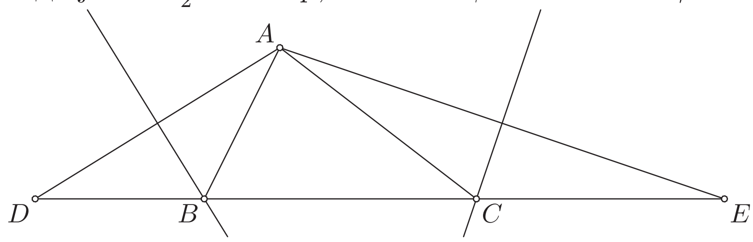
2) β, γ, p

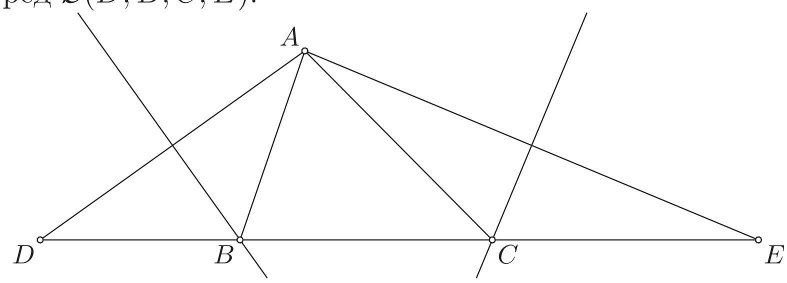
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\frac{BC+CA+AB}{2} = p$, $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$.



Нека су D, E тачке на правој BC такве да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, $DB = AB$ и $CE = AC$. Тада је $DE = AB + BC + CA = 2p$. Троугао $\triangle ABD$ је једнакокраки, јер је $AB = DB$, па следи да је $\measuredangle ADB = \measuredangle DAB = \varphi$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао тог троугла, па је он једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ADB$ и $\measuredangle DAB$. Дакле, $\beta = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па следи да је $\varphi = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$. Слично се доказује да је $\measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle ADE$ важи да је $DE = 2p$, $\measuredangle ADE = \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle AED = \measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Како је $DB = AB$, следи да тачка B припада медијатриси дужи DA. Слично, из $CE = AC$ следи да тачка C припада медијатриси дужи AE.

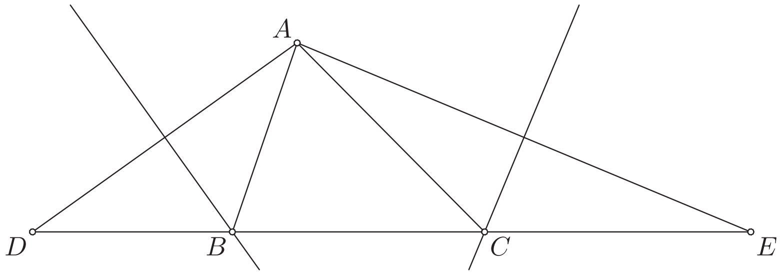
Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle ADE$ такав да је $DE = 2p$, $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$, $\measuredangle AED = \frac{\gamma}{2}$. Конструишимо медијатрисе дужи AD и AE и означимо редом њихове пресеке с дужи DE са B, C тако да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.



Доказ: Треба доказати да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$, да је $\measuredangle ABC = \beta$ и да је $\measuredangle BCA = \gamma$. ПК је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, па је $DE = DB + BC + CE$. Тачка B припада медијатриси дужи AD, па је $DB = AB$, а тачка C припада медијатриси дужи AE, па је $EC = AC$. Следи да је $DE = AB + BC + AC$. Такође, ПК је $DE = 2p$, па следи да је $AB + BC + AC = 2p$, односно да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$.

Из $DB = AB$ следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па имамо да је $\measuredangle DAB = \measuredangle ADB$. ПК важи да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$ и $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$, па је

$\measuredangle ADB = \measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle ADB$. Дакле, $\measuredangle ABC = \measuredangle DAB + \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$. Слично се доказује и да је $\measuredangle BCA = \gamma$.



Дискусија: Ако је $\beta + \gamma \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме су то унутрашњи углови, па задатак нема решења.

