симетрије поново централна симетрија.

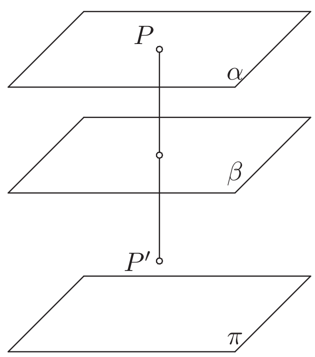
Индуктивни корак: Како је $2(n+1)-1 = 2n+2-1 = 2n+1$, треба доказати да је композиција произвољне $2n+1$ централне симетрије поново централна симетрија. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ произвољне тачке простора $\mathbf{S}$ и нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$. Потребно је доказати да је $\mathfrak{I}$ централна симетрија. Према индуктивној хипотези, пресликавање $\mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија, тј. $\mathcal{S}_B$, за неку тачку B. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA_{2n}}}$. Нека је тачка C таква да је $\overrightarrow{CA_{2n+1}} = \overrightarrow{BA_{2n}}$. Тада је $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA_{2n}}} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CA_{2n+1}}}$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CA_{2n+1}}} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_C$, тј. пресликавање $\mathfrak{I}$ је централна симетрија.

На основу принципа математичке индукције, за сваки природан број n и произвољне тачке $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ простора $\mathbf{S}$ важи да је пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ централна симетрија. Другим речима, композиција непарног броја централних симетрија је централна симетрија, што је и требало доказати.

4. Одредити тип изометрије $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$.

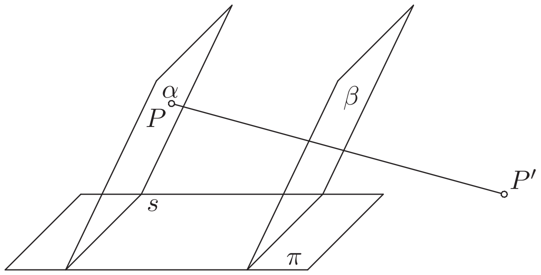
Решење: Нека је α раван која садржи тачку P и нормална је на PP' и нека је β раван која садржи средиште дужи PP' и нормална је на њој. Тада је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$. Разликујемо два случаја:

1° Равни α, β, π припадају једном прамену. Пошто су равни α, β међусобно паралелне (јер су нормалне на PP'), овај случај се остварује ако је $\pi \perp PP'$.

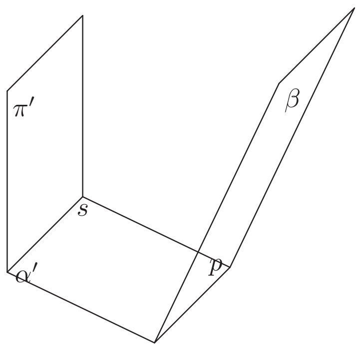


Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\gamma$, за неку раван γ тог прамена, тј. за неку раван γ нормалну на PP'. Дакле, у овом случају је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексија.

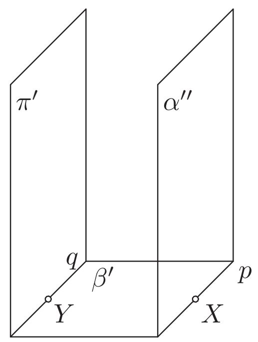
2° Равни α, β, π не припадају једном прамену, тј. $\pi \not\perp PP'$.



Нека је $s = \alpha \cap \pi$ пресечна права равни α, π (она постоји јер ове равни нису паралелне). Тада је $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s, 2\measuredangle(\pi,\alpha)}$. Нека су α', π' равни које се секу по правој s и оријентисани угао диедра који граде равни π', α' је исти као оријентисани угао диедра који граде равни π, α, при чему је $\alpha' \perp \beta$. Тада је $\mathcal{R}_{s, 2\measuredangle(\pi,\alpha)} = \mathcal{S}_{\alpha'} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$. Одавде следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$.



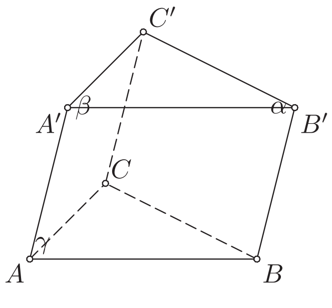
Равни α', β су нормалне, па се секу по правој $p = \alpha' \cap \beta$. Следи да важи $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{S}_p$. Нека су α'', β' равни које се секу по правој p и међусобно су нормалне, при чему је $\beta' \perp \pi'$. Тада је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha''} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$. При томе, ниједна тачка праве s не припада равни β (јер су α, β паралелне), па следи да ниједна тачка праве s не припада правој p. Како праве s, p припадају равни α', а немају заједничких тачака, следи да су оне паралелне, па су паралелне и права p и раван π'.



Нека је q пресечна права равни β', π'. Како ниједна тачка праве p не припада равни π', онда не припада ни правој q, а пошто праве p, q припадају равни β', следи да су оне паралелне. Ако је X произвољна тачка са праве p и Y подножје нормале из X на правој q, онда је XY нормална и на правој p. Ако је p' права нормална на p у тачки X која припада равни α'', онда је угао између правих p', XY нагибни угао диедра који граде равни α'', β', што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, XY је нормална на правима p, p' равни α'' па је нормална на равни α''. Слично се добија и да је XY нормална на равни π'. Према томе, $\alpha'' \parallel \pi'$ и $\mathcal{S}_{\alpha''} \circ \mathcal{S}_{\pi'} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}}$. Вектор $\overrightarrow{YX}$ је паралелан равни β', па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}} = \mathcal{G}_{\beta', 2\overrightarrow{YX}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ клизајућа рефлексија.

