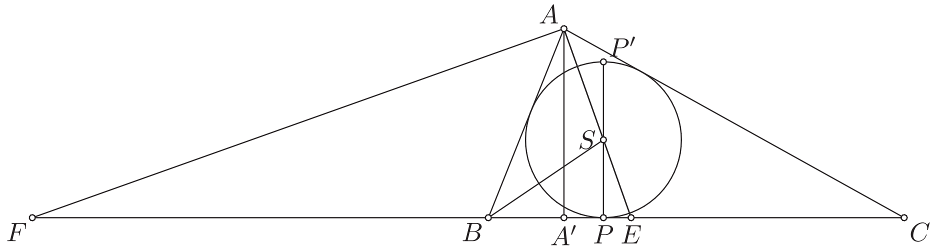
Тачка S је ПК на растојању ρ од праве FE, тј. од праве BC, па како је ПК k круг с центром у S и полупречником ρ, следи да је BC тангента круга k. ПК тачке B, C припадају тангентама круга k из тачке A, па су праве AB, AC тангенте круга k. ПК важи распоред $\mathcal{B}(B, E, C)$, па полуправа AE припада углу $\measuredangle BAC$. При томе, за тачку S са ње важи да је растојање од крака AB тог угла подударно дужи ρ, као и растојање од крака AC тог угла (јер круг $k(S, \rho)$ додирује праве AB и AC), па је полуправа AE бисектриса угла $\measuredangle BAC$. Према томе, круг k је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг који додирује страницу BC (у Великом задатку означен са $k_a(S_a, \rho_a)$). Како важи $\mathcal{B}(A, S, E)$, закључујемо да је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, па је његов полупречник ρ, што је и требало доказати,

Такође, како је полуправа AE бисектриса унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је E тачка у пресеку те бисектрисе и странице BC, па је AE одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A, а ПК је та дуж подударна дужи l_a.

Како је $\measuredangle FAE = \frac{\pi}{2}$, следи да је AF бисектриса спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ (јер је нормална на бисектриси AE унутрашњег угла код темена A). Угао $\measuredangle AEF$ је оштар (јер је угао правоуглог троугла $\triangle AFE$ који није прав угао) и он је спољашњи угао троугла $\triangle AEC$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\measuredangle EAC = \frac{\measuredangle BAC}{2}$ и $\measuredangle ACE = \measuredangle ACB$. Дакле, $\frac{\measuredangle BAC}{2} + \measuredangle ACB < \frac{\pi}{2}$, па следи да је и $\measuredangle BAC + 2\measuredangle ACB < \pi = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB$, тј. $\measuredangle ACB < \measuredangle ABC$.

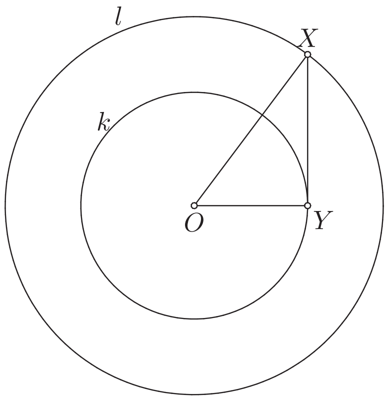
У делу Анализа је доказано да је тада $\measuredangle AFB = \frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2}$, а како ПК важи $\mathcal{B}(F, B, E)$ и $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$, следи да је $\measuredangle AFB = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Према томе, $\frac{\measuredangle ABC - \measuredangle ACB}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$, тј. $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.



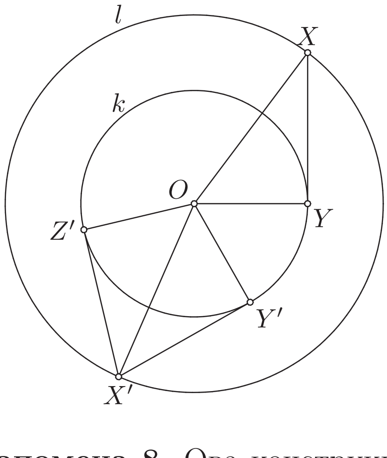
Нека је $\beta - \gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta-\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, па постоји троугао $\triangle AFE$ и јединствен је до на подударност. Нека је A' подножје висине из темена A у троуглу $\triangle AFE$. Тада углови $\measuredangle A'AE$ и $\measuredangle AFE = \frac{\beta-\gamma}{2}$ имају нормалне краке, па је $\measuredangle A'AE = \frac{\beta-\gamma}{2}$. Да би важило $\mathcal{B}(A, S, E)$, да би се тачка A налазила у спољашњости круга $k(S, \rho)$ и да би тангенте круга k из тачке A секле праву FE у тачкама B, C таквим да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$, потребно је и довољно да висина AA' буде већа од пречника круга k, тј. да важи $AA' > 2\rho$. Из правоуглог троугла $\triangle AA'E$ имамо $\cos\measuredangle A'AE = \frac{AA'}{AE} = \frac{AA'}{l_a}$, тј. да је $AA' = l_a \cos\measuredangle A'AE = l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$. Према томе, услов је $l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$. Према томе, ако је $\beta - \gamma < \pi$ и $l_a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима, задатак нема решења.

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дати круг види под датим углом



Нека је $k(O, r)$ дати круг и φ дати угао. Нека је $Y \in k$ произвољна и нека је X таква да троугао $\triangle OXY$ задовољава $\measuredangle OYX = \frac{\pi}{2}$ и $\measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Конструишимо затим круг $l(O, OX)$ и то је тражено ГМТ.

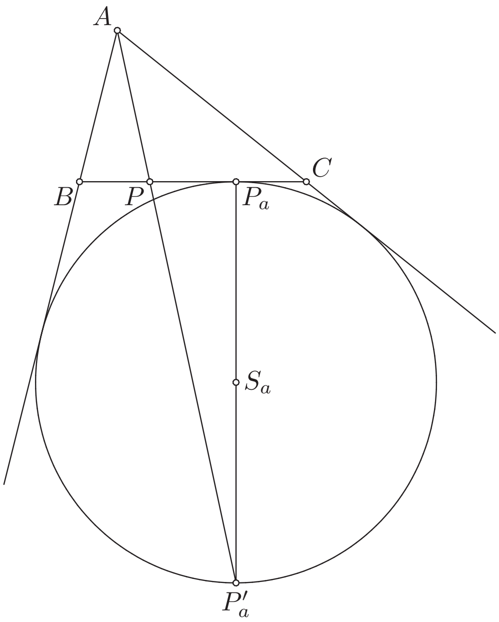
Покажимо да за сваку тачку X' са круга l важи да припада траженом ГМТ. Нека су Y', Z' додирне тачке тангенти круга k из тачке X'. Потребно је доказати да је $\measuredangle Y'X'Z' = \varphi$. Троуглови $\triangle X'OY'$ и $\triangle XOY$ задовољавају да је $X'O = XO$, $OY' = OY$ и $\measuredangle X'Y'O = \frac{\pi}{2} = \measuredangle XYO$, а углови $\measuredangle OX'Y'$ и $\measuredangle OXY$ су оба оштра (правоугли троуглови имају по један прав и два оштра угла). На основу става ССУ следи да је $\triangle X'OY' \cong \triangle XOY$, па је $\measuredangle OX'Y' = \measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Слично је и $\triangle X'OZ' \cong \triangle XOY$, па је $\measuredangle OX'Z' = \measuredangle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Следи да је $\measuredangle Y'X'Z' = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$.



Напомена 8. Ова конструкција је помоћна конструкција и уколико се користи у неком другом задатку, потребно је исписати њене кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Није потребно доказивати да се из сваке тачке конструисаног круга дати круг види под датим углом.

8) $\alpha, b-c, \rho_a$

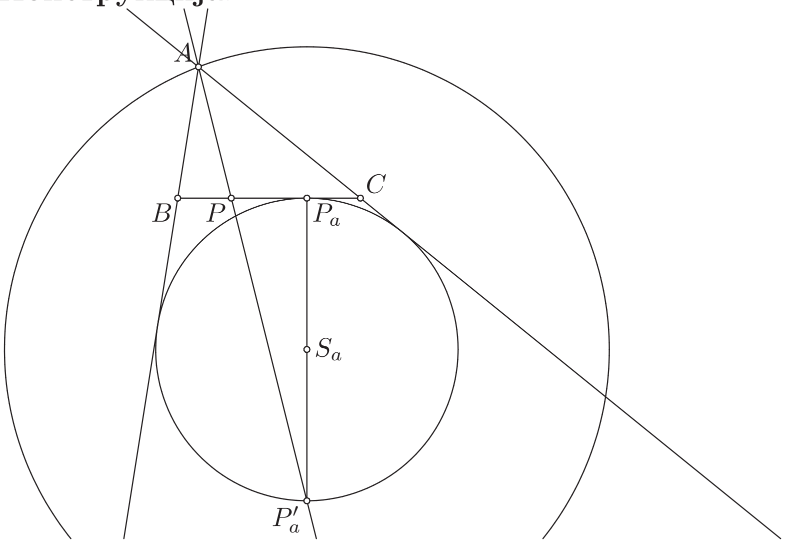
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$, $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC - AB = b - c$ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a.



Нека су P, S_a, P_a, P'_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка следи да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, као и $PP_a = b - c$.