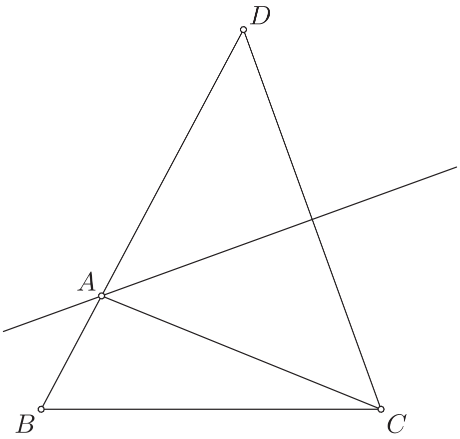
Нека је $\beta+\gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2} < \pi$, па постоји јединствен троугао $\triangle ADE$ до на подударност. Да ли медијатрисе страница AD и AE секу страницу DE редом у тачкама B, C тако да важи $\mathcal{B}(D, B, C, E)$? Угао $\measuredangle ADE = \frac{\beta}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AD, која је нормална на краку DA тога угла, сече његов други крак. Дакле, тачка B постоји и важи $B, E \doteqdot D$. Нама је потребно да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, E)$, а то је тачно ако је $\measuredangle DAB < \measuredangle DAE$. Како је $\measuredangle DAB = \measuredangle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle DAE = \pi - \measuredangle ADE - \measuredangle AED = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, следи да важи $\mathcal{B}(D, B, E)$ ако испуњено $\frac{\beta}{2} < \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, односно $\beta + \frac{\gamma}{2} < \pi$, што је испуњено, јер је $\beta + \gamma < \pi$. Треба још проверити да ли медијатриса странице AE сече EB у тачки C таквој да важи $\mathcal{B}(B, C, E)$, јер ће онда важити распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.

Угао $\measuredangle AEB = \measuredangle AED = \frac{\gamma}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AE, која је нормална на краку EA тога угла, сече његов други крак EB у тачки C таквој да је $B, C \doteqdot E$. При томе важи распоред $\mathcal{B}(E, C, B)$ ако је $\measuredangle EAC < \measuredangle EAB$. Како је $\measuredangle EAC = \measuredangle AEC = \frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle EAB = \pi - \measuredangle ABE - \measuredangle AEB = \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, следи да је $\mathcal{B}(E, C, B)$ испуњен ако је $\frac{\gamma}{2} < \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, односно ако је $\beta + \gamma < \pi$.

Дакле, ако је $\beta + \gamma < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност.

3) $\alpha, a, b+c$

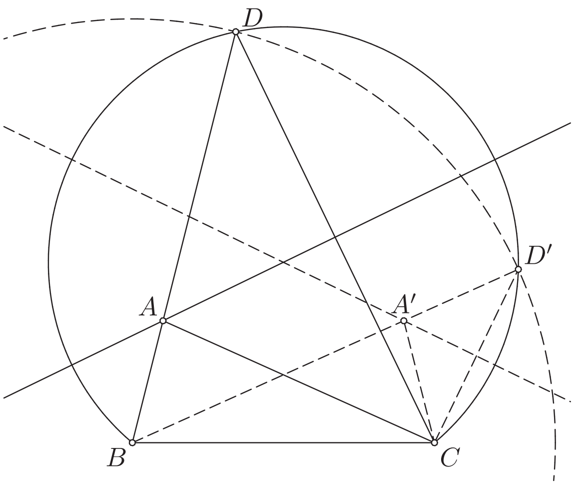
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка таква да важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$. Тада је $BD = BA + AD = BA + AC = b + c$. Такође, троугао $\triangle ACD$ је једнакокраки, па је $\measuredangle ADC = \measuredangle ACD = \varphi$. Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle ACD$. Следи да је $\alpha = \varphi + \varphi$, тј. $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, $\measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2}$.

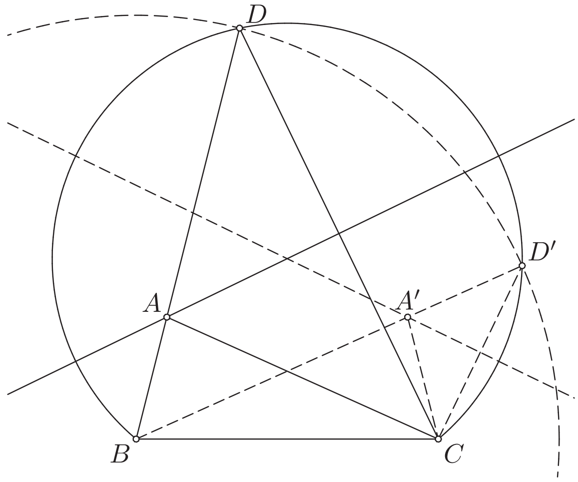
У троуглу $\triangle BCD$ је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\measuredangle BDC = \measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2}$, па тај троугао умемо да конструишемо. Из $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$ следи да тачка A припада пресеку медијатрисе странице CD и странице BD.

Конструкција:



Конструишимо троугао $\triangle BCD$ такав да је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Конструишимо медијатрису странице CD и означимо са A њен пресек са страницом BD (дакле, да важи $\mathcal{B}(D, A, B)$).