5. Доказати да је композиција три раванске рефлексије којима су основе одређене бочним пљоснима тростране призме $ABCA'B'C'$ клизајућа рефлексија тог простора.

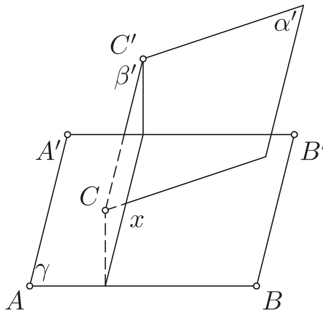
Решење:



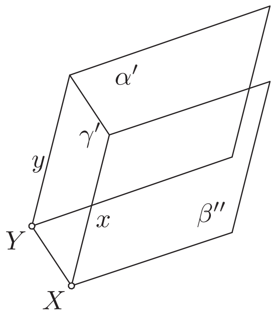
Нека је α раван $BB'C'C$, β раван $AA'C'C$ и γ раван $AA'B'B$. Потребно је доказати да је изометрија $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ клизајућа рефлексија.

Пошто је $CC' = \alpha \cap \beta$, следи да је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{CC', 2\measuredangle(\alpha,\beta)}$. Нека су α', β' равни такве да је $\alpha' \cap \beta' = CC'$ и оријентисани угао диедра који граде равни α', β' једнак оријентисаном углу диедра који граде равни α, β, при чему је $\beta' \perp \gamma$. Тада је $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{R}_{CC', 2\measuredangle(\alpha,\beta)} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$, па је

$\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$.



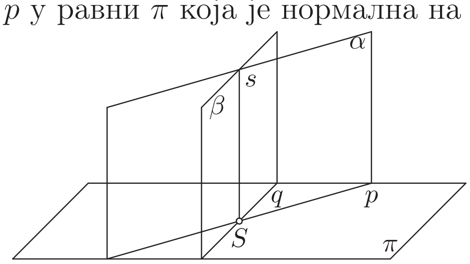
Равни β', γ су нормалне, па се секу по правој $x = \beta' \cap \gamma$. Следи да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} = \mathcal{S}_x$. Нека су β'', γ' равни које се секу по правој x и међусобно су нормалне, при чему је $\gamma' \perp \alpha'$. Тада је $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''}$. Према томе, следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$. Права CC' је паралелна равни γ ($CC' \parallel AA'$ као бочне ивице призме $ABCA'B'C'$, а права AA' припада равни γ), па ниједна тачка са праве CC' не припада равни γ, па самим тим ни правој x. Како праве CC', x припадају равни β', следи да су оне паралелне, па су паралелне и права x и раван α'.



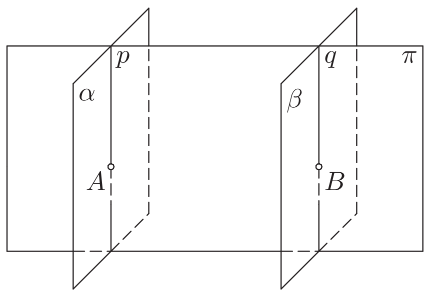
Нека је y пресечна права равни α', γ'. Како ниједна тачка праве x не припада равни α', онда не припада ни правој y, а пошто праве x, y припадају равни γ', следи да су оне паралелне. Ако је X произвољна тачка са праве x и Y подножје нормале из X на правој y, онда је XY нормална и на правој x. Ако је p права нормална на x у тачки X која припада равни β'', онда је угао између правих p, XY нагибни угао диедра који граде равни β'', γ', што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, XY је нормална на правима x, p равни β'' па је нормална на равни β''. Слично се добија и да је XY нормална на равни α'. Према томе, $\alpha' \parallel \beta''$ и $\mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}}$. Вектор $\overrightarrow{YX}$ је паралелан равни γ', па закључујемо да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}} = \mathcal{G}_{\gamma', 2\overrightarrow{YX}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ клизајућа рефлексија.

6. Одредити тип и компоненте изометрије која представља композицију двеју осних рефлексија $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ еуклидског простора, у зависности од узајамног положаја правих p и q.

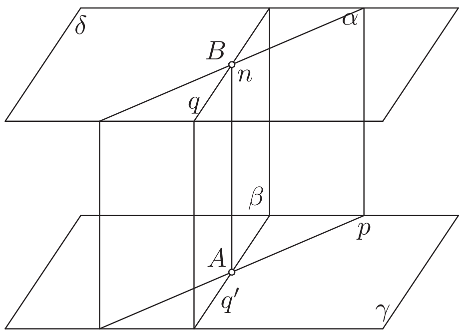
Решење: Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$. Две праве у простору могу припадати истој равни и тада се поклапају, секу у једној тачки или су паралелне, а ако не постоји раван која их садржи, онда су оне мимоилазне.
1° Праве p, q се поклапају. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{E}$.
2° Праве p, q се секу у тачки S. Нека је π раван која садржи праве p, q, нека је s права која садржи тачку S и нормална је на равни π, нека је α раван која садржи праве s, p и нека је β раван која садржи праве s, q. За сваку од равни α, β важи да садржи праву s која је нормална на равни π, па важи $\alpha, \beta \perp \pi$. Следи да је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$ и да је $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{R}_{s, 2\measuredangle(\beta,\alpha)}$. Оријентисани угао диедра чије су пљосни β, α једнак је оријентисаном углу између правих q, p у равни π која је нормална на s, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s, 2\measuredangle(q,p)}$.