У троуглу $\triangle PP_aP'_a$ је $PP_a = b - c$, $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка S_a је средиште странице $P_aP'_a$ и можемо конструисати круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Тачка A припада правој PP'_a тако да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и из тачке A се круг k_a види под углом α. Тачке B, C су пресечне тачке тангенти круга k_a из тачке A и праве PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција:

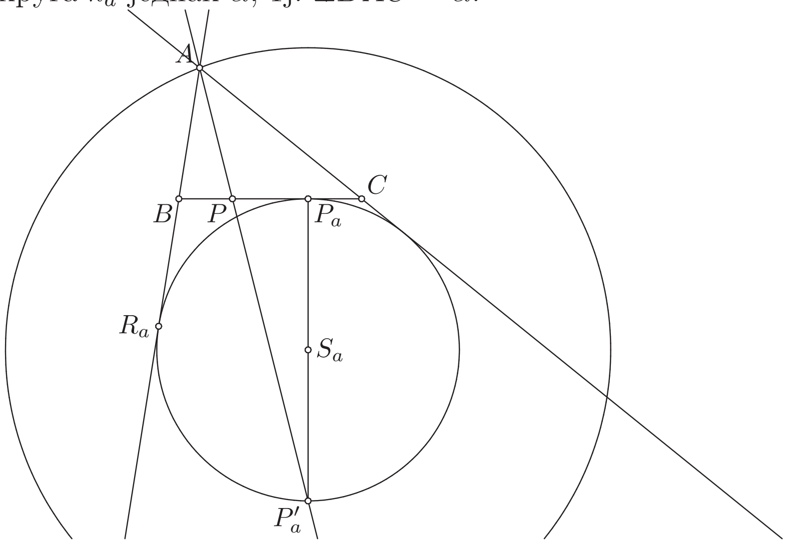


Конструишимо троугао $\triangle PP_aP'_a$ такав да је $PP_a = b-c$, $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$. Означимо са S_a средиште странице $P_aP'_a$ и конструишимо круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Конструишимо ГМТ l из којих се круг k_a види под углом α. Означимо са A пресечну тачку ГМТ l и праве PP'_a такву да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$. Конструишимо тангенте круга k_a из тачке A и означимо са B, C њихове пресеке са правом PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $AC > AB$ и $AC - AB = b-c$, као и да је полупречник спољa уписаног круга наспрам темена A подударан дужи ρ_a.

Тачке B, C припадају тангентама круга k_a из тачке A, па су праве AB, AC тангенте круга k_a. ПК је S_a средиште $P_aP'_a$ и $\measuredangle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$, па следи да је $PP_a \perp P_aS_a$. ПК је $P_aP'_a = 2\rho_a$, па следи да је $S_aP_a = \frac{1}{2}P_aP'_a = \frac{1}{2}2\rho_a = \rho_a$, тј. S_aP_a је полупречник круга $k_a(S_a, \rho_a)$. Дакле, права PP_a је нормална на полупречнику круга k_a, па је она тангента тог круга. Штавише, како је $S_aP_a = \rho_a$, следи да је тачка P_a додирна тачка круга k_a и праве PP_a. Како ПК тачке B, C припадају правој PP_a и важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, следи да је права BC исто што и права PP_a и да тачка P_a припада дужи BC, па круг k_a додирује страницу BC троугла $\triangle ABC$. Дакле, круг k_a је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је спољa уписани круг наспрам темена A. Како ПК важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и $P \in BC$, следи да важи $A, P'_a \div BC$. Такође, S_a је средиште $P_aP'_a$ и $P_a \in BC$, па следи да важи $P'_a, S_a \doteq BC$. Према томе, важи $A, S_a \div BC$, па је k_a спољa уписани круг који додирује страницу BC. Овим смо доказали и да је полупречник спољa уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a.

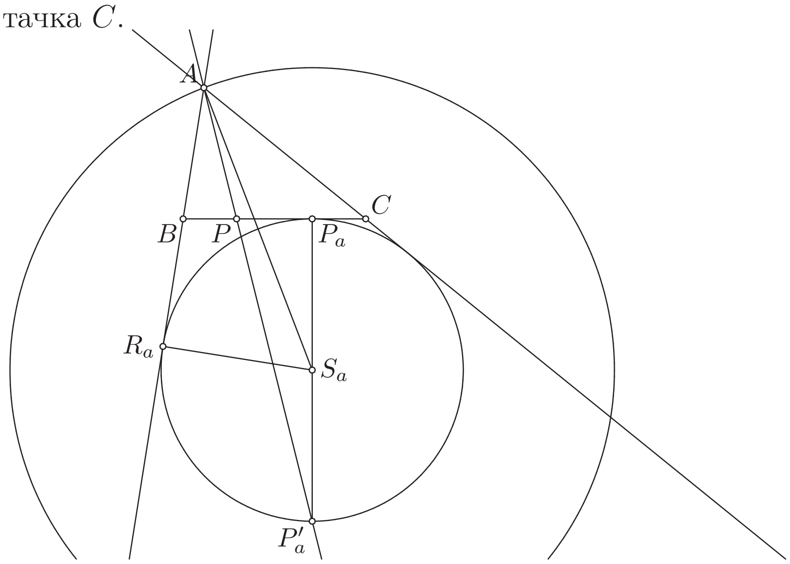
ПК је l ГМТ из којих се круг $k_a(S_a, \rho_a)$ види под углом α. Како тачка A припада ГМТ l, следи да је угао $\measuredangle BAC$ који граде тангенте AB, AC круга k_a једнак α, тј. $\measuredangle BAC = \alpha$.



Тачке S_a, P_a су редом центар спољa уписаног круга наспрам темена A и додирна тачка тог круга и странице BC. Тачка S_a је средиште дужи $P_aP'_a$, па је тачка P'_a дијаметрално супротна тачки P_a. На основу Великог задатка, став **1)**, следи да су теме A, додирна тачка уписаног круга и странице BC и тачка P'_a колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP'_a и странице BC тачка P, следи да је тачка P додирна тачка уписаног круга и странице BC. Нека је R_a додирна тачка спољa уписаног круга k_a и праве AB. На основу Великог задатка је дуж AR_a подударна полуобиму троугла $\triangle ABC$, $BP_a = BR_a = AR_a - AB$ и $BP = AR_a - AC$. Како важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a)$ следи да је $BP_a > BP$, па је $AR_a - AB > AR_a - AC$, тј. $AC > AB$. На основу Великог задатка је $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

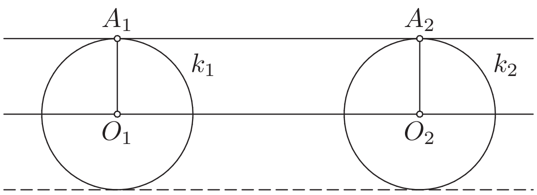
Нека је $\alpha < \pi$. Постоји троугао $\triangle PP_aP'_a$ и јединствен је до на подударност, па постоји и јединствено средиште S_a странице $P_aP'_a$. Полупречник S_aA круга l (ГМТ из којих се круг k_a види под углом α) је већи од ρ_a, па је тачка P'_a у унутрашњости круга l. Следи да права PP'_a сече круг l у двема тачкама, при чему је једна с исте стране тачке P'_a као тачка P, а друга је са супротне стране. Тачка A је она за коју важи $A, P \doteqdot P'_a$, а да би важило $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ (пошто може важити и $\mathcal{B}(P, A, P'_a)$), мора важити $S_aA > S_aP$, тј. и тачка P мора бити унутар круга l. Из Питагорине теореме је $S_aP^2 = S_aP_a^2 + P_aP^2 = \rho_a^2 + (b-c)^2$, па је $S_aP = \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$. У правоуглом троуглу $\triangle AS_aR_a$ је S_aA хипотенуза, а катета S_aR_a наспрам угла $\measuredangle S_aAR_a = \frac{\alpha}{2}$ је подударна са полупречником ρ_a круга k_a, па је $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_a}{S_aA}$, тј. $S_aA = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Дакле, имамо услов $\frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$. Тачка A је у спољашњости круга k_a, услов $\mathcal{B}(A, P, P_a')$ обезбеђује да тангенте круга k_a из тачке A секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака. Према томе, $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B, а која је тачка C.



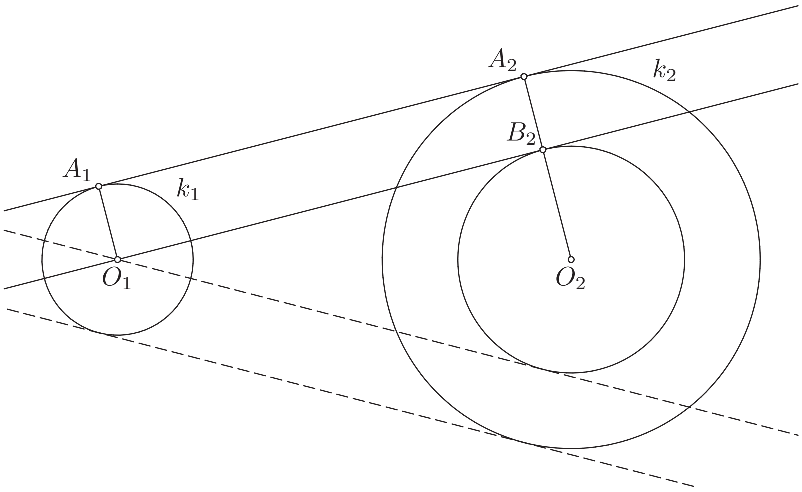
Према томе, ако је $\alpha < \pi$ и $\frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b-c)^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима задатак нема решења.