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$. ПК је $BC = a$. Тачка A припада страници BD, па важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $BD = BA + AD$. С друге стране, тачка A припада медијатриси странице CD, па је $AD = AC$. Дакле, $BD = BA + AC$, а како је ПК $BD = b + c$, следи да је $BA + AC = b + c$. Троугао $\triangle ACD$ је једнакокрак, па је $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC$. Како је ПК $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$, следи да је $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Угао $\measuredangle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle ACD$ и $\measuredangle ADC$. Следи да је $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD + \measuredangle ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.



Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Ако је $b + c \leq a$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је $b + c$ збир двеју страница а a трећа страница (због неједнакости троугла), па задатак нема решења.

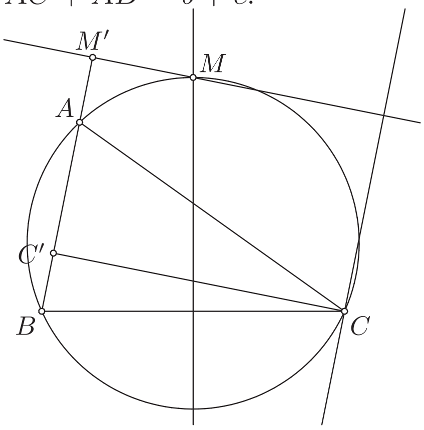
Нека је $\alpha < \pi$ и $b + c > a$. Да би постојао троугао $\triangle BCD$, потребно је да буде испуњено $BD \leq \frac{BC}{\sin \measuredangle BDC}$, односно $b + c \leq \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Нама није познато да ли је угао $\measuredangle BCD$ оштар, прав или туп. Како је $BD = b + c > a = BC$, следи да постоје два неподударна троугла $\triangle BCD$ ако је $b + c < \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, односно да је троугао $\triangle BCD$ јединствен ако је $b + c = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

Треба још проверити да ли медијатриса странице CD сече страницу BD, тј. да ли важи $\mathcal{B}(D, A, B)$. С обзиром на то да је $\measuredangle BDC = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, медијатриса дужи CD сигурно сече полуправу DB у некој тачки A (права нормална на једном краку оштрог угла сече други крак). Троугао $\triangle CDA$ је једнакокраки ($AC = AD$), па је $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \measuredangle BDC$. Тачка A припада дужи BD ако и само ако је $\measuredangle DCA < \measuredangle DCB$, односно ако и само ако је $\measuredangle BDC < \measuredangle DCB$. На основу неједнакости троугла, ово важи ако и само ако је $BC < DB$, тј. $a < b+c$, а ово смо претпоставили да важи. Дакле, за сваки од неподударних троуглова $\triangle BCD$ постоји тачка A, па постоје два неподударна троугла $\triangle ABC$.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $b+c > a$ и $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} > b+c$, постоје два неподударна решења. Ако је $\alpha < \pi$, $b+c > a$ и $\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = b+c$, постоји јединствено решење до на подударност. У супротном нема решења.

4) **а**) $\beta, h_c, b+c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Ако је C' подножје висине из темена C, онда је $\measuredangle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC + AB = b + c$.



Нека су M, M' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, M' \doteq BC$ и $MM' \perp AB$. Следи да је $\measuredangle M'BC = \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BM' = \frac{1}{2}(b+c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB, тј. правој BM', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак BC угла $\measuredangle M'BC$. Тачка M припада правој која је нормална на правој BM' у тачки M' и медијатриси дужи BC. Коначно, тачка A припада правој BM' и описаном кругу троугла $\triangle BCM$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка M припада на основу Великог задатка.

Конструкција: Конструишимо дуж $BM' = \frac{1}{2}(b+c)$. Конструишимо угао $\measuredangle M'Bq = \beta$. Конструишимо праву p која је паралелна правој BM', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак Bq угла $\measuredangle M'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C. Конструишимо медијатрису m дужи BC. Конструишимо нормалу n на правој BM' у тачки M'. У пресеку правих m и n означимо са M тачку такву да важи $M, M' \doteq BC$. Конструишимо описани круг l троугла $\triangle BMC$. У пресеку круга l и праве BM' означимо тачку A (различиту од тачке B) такву да важи $A, M' \doteq BC$.