3° Праве p, q су паралелне. Нека је π раван која садржи праве p, q, α раван која садржи p и нормална је на равни π и β раван која садржи q и нормална је на равни π. Тада је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$ и $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$. Нека је A произвољна тачка праве p и B подножје нормале из тачке A на правој q. Пошто су p, q паралелне, следи да је AB нормална и на правој p. Ако је p' нормала у тачки A на правој p која припада равни α, онда је угао између правих p', AB нагибни угао диедра који граде α, π, што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, $AB \perp \alpha$, а слично је и $AB \perp \beta$, што значи да су равни α, β паралелне и да је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$.

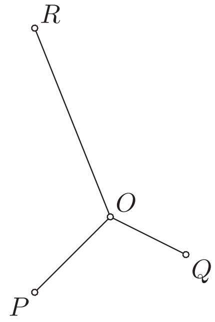


4° Праве p, q су мимоилазне. Тада постоји њихова јединствена заједничка нормала n која их сече редом у тачкама A, B. Нека је α раван која садржи праве p, n, β раван која садржи праве q, n, γ раван која садржи A и нормална је на правој n, а δ раван која садржи B и нормална је на правој n. Равни α, γ се секу по правој p, а пошто раван α садржи праву n која је нормална на равни γ, следи да је $\alpha \perp \gamma$. Према томе, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\gamma$. Слично, равни β, δ се секу по правој q, а пошто раван β садржи праву n која је нормална на равни δ, следи да је $\beta \perp \delta$. Према томе, $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\delta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\delta$. Раван β садржи праву n која је нормална на равни γ, па је $\beta \perp \gamma$. Следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$. Нека је q' пресечна права равни β, γ. Тада је $q' \parallel q$ (обе праве припадају равни β, а пошто је $n \perp \gamma$, онда је $n \perp q'$, а важи и $n \perp q$), па је угао између мимоилазних правих q, p исти као угао између правих q', p. Равни α, β се секу по правој n и оријентисани угао диедра чије су пљосни β, α једнак је оријентисаном углу између правих q', p у равни γ која је нормална на n, па је $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{R}_{n, 2\measuredangle(q', p)}$. Можемо рећи да је и оријентисани угао између мимоилазних правих q, p једнак оријентисаном углу између правих q', p. Такође, равни γ, δ су нормалне на правој n, па је $\gamma \parallel \delta$. Следи да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{n, 2\measuredangle(q,p)} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}} = \mathcal{Z}_{n, 2\measuredangle(q,p), 2\overrightarrow{BA}}$.



7. Нека су OP, OQ, OR три међусобно нормалне дужи простора. Доказати да је композиција $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ транслација.

Решење:



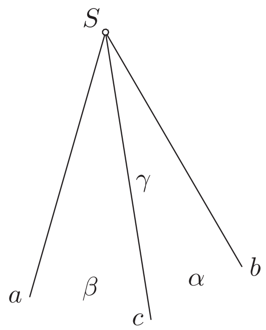
Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$. Пошто важи да је $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}} = \mathcal{S}_{OP} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}$, $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{OQ}$ и $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} = \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OR}}$, следи да је

$$\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{S}_{OQ} \circ \mathcal{S}_{OP} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}.$$

Композиција транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}}$ је транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}}$, а на основу претходног задатка је $\mathcal{S}_{OQ} \circ \mathcal{S}_{OP}$ ротација око праве која је у тачки O нормална на OP, OQ, што је права OR, за двоструки угао који заклапају праве OP, OQ, што је опружени угао, јер су праве OP, OQ међусобно нормалне. Дакле, $\mathcal{S}_{OQ} \circ \mathcal{S}_{OP} = \mathcal{S}_{OR}$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}$. На основу теореме о трансмутацији је $\mathcal{S}_{OR} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{S}_{OR}$ транслација, па је $\mathfrak{I}$ композиција те транслације и транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{OP}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ транслација.

8. Доказати да је у еуклидском простору композиција састављена од три раванске рефлексије којима су основе одређене пљоснима триедра осноротациона рефлексија.

Решење: Нека је α раван која садржи пљосан Sbc, β раван која садржи пљосан Sac и γ раван која садржи пљосан Sab триедра $Sabc$. Потребно је доказати да је изометрија $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ осноротациона рефлексија.



Изометрија $\mathfrak{I}$ је индиректна, јер је композиција трију индиректних изометрија. Како тачка S припада свим трима равнима α, β, γ, следи

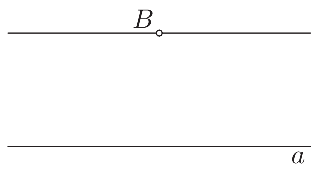
$$\mathfrak{I}(S) = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(S) = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta(S) = \mathcal{S}_\gamma(S) = S,$$

па је S фиксна тачка изометрије $\mathfrak{I}$. Према томе, $\mathfrak{I}$ није клизајућа рефлексија. Претпоставимо да је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексија. На основу теореме 37, онда равни α, β, γ припадају једном прамену. Како се равни α, β секу по правој која садржи ивицу Sc триедра $Sabc$, тај прамен мора бити коаксијални прамен равни, те онда раван γ такође садржи ту праву, па и ивицу Sc. Међутим, како раван γ садржи ивице Sa, Sb, следи да све ивице триедра $Sabc$ припадају равни γ, што није могуће. Дакле, $\mathfrak{I}$ не може бити раванска рефлексија, па мора бити осноротациона рефлексија.