Конструкција заједничких спољашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



Ако је $r_1 = r_2$, конструишимо праву t која је паралелна са правом O_1O_2 и налази се на растојању $r_1 (= r_2)$ од ње.



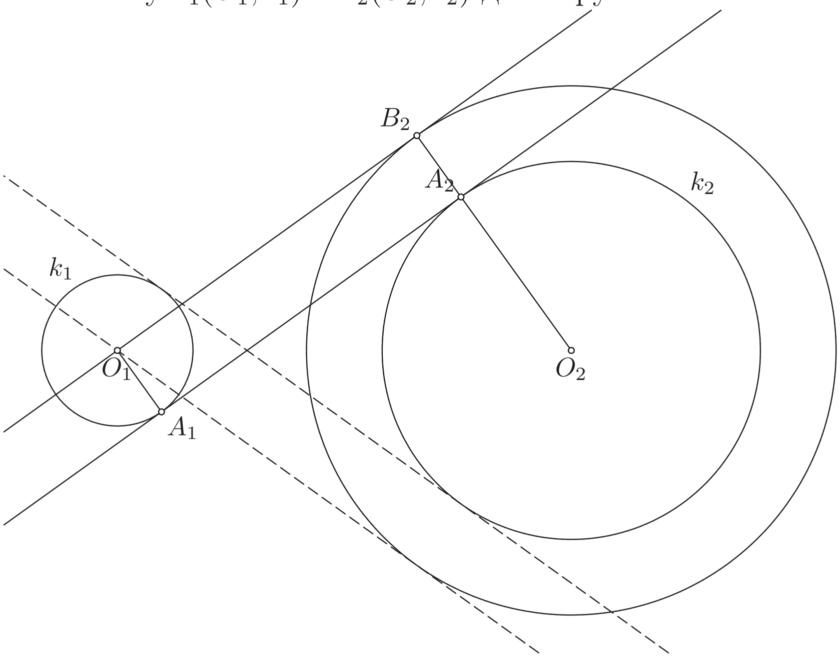
Без умањења општости претпоставимо да је $r_1 < r_2$ (ако није, тј. ако је $r_1 > r_2$, означимо тачку O_1 са O_2 и обратно, круг k_1 са k_2 и обратно и полупречник r_1 са r_2 и обратно). Конструишимо круг $k_2'(O_2, r_2 - r_1)$. Конструишимо тангенту t' круга k_2' из тачке O_1 и конструишимо праву t која је паралелна са правом t', налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \div t'$.

Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 \neq O_2$, онда постоје тачно две праве t које су паралелне са O_1O_2 и налазе се на растојању $r_1(= r_2)$ од ње, па постоје тачно две заједничке спољашње тангенте кругова k_1, k_2. Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 = O_2$, онда се кругови k_1 и k_2 поклапају, па је свака тангента круга k_1 уједно и тангента круга k_2, па постоји бесконачно много заједничких спољашњих тангенти.

Нека је без умањења општости $r_1 < r_2$. Да би постојала тангента круга $k_2'(O_2, r_2 - r_1)$ из тачке O_1, она мора бити или на кругу k_2' или у његовој спољашњости, тј. мора важити $O_1O_2 \geq r_2 - r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 - r_1$, тада постоји јединствена тангента t', па постоји и јединствена заједничка спољашња тангента кругова k_1, k_2. Ако је $O_1O_2 > r_2 - r_1$, онда постоје две тангенте t', па постоје и две заједничке спољашње тангенте кругова k_1, k_2.

Конструкција заједничких унутрашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



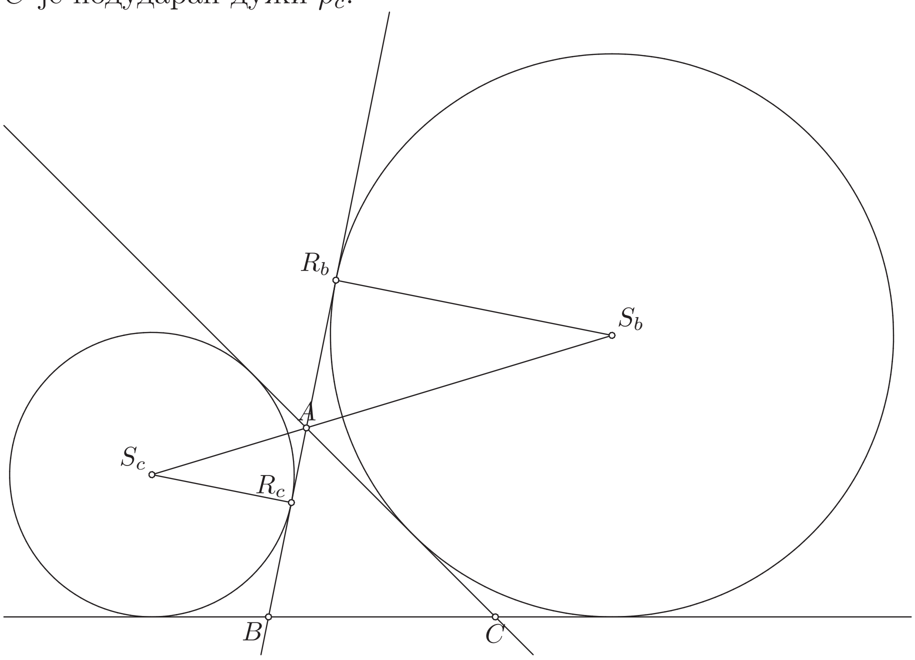
Конструишимо круг $k_2'(O_2, r_2 + r_1)$. Конструишимо тангенту t' круга k_2' из тачке O_1 и конструишимо праву t која је паралелна са правом t', налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \div t'$.

Да би постојала тангента t' круга $k_2'(O_2, r_2 + r_1)$ из тачке O_1, она се мора налазити на кругу k_2' или у његовој спољашњости. Дакле, мора важити $O_1O_2 \geq r_2 + r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 + r_1$, онда постоји јединствена тангента t', па постоји и јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k_1, k_2. Ако је $O_1O_2 > r_2 + r_1$, онда постоје две тангенте t', па постоје и две заједничке унутрашње тангенте кругова k_1, k_2.

Напомена 9. Ове конструкције су такође помоћне конструкције и уколико се користе у неком другом задатку, потребно је исписати њихове кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Услови под којима су ове конструкције могуће и одговарајући број тангенти могу се користити у етапи Дискусија без додатног образложења.

9) a, ρ_b, ρ_c

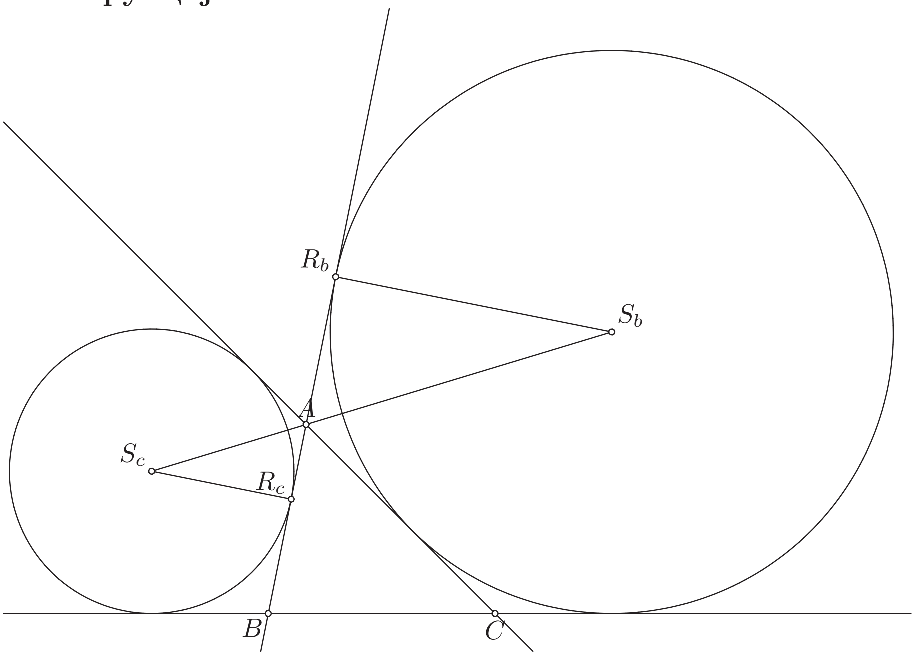
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $BC = a$, полупречник споља уписаног круга наспрам темена B је подударан дужи ρ_b и полупречник споља уписаног круга наспрам темена C је подударан дужи ρ_c.



Нека су S_b, S_c, R_b, R_c тачке из Великог задатка и нека су k_b, k_c редом споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$ наспрам темена B, C. Тада је на основу Великог задатка $R_bR_c = a$. За тачке S_b, S_c важи $S_bR_b = \rho_b$, $S_bR_b \perp R_bR_c$, $S_cR_c = \rho_c$, $S_cR_c \perp R_bR_c$ и $S_b, S_c \div R_bR_c$, па је R_bR_c заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c.