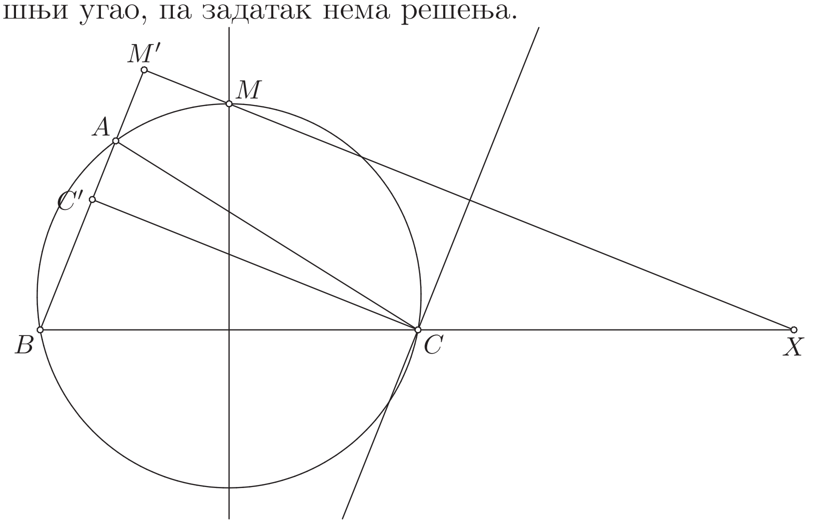
Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC = \beta$, $AC + AB = b + c$ и да је висина из темена C подударна дужи h_c.

ПК је $\measuredangle M'BC = \beta$ и $A, M' \ddot{-} BC$. Следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle M'BC = \beta$.

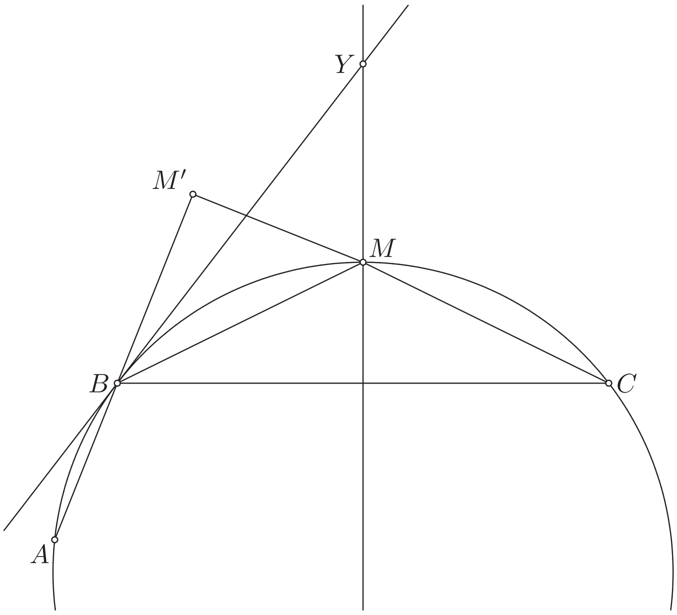
Тачка C припада правој која је паралелна правој BM', тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C, тј. ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

ПК круг l садржи тачке A, B, C, па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. ПК тачка M припада медијатриси m странице BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $M, M' \ddot{-} BC$ и $A, M' \ddot{-} BC$, па следи да важи $A, M \ddot{-} BC$. Према томе, тачка M је тачка из Великог задатка. Тачка M припада нормали n на правој BM', односно правој AB, у тачки M', па следи да је M' подножје нормале из тачке M на правој AB. Дакле, M' је тачка из Великог задатка. На основу Великог задатка је $BM' = \frac{1}{2}(AC + AB)$, а како је ПК $BM' = \frac{1}{2}(b+c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) = \frac{1}{2}(b+c)$, тј. да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није оштар, онда се нормала n на правој BM' у тачки M' и полуправа BC (крак угла $\measuredangle M'BC = \measuredangle M'Bq = \beta$) не секу. Тада је испуњено $M, M' \ddot{-} BC$. Ако је пак β оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X. Услов да важи $M, M' \ddot{-} BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos\beta = \frac{BM'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BM'}{\cos\beta}$, па услов да важи $M, M' \ddot{-} BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BM'}{\cos\beta}$. Како је $\sin\beta = \frac{CC'}{BC} = \frac{h_c}{BC}$, следи да је $BC = \frac{h_c}{\sin\beta}$, па добијамо $\frac{h_c}{2\sin\beta} < \frac{b+c}{2\cos\beta}$, тј. $h_c < (b+c)\operatorname{tg}\beta$.