8 Хиперболичка геометрија

До сад смо изучавали еуклидску геометрију, која је заснована на 5 група аксиома (инциденције, распореда, подударности, непрекидности и паралелности). Без аксиоме паралелности се може доказати да за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоји бар једна права која садржи тачку B, а с правом a нема заједничких тачака. Аксиома паралелности одређује број таквих правих.

Аксиома (Плејфер)**.** *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку B, а с правом a нема заједничких тачака.*

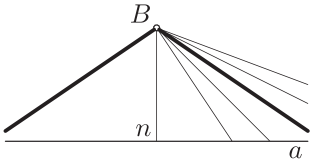


Може се доказати да ако постоје права a и тачка B с овом особином, онда свака права и тачка која јој не припада имају ову особину. Према томе, у еуклидској геометрији за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоји јединствена права која садржи B и паралелна је са a.

Ова аксиома је еквивалентна петом постулату из Еуклидових Елемената. Он је скоро две хиљаде година окупирао највеће математичке умове. Еуклидска геометрија је сматрана за једину „исправну” геометрију и многи су покушавали да докажу да је пети Еуклидов постулат последица осталих аксиома и постулата из Елемената. У терминима аксиома на којима се данас заснива еуклидска геометрија, сматрало се да је Плејферова аксиома последица аксиома из осталих група. Међутим, испоставило се да то није тачно и да је Плејферова аксиома независна од осталих. Према томе, сасвим је исправно посматрати геометрију у којој поред аксиома прве четири групе важи и следећа аксиома.

Аксиома (Лобачевски)**.** *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни постоји више од једне праве која садржи тачку B, а с правом a нема заједничких тачака.*

Може се доказати да ако постоје права a и тачка B с овом особином, онда свака права и тачка која јој не припада имају ову особину. Дакле, ако усвојимо ову аксиому, онда за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже тачку B и немају заједничких тачака с правом a. Геометрија заснована на овој аксиоми назива се *хиперболичком геометријом.*



Приметимо да овде није употребљен израз „паралелне", као што је то био случај у еуклидској геометрији. Разлог томе је што нећемо сваке две дисјунктне праве једне равни звати паралелним, већ само оне које испуњавају одређено својство. Наиме, нека је a права и B тачка која јој не припада. У њима одређеној равни, посматрајмо све полуправе чије је теме тачка B. Неке од тих полуправих секу праву a, а неке је не секу. Нека је n нормала из тачке B на правој a. У свакој од двеју полуравни на које права n дели ту раван могуће је скуп свих полуправих с теменом B поделити на подскуп оних које секу a и подскуп оних које је не секу. При томе, свака полуправа припада тачно једном од тих скупова и не постоји ниједна права из једног подскупа која се налази „између" неких двеју из другог подскупа, односно, не постоји полуправа која не сече a, а припада конвексном углу који граде неке две полуправе које секу праву a, као ни полуправа која сече a, а припада конвексном углу који граде неке две које не секу праву a. На основу аксиома непрекидности и њених последица следи да у свакој од полуравни на које права n дели раван постоји тачно једна полуправа која је **гранична**, тј. која се налази на граници између оних које секу и оних које не секу праву a. Те две граничне полуправе не секу праву a и њих називамо *паралелним* правој a, а тако називамо и праве које садрже те полуправе. Све остале праве које не секу праву a су *хиперпаралелне* правој a.

Оваква дефиниција паралелности уводи се и у еуклидској геометрији, а главну разлику између еуклидске и хиперболичке геометрије чини то што у еуклидској геометрији полуправе које су паралелне правој a припадају **једној правој**, а у хиперболичкој геометрији ове полуправе припадају **двема разним правима**.

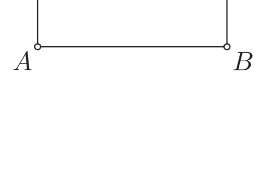
Хиперболичка геометрија има доста сличности с еуклидском геометријом, јер деле четири групе аксиома. Све теореме еуклидске геометрије, које се могу доказати без коришћења Плејферове аксиоме и њених последица, важе и у хиперболичкој геометрији. Примери оваквих теорема су Ставови о подударности троуглова (наведени у глави 1), постојање јединствене праве једне равни која садржи дату тачку и управна је на датој правој, Кошијева теорема о нормалности праве и равни, постојање јединствене праве у простору која садржи дату тачку и управна је на датој равни итд. Исто тако, теореме еуклидске геометрије, које се не могу доказати без коришћења Плејферове аксиоме и њених последица, не важе у хиперболичкој геометрији. Примере оваквих теорема видећемо кроз задатке, а за сада наведимо неке кључне ствари које важе у хиперболичкој геометрији.

1. Збир углова троугла је мањи од 180°.
2. Збир углова простог, равног четвороугла је мањи 360°.
3. Постоји права у равни нормална на једном краку оштрог угла која не сече његов други крак.
4. Централни угао је већи од двоструког одговарајућег периферијског угла.
5. Постоји троугао око којег се не може описати круг.

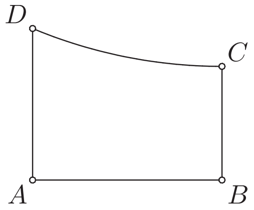
Збир углова у троуглу може бити било који угао мањи од 180°, односно није исти за све троуглове. Исти закључак важи и за просте, равне четвороуглове.