Права BC додирује кругове k_b, k_c, па је она њихова заједничка тангента. Како су $S_b, S_c \mathrel{\ddot{-}} BC$, у питању је њихова заједничка спољашња тангента. Према томе, тачка B је у пресеку заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c и праве R_bR_c, при чему важи распоред $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Такође, права AC је заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c, која није R_bR_c. Према томе, тачка C се налази у пресеку те тангенте и заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c која садржи тачку B, а тачка A се налази у пресеку те тангенте и праве R_bR_c.

Конструкција:

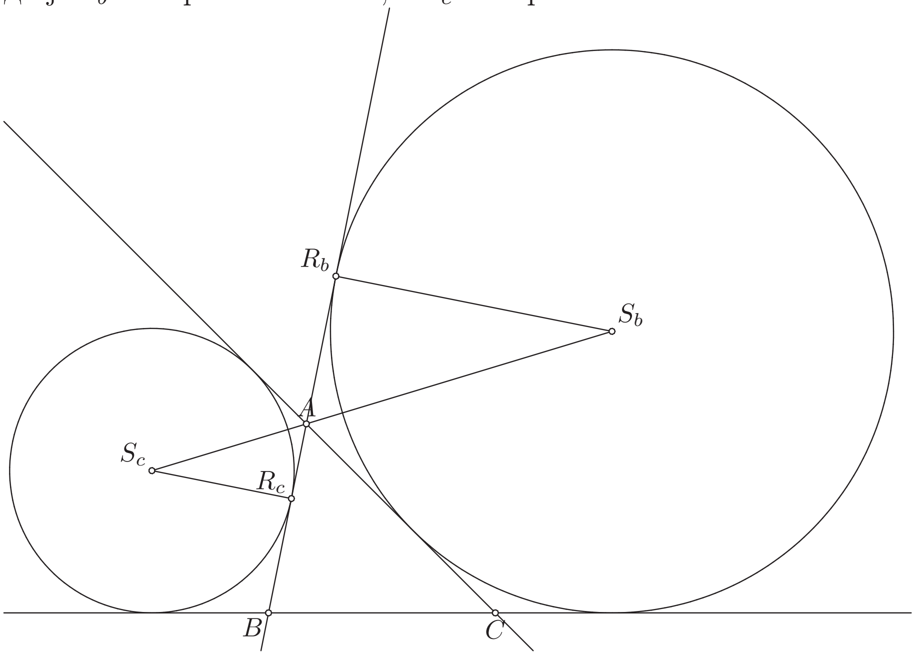


Конструишимо дуж $R_bR_c = a$. Конструишимо нормалу на R_bR_c у тачки R_c и означимо на њој са S_c тачку такву да је $S_cR_c = \rho_c$. Конструишимо нормалу на R_bR_c у тачки R_b и означимо на њој са S_b тачку такву да је $S_bR_b = \rho_b$ и $S_c, S_b \div R_bR_c$. Конструишимо кругове $k_b(S_b, \rho_b), k_c(S_c, \rho_c)$. Конструишимо заједничку спољашњу тангенту t кругова k_b, k_c која сече праву R_bR_c у тачки B таквој да важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Конструишимо заједничку унутрашњу тангенту t_1 кругова k_b, k_c која није права R_bR_c. Означимо са A пресечну тачку правих R_bR_c, t_1 и са C пресечну тачку правих t, t_1.

Доказ: Треба доказати да је $BC = a$, да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена B подударан дужи ρ_b и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена C подударан дужи ρ_c.

ПК је $R_bR_c \perp S_bR_b$, $R_bR_c \perp S_cR_c$, $S_bR_b = \rho_b$ и $S_cR_c = \rho_c$. ПК су S_b, S_c центри кругова k_b, k_c и S_bR_b, S_cR_c њихови полупречници, па је R_bR_c заједничка тангента кругова k_b, k_c, а због $S_b, S_c \div R_bR_c$ је у питању заједничка унутрашња тангента. ПК се тачке A, B налазе на правој R_bR_c, па су праве AB и R_bR_c исте. Такође, ПК се тачке B, C налазе на правој t, која је заједничка спољашња тангента кругова k_b, k_c. ПК је права AC заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c различита од R_bR_c.

Дакле, праве AB, BC, AC јесу заједничке тангете кругова k_b, k_c, па следи да су то уписани или споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$. Пошто је BC заједничка спољашња тангента, следи да ниједан он њих није споља уписани круг наспрам темена A (ово важи зато што се од поменутих кругова с једне стране праве BC налазе три круга, а с друге стране један и то баш споља уписани напрам темена A). Такође, да је један од k_b, k_c уписани круг троугла $\triangle ABC$, онда би једна од правих AB, AC била заједничка спољашња тангента. Како то није случај, следи да су k_b, k_c споља уписани кругови наспрам темена B, C. Остаје још да се докаже да је k_b наспрам темена B, а k_c наспрам темена C.



Пошто ПК важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$, тачка R_c мора бити додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена C и странице AB, а тачка R_b додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена B и праве AB. Дакле, k_b јесте споља уписани круг наспрам темена B, а k_c јесте споља уписани круг наспрам темена C. ПК су полупречници кругова k_b, k_c подударни редом дужима ρ_b, ρ_c, па су полупречници споља уписаних кругова наспрам темена B, C троугла $\triangle ABC$ редом подударни датим дужима ρ_b, ρ_c.

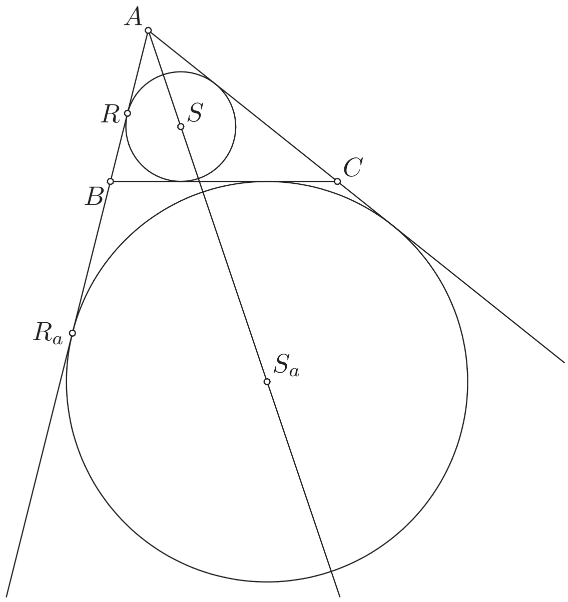
На основу Великог задатка следи да је $R_bR_c = BC$, а како је ПК $R_bR_c = a$, следи да је $BC = a$.

Дискусија: Кругове k_b, k_c је увек могуће конструисати и пошто имају заједничку унутрашњу тангенту R_bR_c која их не додирује у истој тачки, следи да имају и другу заједничку унутрашњу тангенту, као и две заједничке спољашње тангенте. Од њих тачно једна испуњава услов $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Дакле, конструкција троугла $\triangle ABC$ је увек могућа.

Према томе, за било које дужи a, ρ_b, ρ_c постоји јединствено решење до на подударност.

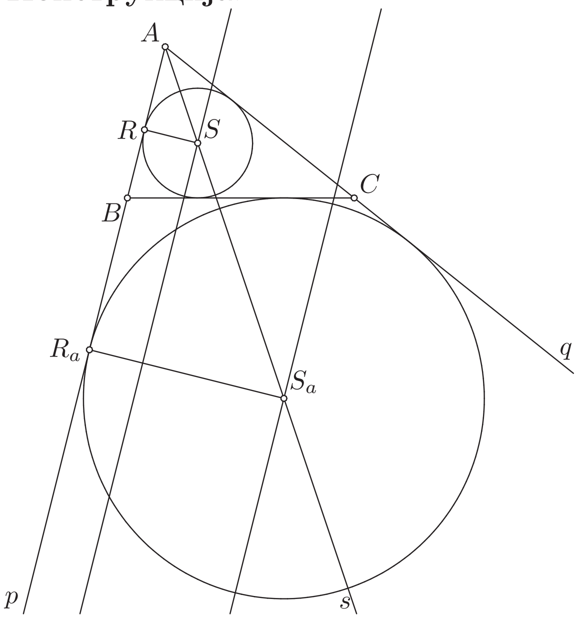
10) α, ρ, ρ_a

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle BAC = \alpha$, полупречник уписаног круга је подударан дужи ρ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a.



Нека су S, S_a редом центар уписаног круга k и центар споља уписаног круга k_a наспрам темена A и нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a на правој AB. Тачке S, S_a припадају бисектриси угла $\measuredangle BAC$ (полуправој!), а како су R, R_a редом додирне тачке кругова k, k_a и праве AB, следи да је $SR = \rho$ и $S_aR_a = \rho_a$. Према томе, тачка S се налази на растојању ρ од праве AB, а тачка S_a се налази на растојању ρ_a од праве AB. Права BC је заједничка тангента кругова k, k_a, а како важи $k, k_a \div BC$, у питању је заједничка унутрашња тангента тих кругова.