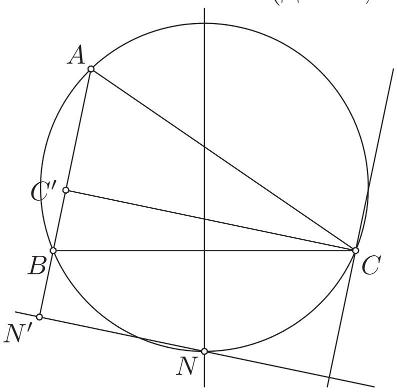


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити да се права BM' и круг l секу у тачкама A, B таквим да је $A, M' \doteq BC$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, M, M' \doteq BC$. Тада је $\measuredangle YBM$ угао између тетиве BM и тангенте t, па је подударан периферијском углу $\measuredangle BCM$ над тетивом BM. Троугао $\triangle BCM$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle MBC$ и $\measuredangle BCM$ подударни. Следи да је $\measuredangle YBM = \measuredangle BCM = \measuredangle MBC$. Услов да важи распоред $A, M' \doteq BC$ је да је угао $\measuredangle MBM'$ мањи од угла $\measuredangle MBY$, тј. од њему подударног угла $\measuredangle MBC$. Како је cos опадајућа функција на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos\measuredangle MBM' > \cos\measuredangle MBC$, тј. $\frac{BM'}{BM} > \frac{\frac{1}{2}BC}{BM}$, односно $BM' > \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b+c) > \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin\beta}$, тј. $h_c < (b+c)\sin\beta$. Овај услов је јачи од постојећег услова $h_c < (b+c)\operatorname{tg}\beta$ за оштре углове β, јер је $\sin\beta < \operatorname{tg}\beta$ за све $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, па је услов $h_c < (b+c)\operatorname{tg}\beta$ за оштре углове β сувишан. Такође, услов $h_c < (b+c)\sin\beta$ мора важити за све $\beta \in (0, \pi)$ да би постојало решење.

Дакле, ако је $\beta < \pi$ и $h_c \geq (b+c)\sin\beta$, нема решења, а ако је $\beta < \pi$ и $h_c < (b+c)\sin\beta$, постоји јединствено решење до на подударност.

б) $\beta, h_c, b-c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је C' подножје висине из темена C. Тада је $\measuredangle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC - AB = b - c$ (дакле, мора бити $AC > AB$).



Нека су N, N' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, N' \div BC$ (због $AB < AC$) и $NN' \perp AB$. Следи да је $\measuredangle N'BC = \pi - \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(b-c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB, тј. правој BN', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак BC угла $\measuredangle N'BC$. Тачка N припада правој која је нормална на правој BN' у тачки N' и медијатриси дужи BC. Коначно, тачка A припада правој BN' и описаном кругу троугла $\triangle BCN$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка N припада на основу задатка 1.9.

Конструкција: Конструишимо дуж $BN' = \frac{1}{2}(b-c)$. Конструишимо угао $\measuredangle N'Bq = \pi - \beta$. Конструишимо праву p која је паралелна правој BN', налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак Bq угла $\measuredangle N'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C. Конструишимо медијатрису m дужи BC. Конструишимо нормалу n на правој BN' у тачки N'. У пресеку правих m и n означимо са N тачку такву да важи $N, N' \mathbin{\ddot{-}} BC$. Конструишимо описани круг l троугла $\triangle BNC$. У пресеку круга l и праве BN' означимо са A тачку такву да важи $\mathcal{B}(A, B, N')$.

Доказ: Треба доказати да је $\measuredangle ABC = \beta$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је висина из темена C подударна дужи h_c.

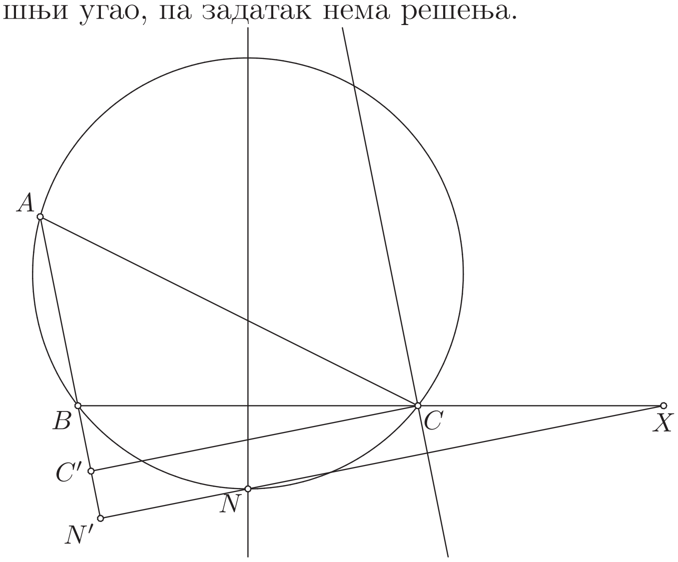
ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$ и $\measuredangle N'BC = \pi - \beta$, па је $\measuredangle ABC = \pi - \measuredangle N'BC = \pi - (\pi - \beta) = \beta$.

Тачка C припада правој која је паралелна правој BN', тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C, тј.