Пошто паралелност нема исти смисао као у еуклидској геометрији, немамо паралелограм, нити тврђења везана за паралелограм. Пошто је збир углова сваког простог, равног четвороугла мањи од 360°, не постоји четвороугао с четири права угла, па не постоји ни правоугаоник. У намери да докажу Плејферову аксиому на основу аксиома осталих група, математичари Ђ. Ђ. Сакери и Ј. Х. Ламберт посматрали су одређене врсте четвороуглова и покушавали су да докажу да они морају бити правоугаоници. Наведимо дефиниције ових четвороуглова.

Дефиниција 56. Нека је $ABCD$ четвороугао у равни такав да важи $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = 90^\circ$ и $AD = BC$. Овакав четвороугао назива се *Сакеријевим четвороуглом.* Страница AB назива се *основицом* Сакеријевог четвороугла, страница CD назива се *противосновицом*, а подударне странице AD, BC називају се *бочним страницама* Сакеријевог четвороугла.



Дефиниција 57. Нека је $ABCD$ четвороугао који има три права угла. Овакав четвороугао назива се *Ламбертовим четвороуглом.* Ако су углови $\measuredangle DAB, \measuredangle ABC, \measuredangle BCD$ прави, онда су странице AB, BC *основне странице* Ламбертовог четвороугла $ABCD$.



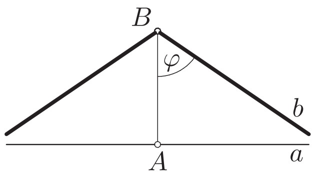
У еуклидској геометрији су Сакеријеви и Ламбертови четвороуглови правоугаоници. У хиперболичкој геометрији не постоје правоугаоници.

У хиперболичкој геометрији важи свих пет ставова о подударности троуглова. Испоставља се да постоји још један став о подударности троуглова.

Став 6 (УУУ)**.** *Нека су дати троуглови* $\triangle ABC$ *и* $\triangle A'B'C'$. *Ако важи* $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, *онда следи да је* $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Последица. *У хиперболичкој геометрији сличност је исто што и подударност.*

Према томе, у хиперболичкој геометрији не важе ни Талесова теорема ни њене последице.



Вратимо се аксиоми Лобачевског и дефиницији паралелности правих. Нека је a права и B тачка која јој не припада. Нека је A подножје нормале из тачке B на правој a, Bb једна од двеју полуправих с теменом B које су паралелне правој a и $\measuredangle ABb = \varphi$. Пошто је полуправа Bb гранична полуправа, која у полуравни с рубом BA која садржи полуправу Bb раздваја полуправе с теменом B које секу праву a од оних које је не секу, следи да било која полуправа с теменом B, која припада углу $\measuredangle ABb$, сече праву a. Дакле, ако је полуправа Bp таква да је $\measuredangle ABp < \varphi$, онда Bp сече a, а ако је $\varphi < \measuredangle ABp < \pi$, онда Bp не сече a, али није ни паралелна правој a. Угао φ се назива *углом паралелности* тачке B у односу на праву a.

Угао паралелности је, наравно, могуће дефинисати и у еуклидској геометрији. Међутим, у еуклидској геометрији је угао паралелности увек прав, па није претерано занимљив за разматрање. За разлику од еуклидске геометрије, у хиперболичкој геометрији је угао паралелности увек оштар. Није тешко доказати да угао паралелности зависи само од дужине дужи AB. Зато је могуће дефинисати функцију $\Pi : (0, +\infty) \longrightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, која слика дужи у одговарајуће углове паралелности. Дакле, $\Pi(AB) = \varphi$. Ова функција назива се *функцијом Лобачевског*. Она је непрекидна, строго опадајућа и важи $\lim\limits_{x \to 0+} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \Pi(x) = 0$. Пошто је строго опадајућа, постоји њен инверз Π^{-1}. У задацима ћемо сматрати да су функције Π, Π^{-1} познате.

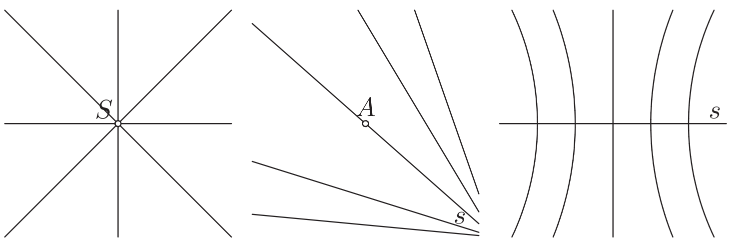
Што се тиче хиперпаралелности, важи следећа теорема.

Теорема 48. *Две праве у равни су хиперпаралелне ако и само ако постоји права n која је управна на обема. Ако таква права постоји, она је јединствена.*

Ако би постојале две заједничке нормале хиперпаралелних правих, њихове пресечне тачке са тим правима биле би темена правоугаоника (четвороугла који има четири права угла), а правоугаоник не постоји у хиперболичкој геометрији.

Споменимо још који типови праменова правих постоје у равни хиперболичке геометрије.