Конструкција:

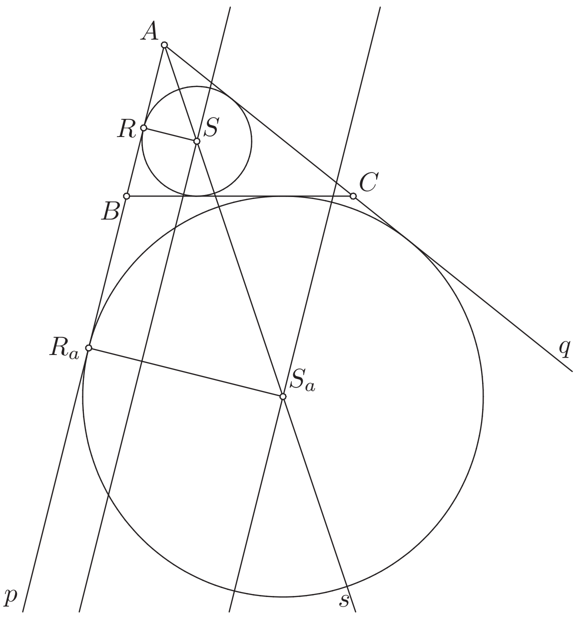


Конструишимо угао $\measuredangle pAq = \alpha$. Конструишимо бисектрису As (полуправу!) угла $\measuredangle pAq$. Конструишимо праву a која је паралелна са краком Ap угла $\measuredangle pAq$, налази се на растојању ρ од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\measuredangle pAq$. Пресечну тачку праве a и бисекрисе As означимо са S. Конструишимо праву b која је паралелна са краком Ap угла $\measuredangle pAq$, налази се на растојању ρ_a од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\measuredangle pAq$. Пресечну тачку праве b и бисекрисе As означимо са S_a тако да важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, \rho_a)$ и конструишимо њихову заједничку унутрашњу тангенту t. Пресечну тачку тангенте t и крака Ap угла $\measuredangle pAq$ означимо са B, а пресечну тачку тангенте t и крака Aq означимо са C.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник спођа уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a.

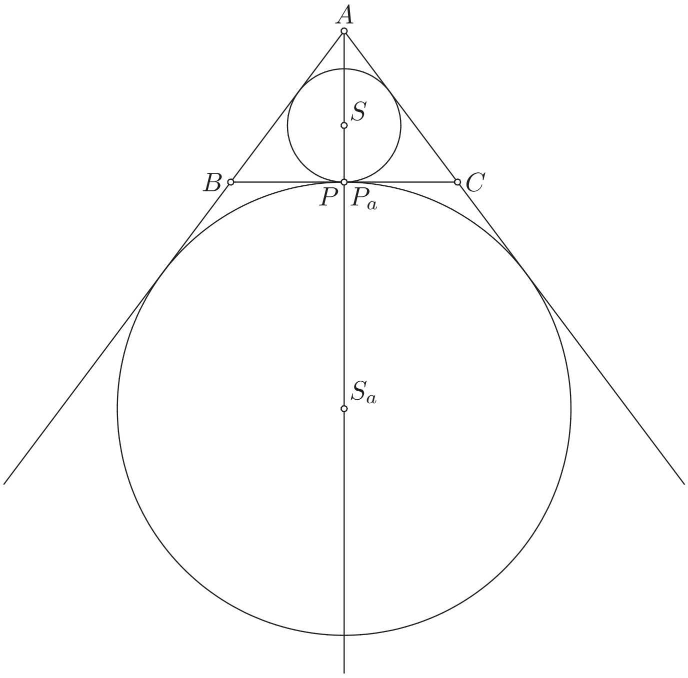
ПК тачка B припада краку Ap, а тачка C краку Aq угла $\measuredangle pAq$ који је ПК подударан углу α, па следи да је $\measuredangle BAC = \measuredangle pAq = \alpha$.

Центри S, S_a кругова k, k_a су на бисектриси As угла $\measuredangle BAC = \measuredangle pAq$ и налазе се редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap, тј. крака AB, па како су им полупречници редом подударни дужима ρ, ρ_a, следи да они додирују краке Ap, Aq (тј. AB, AC) угла $\measuredangle pAq = \measuredangle BAC$. ПК је права BC заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a, па је један од тих кругова уписани, а други споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. С обзиром на то да ПК важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, следи да је $k(S, \rho)$ уписани, а $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг наспрам темена A. Коначно следи и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC подударан дужи ρ_a.

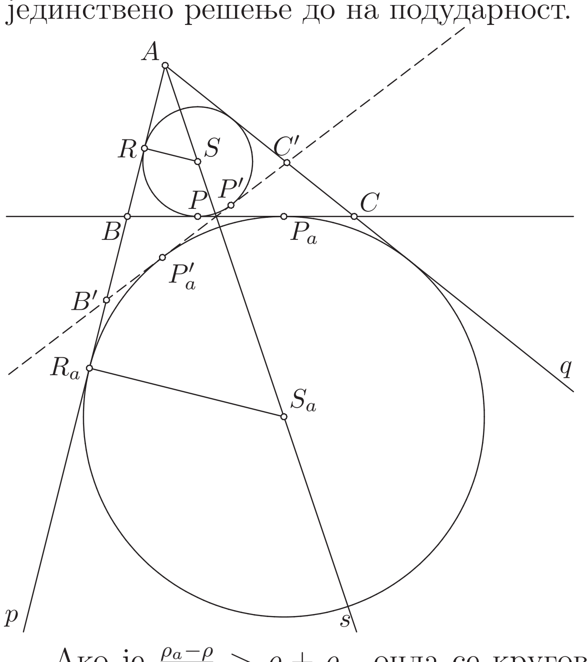


Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ чији је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a редом на краку Ap. Тада према Талесовој теореми следи $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SR}{S_aR_a}$, а како се тачке S, S_a налазе редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap, следи да је $SR = \rho$ и $S_aR_a = \rho_a$, па је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Да би важио распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, мора важити $AS < AS_a$, тј. $\frac{AS}{AS_a} < 1$, а то важи ако и само ако важи $\frac{\rho}{\rho_a} < 1$, тј. $\rho < \rho_a$. Кругови k, k_a имају заједничких унутрашњих тангенти ако и само ако важи $SS_a \geq \rho + \rho_a$. Из правоуглих троуглова $\triangle ASR$ и $\triangle AS_aR_a$ добијамо да је $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\measuredangle RAS = \frac{RS}{AS}$ и $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\measuredangle R_aAS_a = \frac{R_aS_a}{AS_a}$, па важи $AS = \frac{RS}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ и $AS_a = \frac{R_aS_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Према томе, важи $SS_a = AS_a - AS = \frac{\rho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, па је $\frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} \geq \rho + \rho_a$ услов постојања заједничких унутрашњих тангенти.



Ако важи $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \rho+\rho_a$, онда се кругови k, k_a додирују и постоји јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a, па постоји јединствено решење до на подударност.

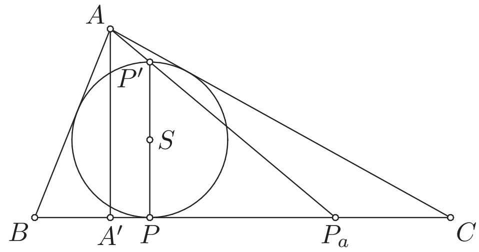


Ако је $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \rho+\rho_a$, онда се кругови k, k_a не додурују и имају две разне заједничке тангенте, па постоје два неподударна решења.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a-\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \rho+\rho_a$, онда постоји јединствено решење до на подударност. Ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a - \rho}{\sin\frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$, онда постоје два неподударна решења. У осталим случајевима, задатак нема решења.

11) $b - c, h_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A' подножје висине из темена A, S центар уписаног круга и P додирна тачка уписаног круга и странице BC. Тада важи $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, $AA' = h_a$ и $SP = \rho$.

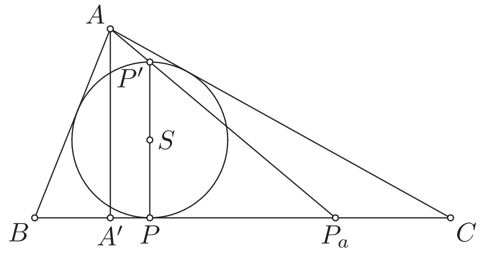


Нека су P', P_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, $PP_a = b - c$ и тачке A, P', P_a су колинеарне. Тачка S је средиште дужи $P'P$, па је $P'P = P'S + SP = 2SP = 2\rho$. У троуглу $\triangle P'PP_a$ је $P'P = 2\rho$, $\measuredangle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b - c$, па тај троугао умемо да конструишемо. Тачка A припада правој $P'P_a$, налази се на растојању h_a од праве BC, тј. од праве PP_a и важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Тачке B, C припадају правој PP_a и тангентама уписаног круга $k(S, SP)$ из тачке A, тако да важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle P'PP_a$ такав да је $P'P = 2\rho$, $\measuredangle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b - c$. Означимо са S средиште дужи $P'P$ и конструишимо круг $k(S, SP)$. Конструишимо праву p која је паралелна са правом PP_a и налази се на растојању h_a од ње, такву да важи $p, S, P' \doteqdot PP_a$. У пресеку правих p и $P'P_a$ означимо тачку A тако да важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Конструишимо тангенте круга k из тачке A. У пресеку тих тангенти и праве PP_a означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, да је висина из темена A подударна дужи h_a и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ.

Тачка S је средиште дужи $P'P$ која је ПК подударна дужи 2ρ, па следи да је $SP = \frac{1}{2}P'P = \frac{1}{2}2\rho = \rho$. Како је по конструкцији $P'P \perp PP_a$, следи да је права PP_a нормална на полупречнику SP круга $k(S, SP)$, па је она тангента круга k у тачки P. ПК важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, па праву PP_a можемо означавати и са BC. Дакле, права BC је тангента круга k и додирује је у тачки P која ПК припада дужи BC. Такође, праве AB, AC су ПК тангенте круга k, па следи да је круг k или уписани круг или спoља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. Како ПК важи $A, S \ddot{-} PP_a$, тј. $A, S \ddot{-} BC$, следи да је у питању уписани круг, па је његов полупречник подударан дужи ρ.