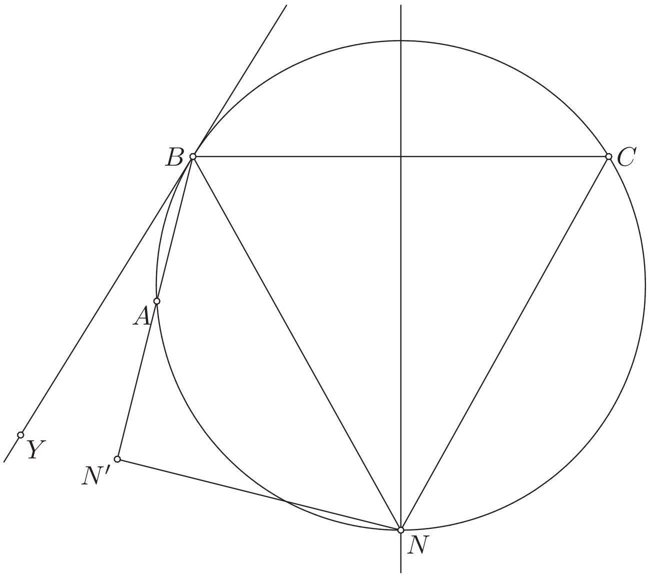
ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

Круг l садржи тачке A, B, C, па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. Тачка N припада медијатриси m странице BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$, па следи да важи $A, N' \div BC$, а како ПК важи $N, N' \doteqdot BC$, следи да важи $A, N \div BC$. Према томе, тачка N је тачка из Великог задатка. Тачка N припада нормали n на правој BN', односно правој AB, у тачки N', па следи да је N' подножје нормале из тачке N на правој AB. Дакле, N' је тачка из Великог задатка. Због $\mathcal{B}(A, B, N')$, следи да је $AN' > AB$, а на основу Великог задатка је $AN' = \frac{1}{2}(AC + AB)$ (ово важи без обзира на то да ли је $AB < AC$ или није), па следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) > AB$, односно $AC + AB > 2AB$, тј. $AC > AB$. Сада основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(AC - AB)$, а како је ПК $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}(b - c)$, тј. да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није туп, онда $\pi - \beta$ није оштар, па се нормала n на правој BN' у тачки N' и полуправа BC (крак угла $\measuredangle N'BC = \measuredangle N'Bq = \pi - \beta$) не секу. Тада је испуњено $N, N' \doteqdot BC$. Ако је пак β туп, тј. $\pi - \beta$ оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X. Услов да важи $N, N' \doteqdot BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos(\pi - \beta) = \frac{BN'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BN'}{\cos(\pi-\beta)}$, па услов да важи $N, N' \doteqdot BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BN'}{\cos(\pi-\beta)}$. Како је $\sin(\pi - \beta) = \frac{CC'}{BC}$, следи да је $BC = \frac{CC'}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{h_c}{\sin(\pi-\beta)}$, па добијамо $\frac{h_c}{2\sin(\pi-\beta)} < \frac{b-c}{2\cos(\pi-\beta)}$, тј. $h_c < (b - c)\,\mathrm{tg}(\pi - \beta)$.

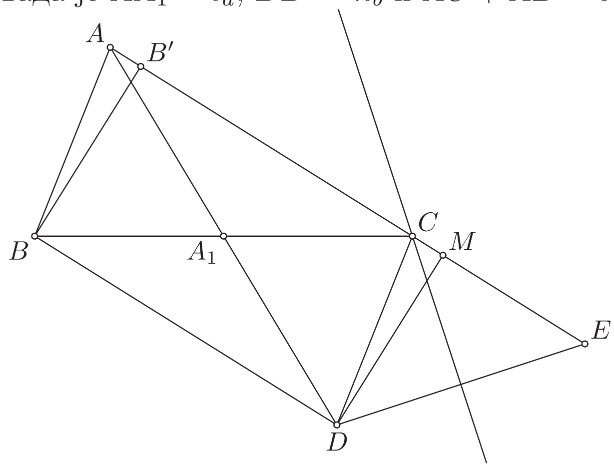


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, N, N' \doteqdot BC$. Тада је $\measuredangle YBN$ угао између тетиве BN и тангенте t, па је подударан периферијском углу $\measuredangle BCN$ над тетивом BN. Троугао $\triangle BCN$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle NBC$ и $\measuredangle BCN$ подударни. Следи да је $\measuredangle YBN = \measuredangle BCN = \measuredangle NBC$. Услов да важи распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$ је да је угао $\measuredangle N'BN$ већи од угла $\measuredangle YBN$, тј. од њему подударног угла $\measuredangle NBC$. Како је cos опадајућа функција на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos\measuredangle N'BN < \cos\measuredangle NBC$, тј. $\frac{BN'}{BN} < \frac{\frac{1}{2}BC}{BN}$, односно $BN' < \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b-c) < \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin\beta}$, тј. $(b-c)\sin\beta < h_c$ (важи $\sin(\pi-\beta) = \sin\beta$).