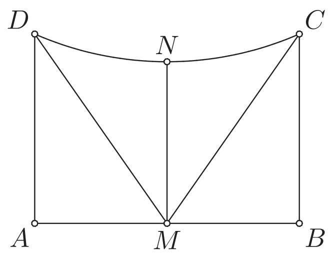
Дефиниција 58. 1. Скуп свих правих једне равни које садрже неку тачку S те равни чине *елиптички прамен*, тј. *прамен конкурентних правих*. Тачка S је *средиште* тог прамена.
2. Скуп свих правих једне равни које су паралелне некој полуправој As те равни, заједно са правом која садржи ту полуправу, чине *параболички прамен*, тј. *прамен паралелних правих* (у истом смеру).
3. Скуп свих правих једне равни које су управне на некој правој s те равни чине *хиперболички прамен*, тј. *прамен хиперпаралелних правих* које имају исту заједничку нормалу s. Права s је *основица* тог прамена.



Нека је $\mathcal{X}$ прамен правих у равни и X произвољна тачка те равни која није средиште елиптичког прамена (ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен). *Епицикл* је скуп тачака у равни које су осносиметричне тачки X у односу на праве прамена $\mathcal{X}$. Ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен са средиштем S, епицикл је *круг* са *средиштем* (*центром*) S и *полупречником* SX. Ако је $\mathcal{X}$ параболички прамен, епицикл је *орицикл*. Ако је $\mathcal{X}$ хиперболички прамен с основицом s, епицикл је скуп свих тачака Y у полуравни sX таквих да је $YY' = XX'$, где су Y', X' редом подножја нормала из Y, X на правој s. Тај епицикл је *еквидистанта* с *основицом* s и *висином* h.

1. Праве одређене основицом и противосновицом Сакеријевог четвороугла су хиперпаралелне. Доказати.

Решење: Нека су M, N редом средишта основице AB и противосновице CD Сакеријевог четвороугла $ABCD$. Докажимо да је MN заједничка нормала правих AB, CD, одакле ће следити да су ове праве хиперпаралелне.

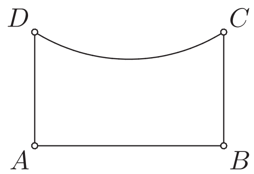


Посматрајмо троуглове $\triangle AMD, \triangle BMC$. Пошто је $AM = MB$ (јер је M средиште AB), $\measuredangle DAM = \measuredangle CBM = 90°$ и $AD = BC$ (јер је $ABCD$ Сакеријев четвороугао), на основу става СУС следи да су ови троуглови подударни. Дакле, следи да је $MD = MC$, $\measuredangle DMA = \measuredangle CMB = \varphi$ и $\measuredangle MDA = \measuredangle MCB = \psi$. Посматрајмо сада троуглове $\triangle DNM, \triangle CNM$. Пошто је $DN = CN$ (јер је N средиште CD), $DM = CM$ (добијено из претходне подударности) и $NM = NM$, следи да су ови троуглови подударни. Према томе, одавде следи да је $\measuredangle MDN = \measuredangle MCN = \theta$, $\measuredangle DMN = \measuredangle CMN = \eta$ и $\measuredangle MND = \measuredangle MNC = \alpha$. Даље, следи да је $\measuredangle ADC = \measuredangle ADM + \measuredangle MDN = \psi + \theta = \measuredangle BCM + \measuredangle MCN = \measuredangle BCD$ и да је $\measuredangle AMN = \measuredangle AMD + \measuredangle DMN = \varphi + \eta = \measuredangle BMC + \measuredangle CMN = \measuredangle BMN = \beta$. Пошто је $180° = \measuredangle AMB = \measuredangle AMN + \measuredangle BMN = \beta + \beta = 2\beta$, онда је $\beta = 90°$, па је $MN \perp AB$. Такође, пошто је $180° = \measuredangle DNM + \measuredangle CNM = \alpha + \alpha = 2\alpha$, онда је $\alpha = 90°$, па је $MN \perp CD$. Дакле, MN је заједничка нормала правих AB, CD, што значи да су оне хиперпаралелне.

Теорема 49. *Права која садржи средишта основице и противосновице Сакеријевог четвороугла је њихова заједничка нормала.*

2. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни и оштри. Доказати.

Решење:

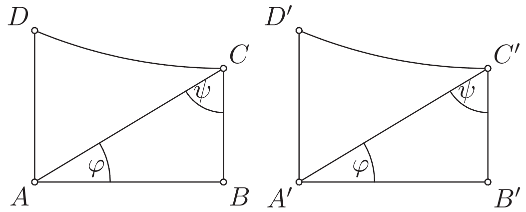


У претходном задатку смо доказали да је $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD = \gamma$. Дакле, углови на противосновици су подударни. Претпоставимо супротно, да су ови углови прави или тупи, тј. да је $\gamma \geq 90°$. Тада за збир углова четвороугла $ABCD$ важи $\measuredangle DAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCD + \measuredangle ADC = 90° + 90° + \gamma + \gamma \geq 180° + 2 \cdot 90° = 360°$, што је у контрадикцији с чињеницом да је збир углова простог, равног четвороугла мањи од $360°$. Дакле, претпоставка да је $\gamma \geq 90°$ није тачна, па је $\gamma < 90°$, што значи да су углови на противосновици подударни и оштри.

3. Доказати да су два Ламбертова четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са оштрим угловима D и D' подударна ако је:

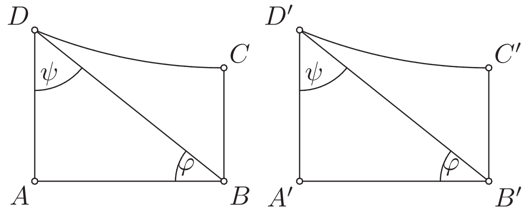
а) $AB = A'B',\ BC = B'C'$;
б) $AB = A'B',\ AD = A'D'$;
в) $AD = A'D',\ BC = B'C'$;
г) $AD = A'D',\ CD = C'D'$;
д) $AD = A'D',\ \measuredangle D = \measuredangle D'$;
ђ) $AB = A'B',\ \measuredangle D = \measuredangle D'$.

Решење: Нека су $ABCD, A'B'C'D'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена D, D'.
а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$



Нека је $AB = A'B', BC = B'C'$. Како је и $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Према томе, $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C' = \varphi$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A' = \psi$. Углови $\measuredangle DAB, \measuredangle D'A'B'$ су прави, па следи да је $\measuredangle DAC = 90° - \varphi = \measuredangle D'A'C'$. Слично, $\measuredangle DCA = 90° - \psi = \measuredangle D'C'A'$. Дакле, према ставу УСУ следи да је $\triangle DAC \cong \triangle D'A'C'$, па је $AD = A'D'$, $CD = C'D'$ и $\measuredangle ADC = \measuredangle A'D'C'$. Према томе, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне странице и углове, па су и они међусобно подударни.

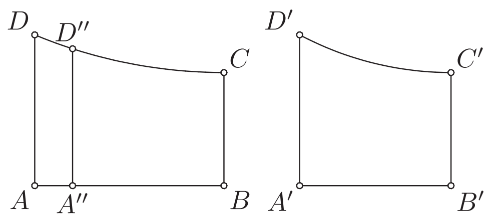
б) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$



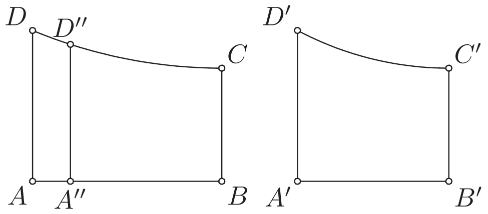
Нека је $AB = A'B', AD = A'D'$. Како је и $\measuredangle BAD = \measuredangle B'A'D'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. Према томе, $BD = B'D'$, $\measuredangle ABD = \measuredangle A'B'D' = \varphi$ и $\measuredangle ADB = \measuredangle A'D'B' = \psi$. Углови $\measuredangle ABC, \measuredangle A'B'C'$ су прави, па следи да је $\measuredangle DBC = 90° - \varphi = \measuredangle D'B'C'$. Такође, $\measuredangle BCD = \measuredangle B'C'D'$ (прави углови), па према ставу УУС следи $\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$. Дакле, следи да је $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ и $\measuredangle BDC = \measuredangle B'D'C' = \theta$. Како је $\measuredangle ADC = \psi + \theta = \measuredangle A'D'C'$, следи да су четвороугловима $ABCD, A'B'C'D'$ подударне све странице и углови, па су и они међусобно подударни.

Напомена 13. Додатно, доказали смо да ако су $ABCD, A'B'C'D'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена D, D' такви да је $BC = B'C', CD = C'D'$, онда су они међусобно подударни. Заиста, ако променимо имена тачкама A, B, C, D у P, N, M, Q и A', B', C', D' у P', N', M', Q', онда су $MNPQ, M'N'P'Q'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена Q, Q' такви да је $MN = M'N', MQ = M'Q'$, па је, на основу претходног, $MNPQ \cong M'N'P'Q'$. С обзиром на то да су $MNPQ, M'N'P'Q'$ друга имена за четвороуглове $ABCD, A'B'C'D'$, следи да је $ABCD \cong A'B'C'D'$.

в) $AD = A'D'$, $BC = B'C'$



Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка A'' таква да је $A''B = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки A''. Права n сече дуж CD. Заиста, права n сече дуж AB у тачки A'' и не сече дуж BC, зато што су n и BC хиперпаралелне (AB им је заједничка нормала), па на основу Пашове аксиоме n сече дуж AC. Пошто n не сече ни дуж AD, зато што су n и AD хиперпаралелне (AB им је заједничка нормала), на основу Пашове аксиоме n сече дуж CD у некој тачки D''.

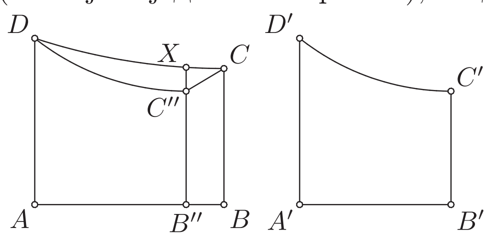


Четвороугао $A''BCD''$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D'' и важи $A''B = A'B'$ и $BC = B'C'$. На основу дела **а)** следи да је $A''BCD'' \cong A'B'C'D'$, па је $A''D'' = A'D' = AD$. Следи да је четвороугао $AA''D''D$ Сакеријев, па су углови $\measuredangle ADD'', \measuredangle DD''A''$ на противосновици DD'' оштри. Међутим, и угао $\measuredangle A''D''C$ је оштар, па је $180^\circ = \measuredangle DD''C = \measuredangle DD''A'' + \measuredangle A''D''C < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

г) $AD = A'D'$, $CD = C'D'$

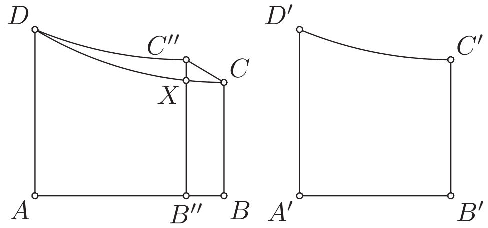
Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' подножје нормале из D на правој n. Како су AB, DC'' хиперпаралелне (n им је заједничка нормала), следи да важи $D, C'' \doteqdot AB$.



Четвороугао $AB''C''D$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D и важи $AB'' = A'B', AD = A'D'$, па на основу дела **б)** следи да су четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ подударни. Дакле, $DC'' = D'C' = DC$. Слично као малопре, на основу Пашове аксиоме права n сече најпре дуж AC, а затим и дуж CD у некој тачки X. Важи $D, X \doteqdot AB$, па због $D, C'' \doteqdot AB$, следи да важи $X, C'' \doteqdot AB$. Тачка X је различита од тачке C'', јер би у супротном због $DC'' = DC$ тачке C, C'' биле идентичне, што значи да би из тачке C постојале две различите нормале на правој AB (праве n и CB). Према томе, важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$ или $\mathcal{B}(B'', X, C'')$.

Нека је $\mathcal{B}(B'', C'', X)$. Како полуправа $C''X$ сече дуж CD, следи да она припада углу $\measuredangle DC''C$. Угао $\measuredangle DC''X$ је прав, па следи да је угао $\measuredangle DC''C$ туп. Међутим, троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови

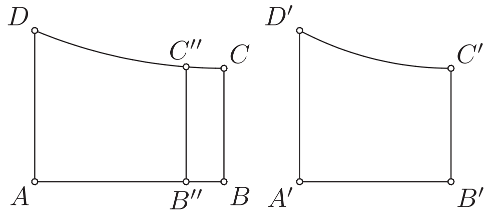
$\measuredangle DC''C, \measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Дакле, угао $\measuredangle DC''C$ је истовремено и оштар и туп, што је немогуће.



Нека је $\mathcal{B}(B'', X, C'')$. Како полуправа $C''X$ сече дуж CD, следи да она припада углу $\measuredangle DC''C$. Угао $\measuredangle DC''B''$ је прав, па следи да је угао $\measuredangle DC''C$ туп. Међутим, троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\measuredangle DC''C, \measuredangle DCC''$ подударни и оштри. Дакле, угао $\measuredangle DC''C$ је истовремено и оштар и туп, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела **б)** следи да су они међусобно подударни.

д) $AD = A'D'$, $\measuredangle D = \measuredangle D'$

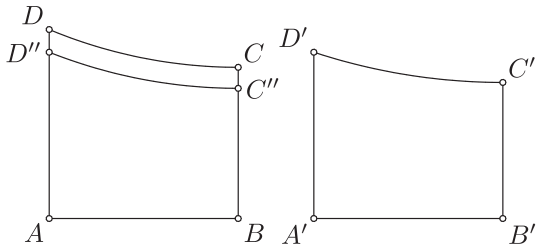


Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' подножје нормале из тачке D на правој n.

Четвороугао $AB''C''D$ је Ламбертов с оштрим углом код темена D и важи $AB'' = A'B', AD = A'D'$. На основу дела **б)** следи да су четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ подударни, па је $\measuredangle ADC'' = \measuredangle A'D'C'$, а по претпоставци, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне углове код темена D, D', па је $\measuredangle ADC'' = \measuredangle ADC$. Према томе, тачка C'' припада правој CD, па четвороугао $B''BCC''$ има четири права угла, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела **б)** следи да су они међусобно подударни.

ђ) $AB = A'B'$, $\measuredangle D = \measuredangle D'$



Претпоставимо да је $AD \neq A'D'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AD > A'D'$. На дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D'$. Нека је C'' подножје нормале из D'' на правој BC.

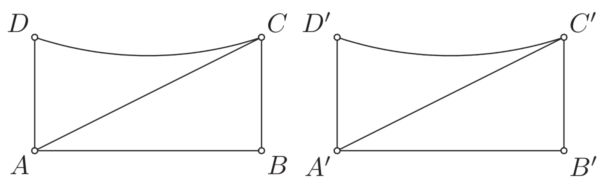
Четвороугао $ABC''D''$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D'' и важи $AB = A'B', AD'' = A'D'$. На основу дела **б)** следи да су четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ подударни, па је $\measuredangle AD''C'' = \measuredangle A'D'C' = \varphi$, па је $\measuredangle C''D''D = 180° - \varphi$. По претпоставци, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне углове код темена D, D', па је $\measuredangle D''DC = \varphi$. Дакле, збир углова четвороугла $D''C''CD$ је $180° - \varphi + 90° + 90° + \varphi = 360°$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AD \neq A'D'$ је погрешна, па је $AD = A'D'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела **б)** следи да су они међусобно подударни.

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је:

а) $AB = A'B',\ BC = B'C'$; **г)** $AB = A'B',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
б) $AB = A'B',\ CD = C'D'$; **д)** $BC = B'C',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$;
в) $BC = B'C',\ CD = C'D'$; **ђ)** $CD = C'D',\ \measuredangle C = \measuredangle C'$.

Решење: а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$



Нека је $AB = A'B', BC = B'C'$. Како је и $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Према томе, $AC = A'C'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C' = \varphi$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A' = \psi$. Углови $\measuredangle DAB, \measuredangle D'A'B'$ су прави, па следи да је $\measuredangle DAC = 90° - \varphi = \measuredangle D'A'C'$. Такође, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ су Сакеријеви, па је $AD = BC$