Дакле, P је додирна тачка уписаног круга и странице BC, а како је ПК тачка S средиште дужи $P'P$, следи да је тачка P' дијаметрално супротна тачки P. На основу Великог задатка, став **1)**, следи да су теме A, тачка P' и додирна тачка странице BC и спoља уписаног круга троугла $\triangle ABC$ наспрам темена A колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP' и странице BC тачка P_a, следи да је тачка P_a додирна тачка странице BC и спoља уписаног круга наспрам темена A. Ако је s полуобим троугла $\triangle ABC$, на основу Великог задатка следи да је $BP = s - AC$ и $BP_a = s - AB$, па због распореда $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ следи да је $BP < BP_a$, односно $s - AC < s - AB$, па је $AB < AC$. На основу Великог задатке је онда $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Тачка A припада правој p која је паралелна са правом PP_a, тј. правом BC и налази се на растојању h_a од ње, па ако означимо са A' подножје висине из темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је $AA' = h_a$.

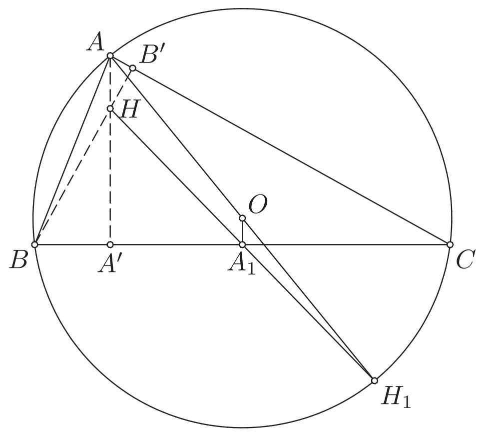
Дискусија: Да би важио услов $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, мора бити $h_a > 2\rho$, јер праве које су паралелне са PP_a и налазе се на растојању мањем од 2ρ секу дуж P_aP', а права која се налази на растојању 2ρ сече праву P_aP' у тачки P'. Ако важи тај услов, важи и да тачка A припада спољашњости круга $k(S, SP)$, јер права p (која је паралелна са PP_a и налази се на растојању $h_a(> 2\rho)$ од ње) нема заједничких тачака са кругом k, па постоје две тангенте круга k из тачке A. Такође, ако важи услов $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, те тангенте секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака, па услов $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B, а која је тачка C.

Дакле, ако важи $h_a > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност, а ако важи $h_a \leq 2\rho$, задатак нема решења.

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A, ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.

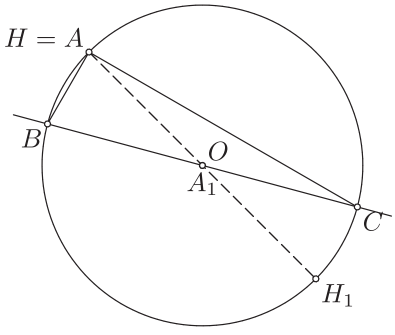
Решење:

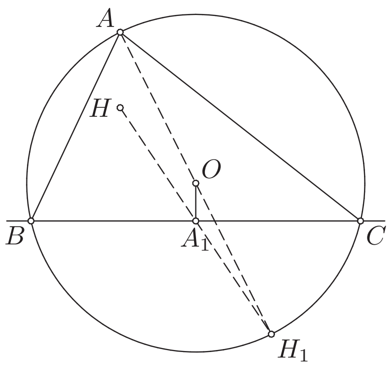
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека се његово теме A поклапа с датом тачком A, нека се његов ортоцентар поклапа с датом тачком H и нека се центар његовог описаног круга поклапа са тачком O.



Нека је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$ и нека је H_1 тачка симетрична ортоцентру H у односу на тачку A_1. У 3. задатку из области Подударност смо доказали да је тада тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар O описаног круга троугла $\triangle ABC$. Приметимо да ако се тачке A, H поклапају, тј. ако је $\triangle ABC$ правоугли с правим углом код темена A, онда се поклапају и тачке O, A_1 јер се центар описаног круга налази на средишту хипотенузе BC, а ако се тачке A, H разликују, онда се разликују и тачке O, A_1 и имамо да је права BC нормална на правој OA_1 у тачки A_1.

Конструкција:





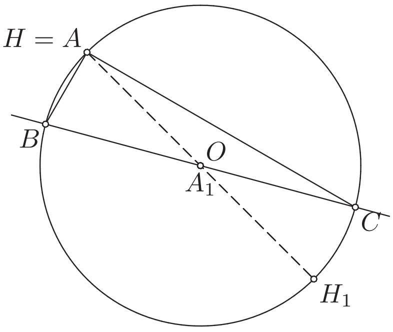
Означимо са H_1 тачку симетричну тачки A у односу на тачку O, а затим са A_1 средиште дужи HH_1. Конструишимо круг $l(O, OA)$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда конструишимо произвољну праву p која садржи O и различита је од праве OA и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l, а ако се тачке O, A_1 разликују, онда конструишимо праву p која је нормална на OA_1 у тачки A_1 и не садржи тачку A и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l.

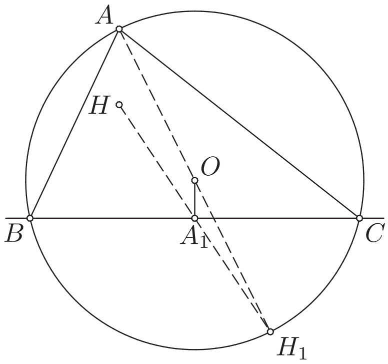
Доказ: Треба доказати да је тачка A једно теме троугла $\triangle ABC$, да је тачка H ортоцентар тог троугла и да је тачка O центар његовог описаног круга. Очигледно је испуњено да је тачка A теме троугла $\triangle ABC$.

ПК се тачке B, C разликују и припадају правој p која не садржи тачку A, па су A, B, C три неколинеарне тачке. Такође, оне ПК припадају кругу l, па је l описани круг троугла $\triangle ABC$, а како је O његов центар, следи да је O центар описаног круга троугла $\triangle ABC$.

Из претходног закључка следи да је $OB = OC$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда тачка O припада страници BC, па због $OB = OC$ закључујемо да је O (тј. A_1) средиште странице BC. Ако се тачке O, A_1 разликују, онда је по конструкцији $OA_1 \perp BC$, па како O припада симетрали странице BC (јер важи $OB = OC$), следи да је OA_1 симетрала странице BC. ПК тачка A_1 припада страници BC, па следи да је она њено средиште. ПК је тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар описаног круга, а у 3. задатку из области Подударност доказали смо да је тачка симетрична ортоцентру у односу на средиште странице BC симетрична и темену A у односу на центар описаног круга троугла $\triangle ABC$. Следи да је тачка H_1 симетрична ортоцентру у односу на средиште A_1 дужи BC, а самим тим и да је ортоцентар симетричан тачки H_1 у односу на тачку A_1. ПК је A_1 средиште дужи HH_1, па следи да је тачка H симетрична тачки H_1 у односу на средиште A_1 странице BC, што значи да је тачка H ортоцентар троугла $\triangle ABC$.

Дискусија: Ако се тачке A, O поклапају, задатак нема решења, јер се темена сваког троугла разликују од центра његовог описаног круга (а тада такође не постоји круг $l(O, OA)$). Нека су тачке A, O различите. Морамо обезбедити да права p коју конструишемо кроз тачку A_1 сече круг l у двема тачкама и да не садржи тачку A. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда смо ту праву конструисали произвољно тако да се разликује од праве OA. Свака права која пролази кроз тачку O сече круг l у двема тачкама и само права OA садржи тачку A. Дакле, тада постоји бесконачно много решења.





Нека се тачке O, A_1 разликују. Тачка O је средиште дужи AH_1, а тачка A_1 је средиште дужи HH_1. Ако су тачке A, H, H_1 неколинеарне (тј. ако постоји троугао $\triangle AHH_1$), онда је OA_1 његова средња линија и важи $OA_1 \parallel AH$ и $OA_1 = \frac{AH}{2}$. Ако су тачке A, H, H_1 колинеарне, онда је $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OH_1}$ и $\overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{A_1H_1}$ (јер су O, A_1 редом средишта дужи AH_1, HH_1), па следи да је $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OA_1}$. Следи да је $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \|2\overrightarrow{OA_1}\| = 2\|\overrightarrow{OA_1}\| = 2OA_1$.