Према томе, ако је $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ и $(b-c)\sin\beta < h_c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Такође, ако је $\beta > \frac{\pi}{2}$ и $(b-c)\sin\beta < h_c < (b-c)\,\mathrm{tg}(\pi-\beta)$, задатак има јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

5) **a**) $t_a, h_b, b+c$

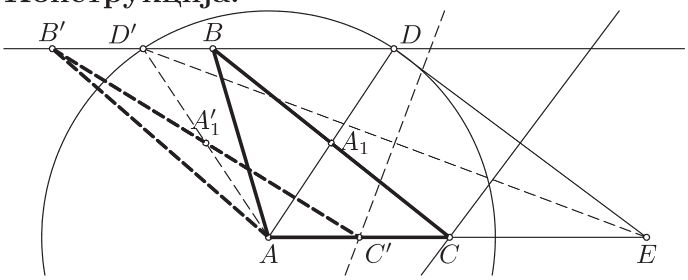
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B. Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1. Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1, па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC + CE = AC + CD = AC + AB = b + c$, а како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због услова $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADE$ је $AD = 2t_a$ и $AE = b+c$, а висина DM је подударна дужи h_b. То значи да тачка D припада правој која је паралелна правој AE и налази се на растојању h_b од ње, као и да припада кругу с центром у A и полупречником $2t_a$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE. Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1, па је A_1 средиште дужи AD. Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC, па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AE = b + c$. Конструишимо праву p паралелну са AE на растојању h_b од ње. Конструишимо круг $k(A, 2t_a)$. У пресеку круга k и праве p означимо тачку D. Конструишимо симетралу дужи DE. У њеном пресеку с дужи AE означимо тачку C (дакле, $\mathcal{B}(A, C, E)$). Означимо с A_1 средиште дужи AD и са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1.

Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a, да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC + AB = b + c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A. Takoђе, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD, па следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1, па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је M подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. Како C припада правој AE, следи да су праве AC и AE исте, па из $AC \parallel BD$ следи да је $AE \parallel BD$. Права p садржи D и паралелна је са AE, па како и права BD садржи D и паралелна је са AE, следи да су праве p и BD исте, тј. да $B \in p$. Све тачке с праве p су на растојању h_b од праве AE, тј. од праве AC, па како је $BM \perp AC$, следи да је $BM = h_b$, што је и требало доказати.

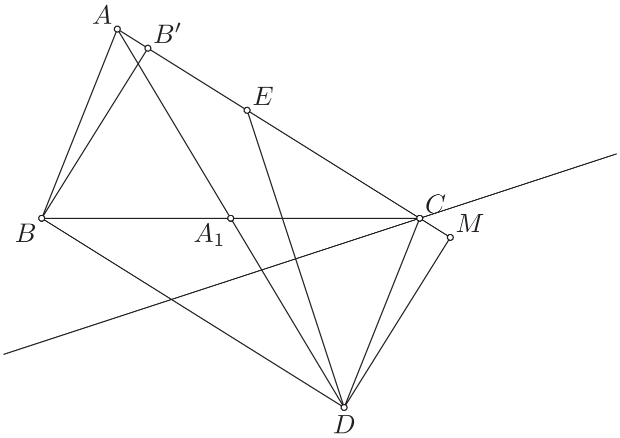
Коначно, C припада симетрали дужи DE, па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. По конструкцији је $\mathcal{B}(A, C, E)$, па је $AE = AC + CE = AC + AB$, а такође је по конструкцији $AE = b + c$, па следи да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Да би круг $k(A, 2t_a)$ и права p имали заједничких тачака, мора бити $2t_a \geq h_b$. Заиста, права p је на растојању h_b од праве AE, што значи да за сваку тачку X са праве p важи $XA \geq h_b$. Ако је $2t_a = h_b$, онда имамо јединствену пресечну тачку D праве p и круга $k(A, 2t_a)$, а ако је $2t_a > h_b$, имамо две такве тачке D. Из Дискусије у делу **3)** овог задатка следи да симетрала странице DE троугла $\triangle ADE$ сече страницу AE у тачки C таквој да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ ако и само ако је $AD < AE$, тј. ако и само ако је $2t_a < b + c$.

Дакле, ако је $h_b = 2t_a < b + c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Ако је $h_b < 2t_a < b + c$, задатак има два неподударна решења. У осталим случајевима задатак нема решења.

б) $t_a, h_b, b - c$

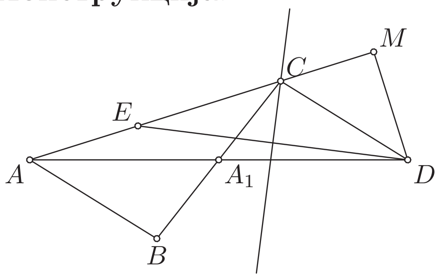
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B. Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC - AB = b - c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1. Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1, па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, E, C)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC - CE = AC - CD = AC - AB = b - c$ и троугао $\triangle CDE$ је једнакокрак, па важи $\measuredangle CED = \measuredangle CDE$ и то су оштри углови. Следи да је $\measuredangle AED = \pi - \measuredangle CED$ туп угао, па важи распоред $\mathcal{B}(A, E, M)$. Дакле, тачка E је на страници AM таква да је $AE = b - c$. Како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADM$ је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$, па умемо да га конструишемо. Тачка E је таква да је $\mathcal{B}(A, E, M)$ и $AE = b - c$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE. Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1, па је A_1 средиште дужи AD. Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC, па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1.