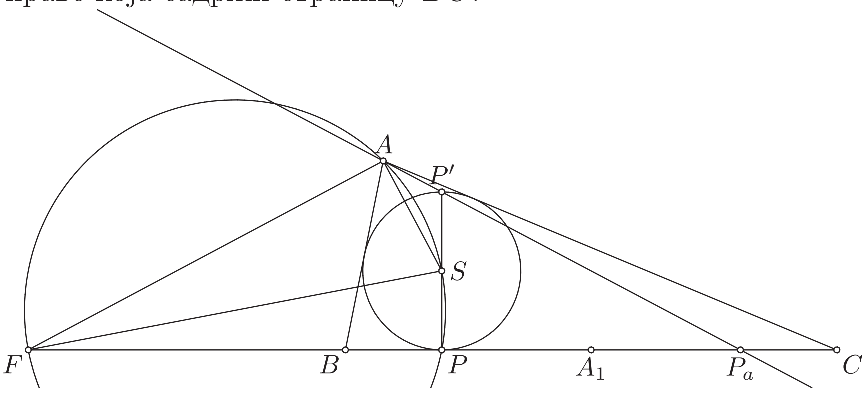
Да би права p која садржи A_1 и нормална је на OA_1 секла круг $l(O, OA)$ у двема тачкама, тачка A_1 мора припадати унутрашњости круга l, тј. мора бити $OA_1 < OA$. Дакле, добијамо услов $\frac{1}{2}AH < OA$, тј. $AH < 2OA$. У случају да права p садржи тачку A, нема решења, а у осталим случајевима постоје два решења, јер имамо избор коју ћемо од пресечних тачака праве p и круга l обележити са B, а коју са C. Ако су тачке A, H, O колинеарне, онда је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с врхом A, па заменом ознака теменима B, C добијамо подударна решења, а ако тачке A, H, O нису колинеарне, онда заменом ознака теменима B, C не добијамо подударна решења.

Дакле, ако се тачке O, A разликују, а тачке A, H поклапају, постоји бесконачно много решења. Ако се тачке O, A разликују, као и тачке A, H, ако су A, H, O колинеарне и важи $AH < 2OA$, постоје два међусобно подударна решења. Ако се тачке O, A и A, H разликују, A, H, O нису колинеарне, угао $\measuredangle HAO$ није туп и важи $AH < 2OA$, онда постоје два неподударна решења. Ако се тачке O, A и A, H разликују, A, H, O нису колинеарне и права p не садржи тачку A, постоје два неподударна решења. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

3. Дате су тачке A_1, S, F. Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC, S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC.

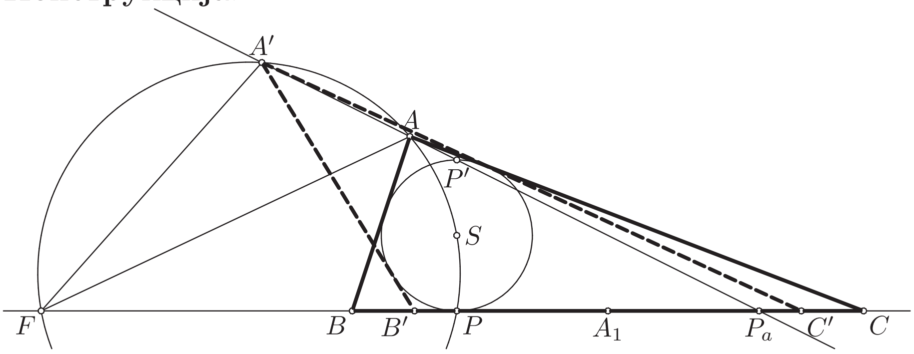
Решење:

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека је тачка A_1 средиште странице BC, тачка S центар његовог уписаног круга и F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве која садржи страницу BC.



Нека су P, P', P_a тачке из Великог задатка. Тачка P је подножје нормале из тачке S на страници BC, а самим тим и на правој FA_1. На основу Великог задатка је тачка P_a симетрична тачки P у односу на тачку A_1, а тачка P' јој је симетрична у односу на тачку S. Полуправа AS је бисектриса унутрашњег, а полуправа AF бисектриса спољашњег угла код темена A, што значи да је угао $\measuredangle FAS$ прав. Према томе, тачка A припада кругу над пречником FS. Такође, на основу Великог задатка важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, па тачка A припада правој P_aP'. Следи да она припада пресеку круга над пречником FS и праве P_aP'. Праве AB и AC су тангенте уписаног круга $k(S, SP)$ и тачке B, C припадају правој FA_1.

Конструкција:



Конструишимо праву FA_1. Означимо подножје нормале из тачке S на правој FA_1 са P, а затим тачке симетричне тачки P редом у односу на тачке A_1, S означимо са P_a, P'. Конструишимо круг над пречником FS и његов пресек с правом P_aP' означимо са A тако да важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Конструишимо тангенте круга $k(S, SP)$ из тачке A и њихове пресеке с правом FA_1 означимо са B, C тако да важи $\mathcal{B}(B, P, C)$.

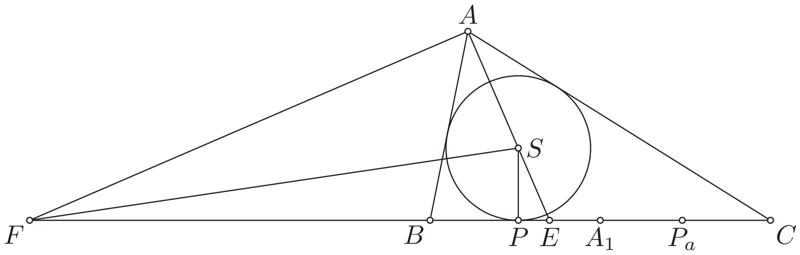
Доказ: Треба доказати да је тачка A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, да је тачка S центар његовог уписаног круга и да је F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве BC.

ПК је полупречник SP круга $k(S, SP)$ нормалан на правој FA_1, тј. на правој BC, па следи да је права BC тангента круга k. Такође, праве AB и AC су ПК тангенте круга k, а како ПК важи $\mathcal{B}(B, P, C)$, следи да је k уписани круг или споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. Пошто ПК важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, следи $A, P' \ddot{-} BC$, а пошто је S средиште PP', следи $\mathcal{B}(P, S, P')$, па је $P', S \ddot{-} BC$. Следи $A, S \ddot{-} BC$, па је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, што значи да је његов центар S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$.

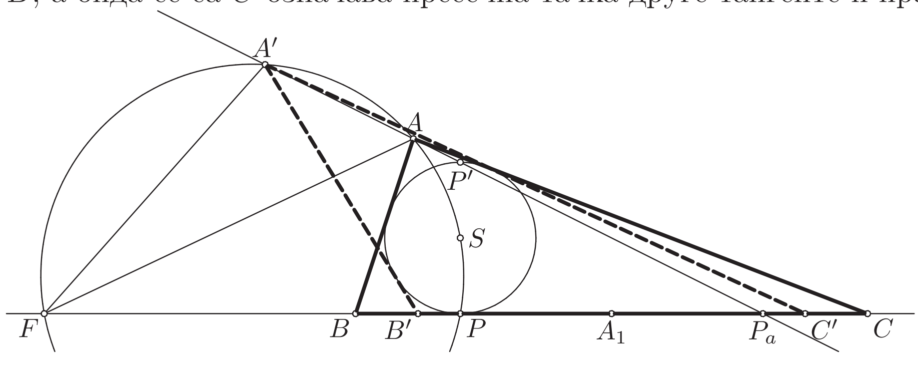
Из чињеница да је тачка P додирна тачка уписаног круга и странице BC, ПК тачка P' симетрична тачки P у односу центар уписаног круга S, $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ и да P_a припада правој BC, на основу Великог задатка следи да је тачка P_a додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена A и странице BC. Како је на основу Великог задатка средиште дужи BC уједно и средиште дужи PP_a, а ПК је A_1 средиште дужи PP_a, следи да је тачка A_1 средиште дужи BC.

Пошто је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, следи да је полуправа AS бисектриса унутрашњег угла код темена A. ПК тачка A припада кругу над пречником FS, па је угао $\measuredangle FAS$ прав. Дакле, полуправа AF је бисектриса спољашњег угла, па како тачка F припада правој BC, следи да је она пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ и праве која садржи страницу BC.

Дискусија: Центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$ припада његовој унутрашњости, па следи да не припада правој BC, а самим тим ни правој FA_1. Дакле, тачке F, A_1, S морају бити неколинеарне, иначе задатак нема решења.



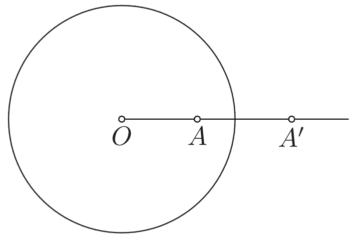
Нека је E пресечна тачка бисектрисе унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ и странице BC. Без обзира на то да ли важи $\mathcal{B}(F, B, C)$ или $\mathcal{B}(F, C, B)$, важи $\mathcal{B}(F, P, E, A_1, P_a)$. Троугао $\triangle FAS$ је правоугли с правим углом код темена A, па је угао $\measuredangle FSA$ оштар. Због $\mathcal{B}(A, S, E)$ следи да је угао $\measuredangle FSE$ туп. Из $\mathcal{B}(F, E, A_1)$ следи да је $\measuredangle FSA_1 > \measuredangle FSE$, па је и угао $\measuredangle FSA_1$ туп. Дакле, да би постојало решење, тачке F, A_1, S морају бити такве да је угао $\measuredangle FSA_1$ туп. Такође, тачке F, S, A_1 морају бити такве да круг над пречником FS и полуправа P_aP' имају заједничких тачака. У том случају се било која од пресечних тачака полуправе P_aP' и круга над пречником FS може означити са A и биће испуњен услов $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Тачка A припада спољашњости круга $k(S, SP)$, што значи да постоје две тангенте круга k из тачке A и оне секу праву FA_1 са разних страна тачке P. Било која од тих тачака се може означити са B, а онда се са C означава пресечна тачка друге тангенте и праве FA_1.