Конструкција:



Конструишимо троугао $\triangle ADM$ такав је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$. На дужи AM означимо тачку E такву да је $AE = b - c$ (дакле, $\mathcal{B}(A, E, M)$). Конструишимо симетралу дужи ED и означимо са C њен пресек са правом AE тако да важи $\mathcal{B}(A, E, C)$. Означимо с A_1 средиште дужи AD и означимо са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1.

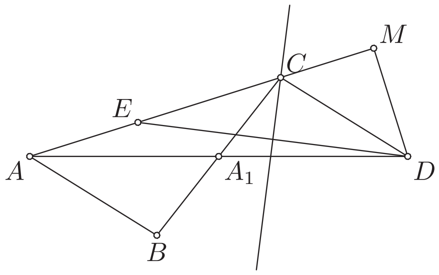
Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a, да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A. Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD, следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1, па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је B' подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. ПК је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AM$, а како су A, C, M колинеарне, следи да је $BB' \perp AM$, па важи $BB' \parallel DM$. Ово заједно са $AC \parallel BD$ и чињеницом да су праве $B'M$ и AC исте јер су тачке A, B', M, C колинеарне, следи да је $BD \parallel B'M$, па је четвороугао $BB'MD$ паралелограм (штавише правоугаоник, јер је $BB' \perp B'M$), што значи да је $BB' = DM$. ПК је $DM = h_b$, па је $BB' = h_b$.

Коначно, C припада симетрали дужи DE, па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. ПК је $\mathcal{B}(A, E, C)$, па је $AC > CE$, односно $AC > AB$. Такође, важи $AE = AC - CE = AC - AB$, а ПК је $AE = b - c$, па следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Да би троугао $\triangle ADM$ могао да се конструише, мора бити $AD > DM$ (јер је AD хипотенуза, а DM је катета правоуглог троугла $\triangle ADM$), тј. мора бити $2t_a > h_b$. Даље, да би било $\mathcal{B}(A, E, M)$, мора бити $AE < AM$. Из Питагорине теореме следи да је $AD^2 = AM^2 + DM^2$, па је $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(2t_a)^2 - h_b^2} = \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$. Дакле, како је $AE = b - c$, добијамо услов $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$.

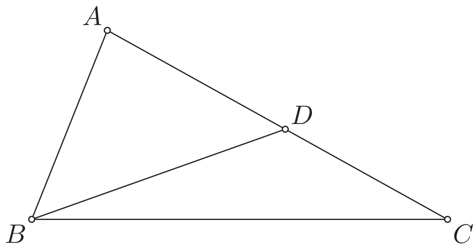


Остаје још да проверимо да ли је испуњено $\mathcal{B}(A,E,C)$. Угао $\measuredangle MED$ је оштар, јер је један од углова правоуглог троугла $\triangle MED$ који није прав ($\measuredangle EMD = \measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$ јер важи $\mathcal{B}(A,E,M)$). Следи да симетрала дужи ED сече крак EM оштрог угла $\measuredangle MED$ у тачки C таквој да важи $M, C \doteqdot E$, па како важи $A, M \div E$, следи да важи $A, C \div E$, тј. $\mathcal{B}(A,E,C)$.

Према томе, ако је $2t_a > h_b$ и $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

6) $\beta - \gamma, b, c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$ и важи $AC = b$, $AB = c$ и $\measuredangle ABC - \measuredangle ACB = \beta - \gamma$.



Како је наспрам већег угла већа страница, следи да је $AC > AB$, тј. да је $b > c$. Нека је D тачка таква да је $\mathcal{B}(A,D,C)$ и $AD = AB$. Тада је троугао $\triangle ABD$ једнакокрак, па је $\measuredangle ADB = \measuredangle ABD = \frac{\pi - \measuredangle BAC}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}$. С друге стране, угао $\measuredangle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle CBD = \varphi$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA = \gamma$. Дакле, $\frac{\beta+\gamma}{2} = \varphi + \gamma$, па је $\varphi = \frac{\beta+\gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta+\gamma-2\gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{2}$ Дакле, $\measuredangle CBD = \frac{\beta-\gamma}{2}$, тј. дуж CD се из тачке B види под углом $\frac{\beta-\gamma}{2}$.