Према томе, ако су тачке F, A_1, S неколинеарне такве да је угао $\measuredangle FSA_1$ туп и круг над пречником FS сече полуправу P_aP' у двема тачкама, задатак има четири неподударна решења, а ако се тај круг и полуправа P_aP' додирују, задатак има два неподударна решења. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

4 Инверзија

Дефиниција 23. Нека је $k(O, r)$ круг неке равни α. *Инверзија* у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \alpha \setminus \{O\} \longrightarrow \alpha \setminus \{O\}$ које тачку A слика у тачку A' полуправе OA такву да важи $OA \cdot OA' = r^2$.



Важно је нагласити да тачка O не припада ни домену ни кодомену пресликавања ψ_k.

Особине овог пресликавања су:

- ψ_k је инволуција, односно $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$;

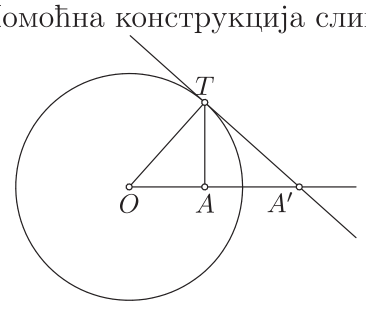
  Инверзија је очигледно инволуција, тј. $\psi_k^2 = \mathrm{Id}$, јер ако је A' слика тачке A, онда A' припада полуправој OA и важи $OA \cdot OA' = r^2$, па следи да тачка A припада полуправој OA' и важи $OA' \cdot OA = r^2$, што по дефиницији значи да је $\psi_k(A') = A$. Према томе, инверзија је бијекција и инволуција.

- тачка A се слика у себе ако и само ако припада кругу k;

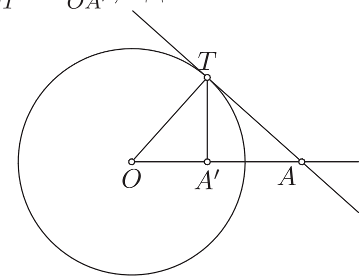
  Ако тачка A припада кругу k, онда је $OA \cdot OA = r^2$, па како A припада полуправој OA, следи да је $\psi_k(A) = A$. Обрнуто, ако је $\psi_k(A) = A$, онда је $OA \cdot OA = r^2$, тј. $OA = r$, па A припада кругу k.

- тачке из унутрашњости круга k, различите од тачке O, сликају се у тачке из спољашњости круга k и обрнуто;

  Помоћна конструкција слике тачке при инверзији:



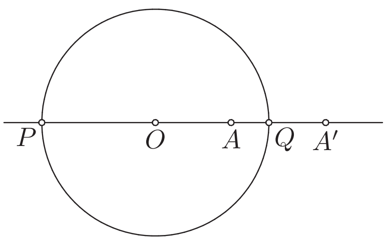
Нека је A тачка у унутрашњости круга k различита од тачке O. Конструишимо полуправу OA и нормалу n на тој полуправој у тачки A. Једну од пресечних тачака нормале n и круга k означимо са T и конструишимо тангенту круга k у тачки T (нормалу на OT у тачки T) и са A' означимо њен пресек с полуправом OA. Троуглови $\triangle OTA$ и $\triangle OA'T$ су слични јер је $\measuredangle TOA = \measuredangle A'OT$ и $\measuredangle OAT = \frac{\pi}{2} = \measuredangle OTA'$, па је $\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'}$, односно $OA \cdot OA' = OT \cdot OT = r^2$. Према томе, $\psi_k(A) = A'$.



Ако је A тачка у спољашњости круга k, онда конструишимо произвољну тангенту круга k из те тачке, означимо додирну тачку са T и конструишимо нормалу n на полуправој OA која садржи тачку T и означимо подножје те нормале са A'. На исти начин као малопре се добија да је $\psi_k(A) = A'$.

Према томе, овим смо доказали да се тачке из унутрашњости круга k, различите од O, сликају у његову спољашњост и обрнуто. Такође, тачке круга k се сликају у себе и све тачке које се сликају у себе припадају кругу k.

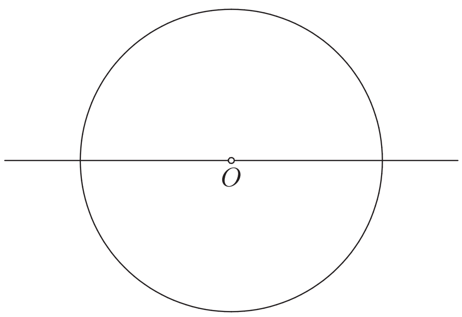
- ако је $\psi_k(A) = A'$ и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$;

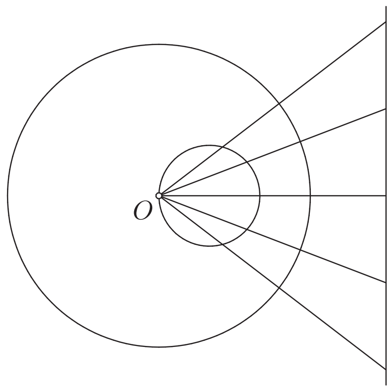


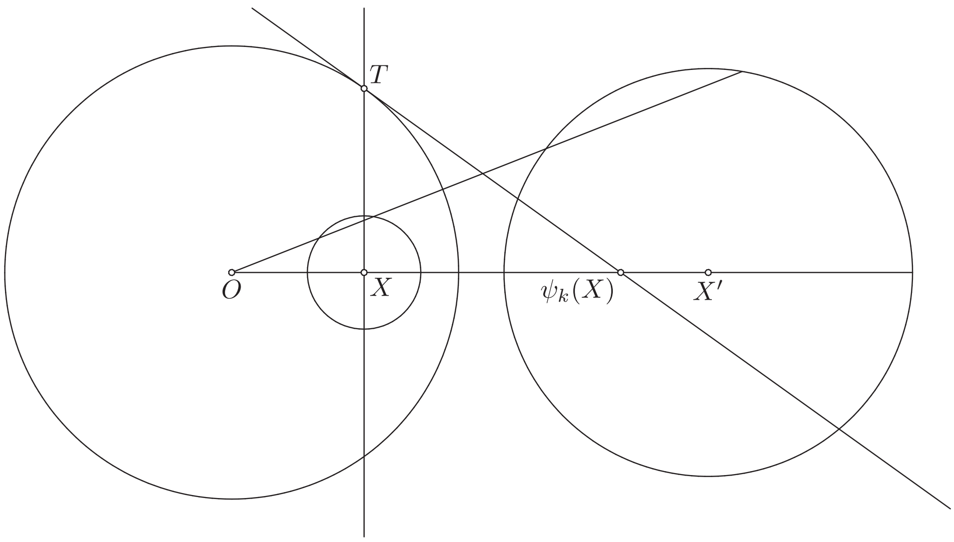
Нека је A произвољна тачка различита од O, $A' = \psi_k(A)$ и нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ, а пошто A' припада полуправој OA, следи да није $\mathcal{B}(A, O, A')$, па по дефиницији 17 следи да је $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = OA \cdot OA' = r^2 = OP^2$. На основу задатка 2.11 следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.

- ако права p садржи тачку O, онда се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$;
- ако права p не садржи тачку O, онда се p слика у $l \setminus \{O\}$, где је l круг који садржи O;
- ако круг l садржи тачку O, онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву p која не садржи O;
- ако круг l не садржи тачку O, онда се l слика у круг l_1 који такође не садржи O, при чему се центар круга l **не слика** у центар круга l_1;

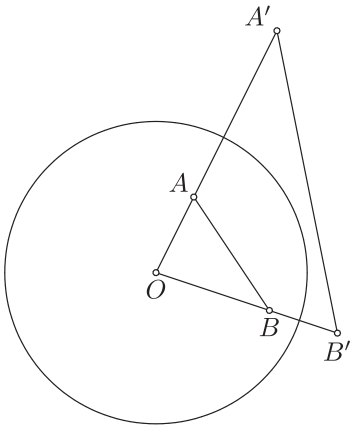
  На следећим сликама видимо како се инверзијом сликавају праве и кругови у зависности од тога да ли садрже тачку O. Такође, видимо да ако је $\psi_k(l) = l_1$, онда се центар круга l не слика у центар круга l_1.







- ако је $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$, онда је $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$;



  Нека су A, B две разне тачке и $A' = \psi_k(A), B' = \psi_k(B)$. Троуглови $\triangle OAB$ и $\triangle OB'A'$ су слични јер имају заједнички угао код темена O и из $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ следи да је $OA : OB' = OB : OA'$. Према томе, $OA : OB' = AB : B'A'$, тј. $A'B' = \frac{OB'}{OA} AB = \frac{OB \cdot OB'}{OA \cdot OB} AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.

- ψ_k чува углове између кривих.

  Угао између двеју кривих које се секу је угао између њихових тангенти у пресечној тачки, при чему је права сама себи тангента у произвољној тачки. Пошто инверзија чува углове, угао између тангенти двеју кривих у њиховој пресечној тачки једнак је углу између тангенти слика тих кривих при инверзији ψ_k у њиховој пресечној тачки. Пошто се инверзијом праве и кругови сликају у праве и кругове, инверзија чува углове између правих и кругова. Пресликавања која чувају углове називамо *конформним* пресликавањима.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.

Решење: