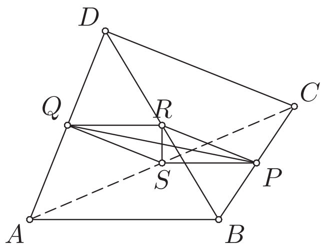
7. а) Две наспрамне ивице неког тетраедра су међусобно подударне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно нормалне.
б) Две наспрамне ивице тетраедра су нормалне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно подударне.

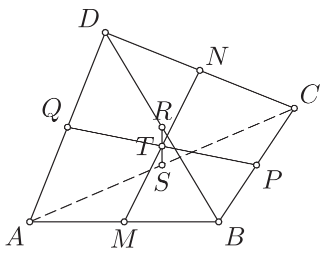
Решење:



Нека је $ABCD$ тетраедар и нека су P, Q, R, S редом средишта ивица BC, AD, BD, AC.
а) Треба доказати да важи $AB = CD$ ако и само ако важи $PQ \perp RS$. Дуж SP је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $SP \parallel AB$ и $SP = \frac{1}{2}AB$. Такође, дуж QR је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $QR \parallel AB$ и $QR = \frac{1}{2}AB$. Према томе, $SP \parallel QR$ и $SP = QR$, па су тачке P, R, Q, S компланарне и четвороугао $PRQS$ је паралелограм. Такође, PR је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $PR \parallel CD$ и $PR = \frac{1}{2}CD$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $AB = CD$. Онда је $SP = PR$, па је $PRQS$ ромб. Ромбу су дијагонале међусобно нормалне, па је $PQ \perp RS$.
$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $PQ \perp RS$. Паралелограму $PRQS$ су дијагонале PQ, RS међусобно нормалне, па је $PRQS$ ромб. Следи да је $SP = PR$, па је и $AB = CD$.
б) Треба доказати да важи $AB \perp CD$ ако и само ако важи $PQ = RS$. Из претходног дела задатка имамо да је $PRQS$ паралелограм, као и да је $SP \parallel AB$ и $PR \parallel CD$.
$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је $AB \perp CD$. Онда је $SP \perp PR$, па је $PRQS$ правоугаоник. Правоугаонику су дијагонале међусобно подударне, па је $PQ = RS$.
$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека је $PQ = RS$. Паралелограму $PRQS$ су дијагонале PQ, RS међусобно подударне, па је $PRQS$ правоугаоник. Следи да је $SP \perp PR$, па је и $AB \perp CD$.

8. Доказати да је права одређена средиштима страница AC и BD тетраедра $ABCD$ уједно и њихова заједничка нормала ако и само ако је $AB = CD$ и $AD = BC$.

Решење:



Нека су M, N, P, Q, R, S редом средишта ивица AB, CD, BC, AD, BD, AC тетраедра $ABCD$.

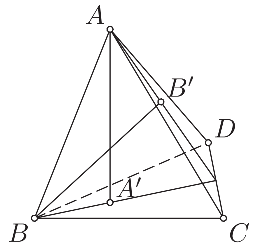
$\boxed{\Longrightarrow}$: Претпоставимо да је RS заједничка нормала страница AC и BD. Пошто важи $PN \parallel BD$ и $MP \parallel AC$ (средње линије одговарајућих троуглова), следи да је $RS \perp PN, MP$, па је RS управна на равни паралелограма $MPNQ$. Према томе, RS је управна на MN, PQ, па су паралелограми $MSNR$ и $PRQS$ ромбови. Следи да је $MS = MR$ и $PS = PR$. Пошто је $MS = \frac{1}{2}BC$, $MR = \frac{1}{2}AD$, добијамо $BC = AD$, а пошто је $PS = \frac{1}{2}AB$, $PR = \frac{1}{2}CD$, следи да је $AB = CD$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Обрнуто, претпоставимо да је $AB = CD$ и $BC = AD$. Тада је $MS = MR$ и $PS = PR$. Следи да су паралелограми $MSNR$ и $PRQS$ ромбови, па је $MN \perp RS$ и $PQ \perp RS$. Дакле, RS је управна на правима MN, PQ равни $MNPQ$, па је управна на тој равни. Специјално, RS је управна на MP, PN. Пошто је $MP \parallel AC$ и $PN \parallel BD$, следи да је $RS \perp AC$ и $RS \perp BD$, односно да је RS заједничка нормала страница AC, BD.

Дефиниција 44. Тетраедар $ABCD$ је *ортогоналан* ако важи $AB \perp CD$, $BC \perp AD, AC \perp BD$.

9. Висине AA' и BB' тетраедра $ABCD$ се секу ако и само ако је $AB \perp CD$. Доказати.

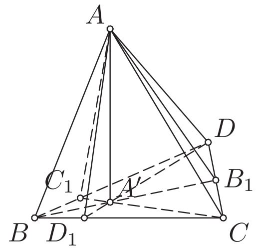
Решење:



$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека се висине AA', BB' секу. Тада постоји раван π која их садржи. Висина AA' је управна на равни BCD, па је $AA' \perp CD$, а висина BB' је управна на равни ACD, па је $BB' \perp CD$. Према томе, $CD \perp \pi$, па је CD управна на свакој правој равни π. Специјално, управна је на правој AB, тј. важи $CD \perp AB$.
$\boxed{\Longleftarrow}$: Обратно, нека је $AB \perp CD$. Нека је π раван која садржи тачке A, A', B. Висина AA' је управна на равни BCD, па је управна и на CD. Следи да је CD управна на равни која садржи праве AA', AB, тј. на равни π. Висина BB' је управна на равни ACD, па је управна на правој CD. Пошто је π раван која садржи тачку B и управна је на правој CD, следи да висина BB' мора припадати равни π, јер све праве које садрже тачку B и управне су на правој CD припадају равни π. Према томе, висине AA', BB' припадају равни π. Оне не могу бити паралелне, јер би тада равни BCD, ACD, које су управне на њима, биле паралелне, па би се поклапале, што би значило да су тачке A, B, C, D компланарне, а то није тачно. Према томе, висине AA', BB' припадају једној равни и нису паралелне, па следи да се секу.

10. Доказати да подножја висина из темена тетраедра представљају ортоцентре наспрамних пљосни ако и само ако је тетраедар ортогоналан.

Решење:



Нека је A' подножје висине из темена A на пљосни BCD.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека је A' ортоцентар троугла $\triangle BCD$. Тада је $BA' \perp CD$, а пошто је и $AA' \perp CD$, следи да је права CD управна на равни која садржи тачке A, A', B. Према томе, следи да је CD управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AB. Слично, $DA' \perp BC$, а пошто је и $AA' \perp BC$, следи да је права BC управна на равни која садржи тачке A, A', D. Према томе, следи да је BC управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AD. Такође, $CA' \perp BD$, а пошто је и $AA' \perp BD$, следи да је права BD управна на равни која садржи тачке A, A', C. Према томе, следи да је BD управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AC. Дакле, доказали смо да важи $AB \perp CD, BC \perp AD, AC \perp BD$, па је тетраедар $ABCD$ ортогоналан.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Обрнуто, претпоставимо да је тетраедар $ABCD$ ортогоналан. Тада је $AB \perp CD$, $BC \perp AD$, $AC \perp BD$. Права AA' је управна на равни BCD, па следи да је $AA' \perp BC, CD, BD$. Дакле, имамо да је права BC управна на правима AA', AD па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој DA'. Према томе, права DA' је висина троугла $\triangle BCD$. Слично, права CD управна на правима AA', AB па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој BA'. Према томе, права BA' је висина троугла $\triangle BCD$. Висине DA', BA' троугла $\triangle BCD$ секу се у тачки A', па следи да је тачка A' ортоцентар тог троугла, што је и требало доказати.

7 Изометријске трансформације простора

Дефиниција 45. Нека је $\mathbf{S}$ простор. Пресликавање $\mathfrak{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$, такво да за сваки пар тачака (A, B) простора $\mathbf{S}$ важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом* (*изометријом*) простора $\mathbf{S}$.

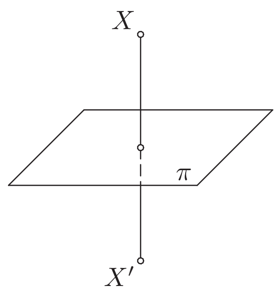
Све изометрије простора су бијекције. Изометрије простора сликају праве у праве и чувају распоред тачака на правој, сликају полуправе у полуправе, дужи у дужи, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове, полуравни у полуравни, равни у равни, полупросторе у полупросторе, диедарске површи у диедарске површи, диедре у диедре итд. Изометрије простора које мењају оријентацију простора називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију простора називамо *директним* изометријама. За сваке две изометрије $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$, њихова композиција $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{I}$ је такође изометрија, и инверз $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је такође изометрија.

Дефиниција 46. Нека су $\Phi, \Phi' \subseteq \mathbf{S}$ фигуре у простору $\mathbf{S}$. Ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ простора $\mathbf{S}$ таква да важи $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$, онда кажемо да је фигура Φ *подударна* фигури Φ' и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

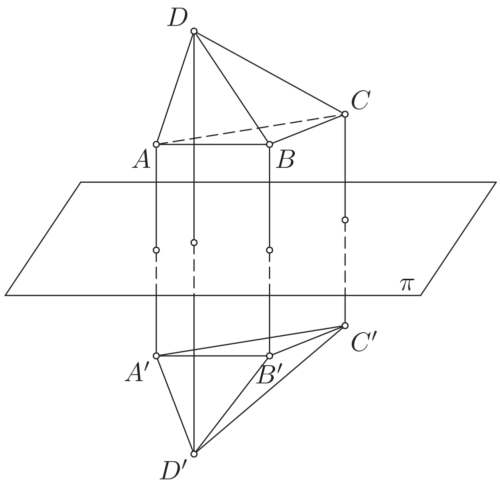
Релација $\cong$ подударности фигура је релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно подударне*.

Класификацију изометрија равни започели смо дефинисањем осне рефлексије. Изометрија простора која представља природно уопштење осне рефлексије равни јесте раванска рефлексија.

Дефиниција 47. Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ и нека је пресликавање $\mathcal{S}_\pi$ дато на следећи начин: ако је $X \in \pi$, онда је $\mathcal{S}_\pi(X) = X$, а иначе је $\mathcal{S}_\pi(X) = X'$, где је X' тачка таква да је π медијална раван дужи XX'. Онда се пресликавање $\mathcal{S}_\pi$ назива *раванском рефлексијом* (*раванском симетријом*) простора $\mathbf{S}$ с равни рефлексије (огледалом) π.



Није тешко доказати да $\mathcal{S}_\pi$ јесте изометрија простора. Раванска рефлексија је пресликавање које слика као „лик у огледалу”. Ако двапут применимо раванску рефлексију, по дефиницији се тачке равни π сликају у себе, а ако се X слика у X' такво да је π медијална раван дужи XX', онда се X' мора сликати у X. Дакле, $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathrm{Id}$, што значи да је раванска рефлексија сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке огледала π сликају у себе, а тачке ван огледала π се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је π медијална раван), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке огледала π.



Нека је $ABCD$ позитивно оријентисан тетраедар, тј. нека су A, B, C, D тачке простора $\mathbf{S}$ такве да када се у равни троугла $\triangle ABC$ прстима десне руке иде од темена A ка темену B па затим ка темену C, палац показује на онај полупростор с рубом ABC у којем се налази теме D. Ако су A', B', C', D' редом слике тачака A, B, C, D при раванској рефлексији $\mathcal{S}_\pi$, онда је тетраедар $A'B'C'D'$ негативно оријентисан, односно ако се у равни троугла $\triangle A'B'C'$ прстима десне руке иде од темена A' ка темену B' па затим ка темену C', палац показује на онај полупростор с рубом $A'B'C'$ у којем се не налази теме D'. Према томе, раванска рефлексија мења оријентацију простора, па је она индиректна изометрија простора.

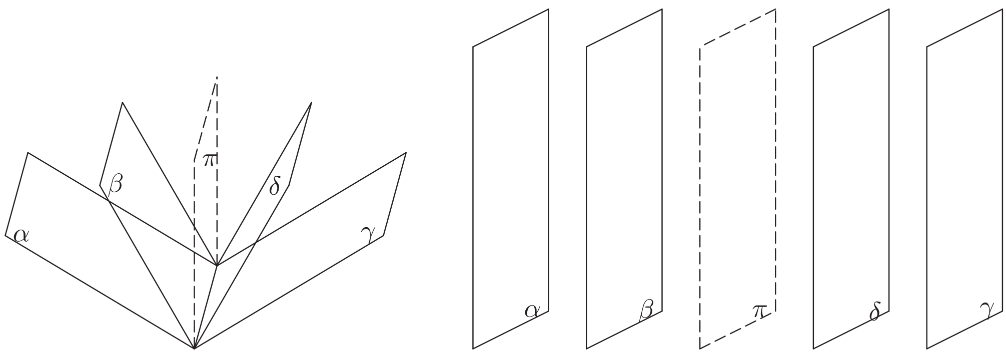
Теорема 34. *Ако је $\mathfrak{I}$ индиректна изометрија простора* $\mathbf{S}$ *која има бар две разне фиксне тачке P, Q, онда је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексија $\mathcal{S}_\pi$ чије огледало $\pi \subset \mathbf{S}$ садржи фиксне тачке P, Q.*

Теорема 35 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора* $\mathbf{S}$*, $\mathcal{S}_\pi$ раванска рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора* $\mathbf{S}$*. Ако је $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\pi'}$.*

Сваку изометрију простора $\mathbf{S}$ можемо изразити преко раванских рефлексија. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише четири.

Теорема 36. *Нека је $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\alpha$ за неку раван $\alpha \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta, \gamma \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta, \gamma, \delta \subset \mathbf{S}$.*

Као што постоји појам прамена правих у равни, тако постоји и појам прамена равни у простору. Постоје две врсте праменова равни у простору. Ако је $p \subset \mathbf{S}$ права у простору, скуп свих равни које садрже праву p чини прамен равни, који се назива *коаксијални прамен равни*. Ако је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван у простору, скуп свих равни које су паралелне равни π (укључујући и раван π) чини прамен равни, који се назива *паралелни прамен равни*. Што се везе између праменова равни и раванских рефлексија тиче, важи следећа теорема.



Теорема 37. *Нека су $\alpha, \beta, \gamma \subset \mathbf{S}$ равни простора $\mathbf{S}$. Онда је композиција $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ раванска рефлексија ако и само ако равни α, β, γ припадају једном прамену. Штавише, тада раван те рефлексије (означимо је са δ) припада том прамену и ако је раван π таква да су равни α, γ симетричне у односу на π, тада су и равни β, δ симетричне у односу на π.*

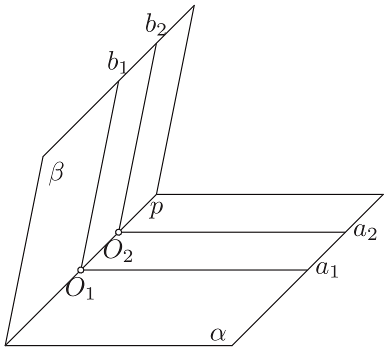
Утврдимо које још изометрије простора постоје.

Дефиниција 48. Пресликавање $\mathcal{E} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{E}(X) = X$ за сваку тачку $X \in \mathbf{S}$ називамо *коинциденцијом*.

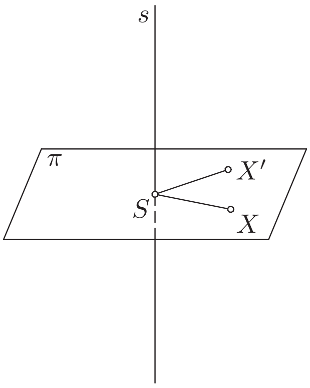
Коинциденција је, наравно, идентичко пресликавање. С обзиром на то да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \mathrm{Id} = \mathcal{E}$, имамо репрезентацију коинциденције преко производа двеју раванских рефлексија. Коинциденција је директна изометрија простора.

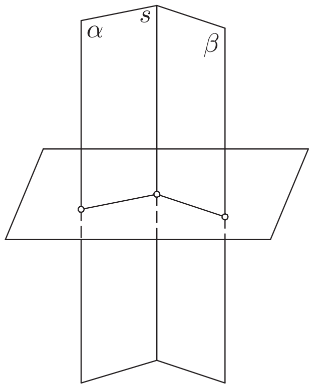
Теорема 38. *Ако изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има бар четири некомпланарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има бар три неколинеарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$.*

Нека је $\alpha p\beta$ диедар и нека су γ_1, γ_2 равни које су управне на правој p редом у тачкама O_1, O_2. Нека су O_1a_1, O_2a_2 редом пресечне полуправе равни γ_1, γ_2 и пљосни $p\alpha$ и нека су O_1b_1, O_2b_2 редом пресечне полуправе равни γ_1, γ_2 и пљосни $p\beta$. На основу теореме 26, углови $\measuredangle a_1O_1b_1, \measuredangle a_2O_2b_2$ су подударни. Ако је диедар $\alpha p\beta$ оријентисан, онда су и углови $\measuredangle a_1O_1b_1$, $\measuredangle a_2O_2b_2$ оријентисани и имају исту оријентацију, која је одређена оријентацијом диедра. Сходно томе, за оријентисани угао $\varphi = \measuredangle a_1O_1b_1 = \measuredangle a_2O_2b_2$ говорићемо да је оријентисани угао у равни нормалној на p.



Дефиниција 49. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$ и φ оријентисани угао у равни нормалној на s. Пресликавање $\mathcal{R}_{s,\varphi} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{R}_{s,\varphi}(X) = X$ за $X \in s$ и $\mathcal{R}_{s,\varphi}(X) = X'$ где је X' тачка равни π, која садржи X и нормална је на s у тачки S, таква да важи $SX = SX'$ и $\measuredangle XSX' = \varphi$ (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке $X \notin s$, назива се *осном ротацијом* око осе s за оријентисани угао φ.





Осна ротација је уопштење ротације равни. Нека је $\alpha s\beta$ оријентисани диедар, чији је оријентисани нагибни угао једнак половини оријентисаног угла φ. Ако су α', β' редом равни које садрже пљосни $s\alpha, s\beta$ тог диедра, онда је $\mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$. Равни α', β' можемо ротирати око осе s за произвољан угао и добити равни α'', β'' такве да је композиција $\mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$

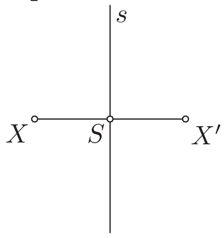
такође једнака полазној осној ротацији. Дакле, ако су α'', β'' произвољне равни такве да је $\alpha'' \cap \beta'' = s$ и $\measuredangle(\alpha'', \beta'') = \frac{\varphi}{2}$ (оријентисани углови), онда је $\mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$. Пошто је композиција двеју индиректних изометрија простора, осна ротација је директна изометрија простора.

Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{s,\psi} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi+\psi}$, $\mathcal{R}_{s,0^\circ} = \mathcal{R}_{s,360^\circ} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}_{s,\varphi}^{-1} = \mathcal{R}_{S,-\varphi}$, где је $-\varphi$ угао подударан углу φ, супротне оријентације. Ако је $\mathcal{R}_{s,\varphi} \neq \mathcal{E}$, све фиксне тачке осне ротације $\mathcal{R}_{s,\varphi}$ припадају оси s.

Теорема 39. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$, која није коинциденција, има бар једну фиксну тачку S, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s,\varphi}$, чија оса $s \subset \mathbf{S}$ садржи фиксну тачку S.*

Теорема 40 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s, $\mathcal{R}_{s,\varphi}$ осна ротација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека је $s' = \mathfrak{I}(s)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни нормалној на s'. Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\varphi'}$.*

Ако је угао ротације опружен, онда за тачку $X' = \mathcal{R}_{s,180^\circ}(X)$, где $X \notin s$, важи да је $SX' = SX$ и $\measuredangle XSX' = 180^\circ$, где је S тачка пресека праве s и равни која садржи X и нормална је на s. Другим речима, важи $SX = SX'$ и $\mathcal{B}(X, S, X')$, па је S средиште дужи XX'. Права s је нормална на XX' и садржи S, па је (једна од) симетрала дужи XX'.



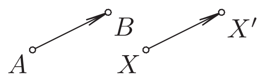
Дефиниција 50. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права у простору $\mathbf{S}$. Пресликавање $\mathcal{S}_s : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{S}_s(X) = X$ за $X \in s$ и $\mathcal{S}_s(X) = X'$, где је X' таква да је s симетрала дужи XX', назива се *осном симетријом* простора $\mathbf{S}$ с осом s.

Дакле, $\mathcal{S}_s = \mathcal{R}_{s,180^\circ}$. Јасно је да је $\mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{S}_s$, тј. да је осна симетрија инволуција. Такође, ако је $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, онда је оријентисани угао од равни α ка равни β подударан углу $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, тј. важи $\alpha \perp \beta$.

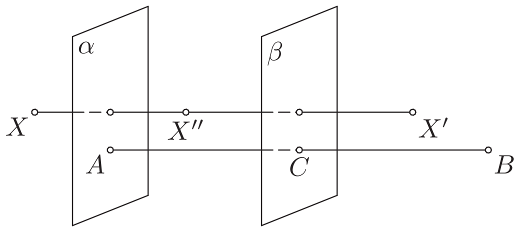
Потребно је на овом месту нагласити да осна симетрија простора и осна симетрија равни не представљају исти тип пресликавања, иако имају сличне дефиниције. Осна симетрија равни је дефинисана само за тачке те равни, а осна симетрија простора је дефинисана за све тачке простора.

Такође, природно уопштење осне симетрије равни јесте раванска симетрија простора, а осна симетрија простора је специјалан случај осне ротације простора, која је природно уопштење ротације равни. Треба имати на уму и то да је осна симетрија простора директна изометрија простора, док је осна симетрија равни индиректна изометрија равни, као и да се оријентација простора одређује помоћу оријентисаних тетраедара, а оријентација равни помоћу оријентисаних троуглова.

Дефиниција 51. Нека је $\overrightarrow{AB}$ вектор. Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



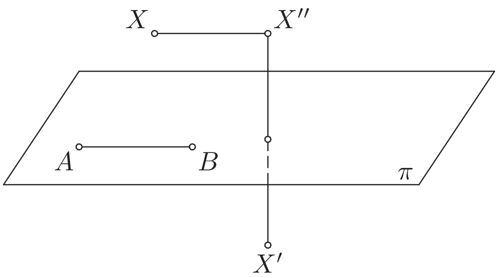
Транслација простора је природно уопштење транслације равни и има исте особине као транслација равни. То је директна изометрија простора која нема фиксних тачака (ако је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$). Обрнуто не важи, јер у простору постоје директне изометрије које нису транслације и немају фиксних тачака. Композиција транслација за $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ је транслација за $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, а инверз транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ је транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$.



Нека је α раван која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је β раван која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB. Тада важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју раванских рефлексија, слично као што смо транслацију у равни видели као композицију осних рефлексија. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ помоћу раванских рефлексија, јер уместо равни α, β можемо посматрати равни α', β' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од равни α' ка равни β' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

Теорема 41 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека су $A, B \in \mathbf{S}$ тачке простора $\mathbf{S}$, $\overrightarrow{AB}$ вектор простора $\mathbf{S}$, $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ транслација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија. Ако су $A' = \mathfrak{I}(A), B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{A'B'}}$.*

Дефиниција 52. Нека је π раван простора $\mathbf{S}$ и $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ ненула вектор простора $\mathbf{S}$ паралелан равни π. Пресликавање $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ назива се *клизајућом рефлексијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$ у односу на раван π.



Клизајућа рефлексија простора је природно уопштење клизајуће рефлексије равни. Вектор $\overrightarrow{AB}$ мора бити паралелан равни рефлексије. Она је индиректна изометрија простора, јер је композиција директне и индиректне изометрије, те мења оријентацију простора. Такође, клизајућа рефлексија нема фиксних тачака.

Теорема 42. *Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}}$, где је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ и $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор простора $\mathbf{S}$ паралелан равни π.*

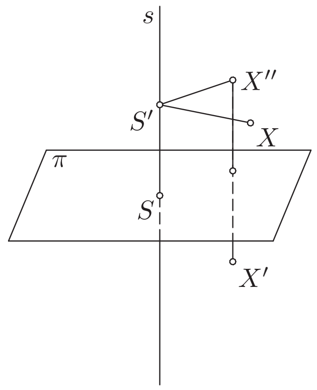
Код клизајуће рефлексије простора транслација и рефлексија комутирају, тј. није битно да ли ћемо прво извршити транслацију, па онда рефлексију, или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_\pi$. Како се транслација разбија на композицију двеју раванских рефлексија чија су огледала нормална на AB и раван π је паралелна са AB, следи да је клизајућа рефлексија композиција трију раванских рефлексија чија огледала не припадају једном прамену.

Теорема 43 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$, $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан равни π, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}}$ клизајућа рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$, $B' = \mathfrak{I}(B)$, $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{G}_{\pi',\overrightarrow{A'B'}}$.*

Што се инверза клизајуће рефлексије тиче, једноставно се види да је $\mathcal{G}^{-1}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \left(\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}\right)^{-1} = \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}^{-1}_\pi = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BA}}$. Дакле, клизајућа рефлексија није инволуција.

Поред клизајуће рефлексије, постоји још један тип изометрија простора које се могу разложити на композицију трију раванских рефлексија чија огледала не припадају једном прамену.

Дефиниција 53. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ таква да је $s \perp \pi$ и φ оријентисани угао равни π различит од 0° и пуног угла. Пресликавање $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi}$ назива се *осноротационом рефлексијом.*



Не постоји изометрија равни чије је уопштење осноротациона рефлексија. Како јој само име каже, ова изометрија је композиција осне ротације и раванске рефлексије. Индиректна је, има тачно једну фиксну тачку и то продорну тачку S праве s и равни π.

Теорема 44. *Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има тачно једну фиксну тачку S, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s,\varphi,\pi}$, где је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ која садржи фиксну тачку S, $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$ нормална на равни π у тачки S и φ оријентисани угао равни π различит од 0° и пуног угла.*

Код осноротационе рефлексије ротација и рефлексија комутирају, тј. небитно је да ли ћемо прво вршити ротацију па рефлексију или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathcal{S}_\pi$. Ротација се разбија на композицију двеју раванских рефлексија чија се огледала секу по оси ротације, па како је та оса нормална на равни π, следи да је осноротациона рефлексија композиција трију раванских рефлексија чија огледала не припадају једном прамену.

Теорема 45 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, $\pi \subset \mathbf{S}$ раван нормална на правој s, φ оријентисани угао у равни π, $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi}$ осноротациона рефлексија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека су $s' = \mathfrak{I}(s)$, $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни π'. Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\varphi',\pi'}$.*

Што се инверза осноротационе рефлексије тиче, једноставно се види да важи $\mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi,\pi} = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi} \circ \mathcal{S}^{-1}_\pi = \mathcal{R}_{s,-\varphi} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,-\varphi,\pi}$. Посебно је занимљив случај када је угао ротације једнак опруженом углу. Тада је $\mathcal{R}_{s,180^\circ,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\pi$. Ако је S пресечна тачка праве s и равни π, X

произвољна тачка различита од S и X' њена слика при овој изометрији, није тешко доказати да је тада $SX = SX'$ и $\mathcal{B}(X, S, X')$. Другим речима, S је средиште дужи XX'. Овакво пресликавање назива се *централном симетријом.*

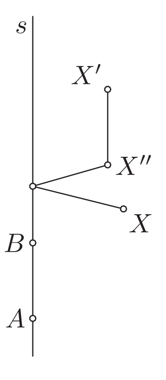
Дефиниција 54. Нека је $S \in \mathbf{S}$ тачка у простору $\mathbf{S}$. Пресликавање $\mathcal{S}_S : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{S}_S(S) = S$ и $\mathcal{S}_S(X) = X'$, где је $X' \in \mathbf{S}$ тачка таква да је S средиште дужи XX', за $X \neq S$, назива се *централна симетрија* простора $\mathbf{S}$.

Занимљиво је приметити да се код централне симетрије $\mathcal{S}_S$ за праву s и раван π могу одабрати било која права и раван које су међусобно нормалне у тачки S. Како је $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, где је $\alpha \cap \beta = s$ и $\alpha \perp \beta$, следи да је $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Пошто је $s \perp \pi$, а свака раван која садржи s је такође нормална на равни π, следи да је $\alpha \perp \pi$ и $\beta \perp \pi$. Дакле, централна симетрија се може разложити на композицију трију раванских рефлексија чија су огледала три међусобно нормалне равни које садрже центар симетрије. Пошто раванске рефлексије, чија су огледала нормалне равни, комутирају, следи да је поредак рефлексија које чине централну симетрију небитан, јер сваке две комутирају. Централна симетрија простора је индиректна изометрија простора и инволуција је, тј. важи $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$.

Теорема 46 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $S \in \mathbf{S}$ тачка у простору $\mathbf{S}$, $\mathcal{S}_S$ централна симетрија и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $S' = \mathfrak{I}(S)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_S \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{S'}$.*

Преостало је још да видимо типове изометрија простора које се могу разложити на композицију четири раванске рефлексије. Испоставља се да постоји само један такав тип изометрија.

Дефиниција 55. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s, различит од 0° и пуног угла и $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан правој s. Пресликавање $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ које је дато са $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi}$ назива се *завојним кретањем.*



Завојно кретање је директна изометрија, јер је композиција двеју директних изометрија (ротације и транслације). Она нема фиксних тачака. Ротација се може разложити на композицију двеју раванских рефлексија чија се огледала секу по правој s, а транслација на композицију двеју раванских рефлексија чија су огледала нормална на $AB \parallel s$, па се завојно кретање може разложити на композицију четири раванске рефлексије. Код завојног кретања транслација и ротација комутирају, тј. важи $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

Теорема 47 (Теорема о трансмутацији)**.** *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s различит од 0° и пуног угла, $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан правој s, $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}}$ завојно кретање и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека је $s' = \mathfrak{I}(s)$, $A' = \mathfrak{I}(A)$, $B' = \mathfrak{I}(B)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни нормалној на s'. Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{Z}_{s',\varphi',\overrightarrow{A'B'}}$.*

Што се инверза завојног кретања тиче, једноставно се види да важи $\mathcal{Z}^{-1}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = (\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}_{s,\varphi} \circ \mathcal{T}^{-1}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{R}_{s,-\varphi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} = \mathcal{Z}_{s,-\varphi,\overrightarrow{BA}}$. Посебно је занимљив случај када је угао ротације једнак опруженом углу. Тада је $\mathcal{Z}_{AB,180^\circ,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$. Ово пресликавање назива се *завојним полуобртајем* и означава се са $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{AB}}$ (да би се поједноставило означавање, сматра се да је одабран представник вектора $\overrightarrow{AB}$ такав да тачке A, B припадају правој s).

1. Ако су A, B, C три тачке равни π, доказати да важи $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$.

Решење: Како је $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_\pi$, следи да је

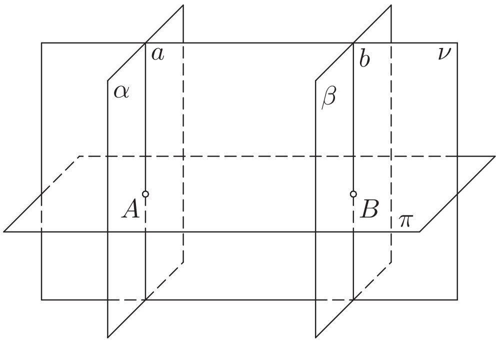
$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &= \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi.\end{aligned}$$

2. Доказати $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.

Решење: Почетна једнакост $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi^{-1} = \mathcal{S}_O$. На основу теореме о трансмутацији следи да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_\pi(O)}$, па је полазна једнакост еквивалентна једакости $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_\pi(O)} = \mathcal{S}_O$. Две централне симетрије су једнаке ако и само ако су им центри исти, према томе, последња једнакост је еквивалентна са $\mathcal{S}_\pi(O) = O$. Све фиксне тачке раванске рефлексије налазе се на њеном огледалу, па је $\mathcal{S}_\pi(O) = O$ ако и само ако $O \in \pi$, што је и требало доказати.

3. Доказати да је композиција непарног броја централних симетрија простора поново централна симетрија.

Решење: Да бисмо утврдили шта представља композиција непарног броја централних симетрија, одредимо прво шта представља композиција двеју централних симетрија, тј. шта је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$. Претпоставимо најпре да је $A \neq B$.



Нека је AB права која садржи тачке A, B и π нека раван која садржи праву AB. Нека је a права која садржи тачку A и нормална је на равни π и нека је b права која садржи тачку B и нормална је на равни π. Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_\pi$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Праве a, b су нормалне на равни π, па су паралелне и постоји раван ν која их садржи. Нека је α раван која садржи праву a и нормална је на равни ν и нека је β раван која садржи праву b и нормална је на равни ν. Тада је $\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\nu$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Како је по конструкцији права a нормална на равни π, онда је права a нормална и на правој AB те равни π. Ако је a' права нормална на правој a у тачки A која припада равни α, онда је угао између правих a', AB нагибни угао диедра који граде равни α, ν, што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, $AB \perp a, a'$, па је $AB \perp \alpha$. Слично је и $AB \perp \beta$, па је $\alpha \parallel \beta$ и $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$. Овиме је доказано да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$.

Ако је $A = B$, онда је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, па је и $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Како је централна симетрија инволуција, тј. важи $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{E} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{0}}$, следи да и у случају $A = B$ можемо писати да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$.

Користићемо принцип математичке индукције. Доказујемо тврђење: за сваки природан број n и за произвољне тачке $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ простора $\mathbf{S}$ пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија.

База индукције ($n = 1$): За произвољну тачку A_1 простора $\mathbf{S}$ пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија, па тврђење важи за $n = 1$.

Индуктивна хипотеза: Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n. То значи да је композиција произвољне $2n - 1$ централне симетрије поново централна симетрија.

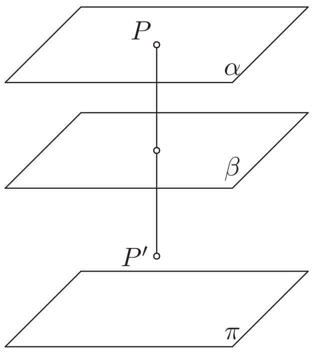
Индуктивни корак: Како је $2(n+1)-1 = 2n+2-1 = 2n+1$, треба доказати да је композиција произвољне $2n+1$ централне симетрије поново централна симетрија. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ произвољне тачке простора $\mathbf{S}$ и нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$. Потребно је доказати да је $\mathfrak{I}$ централна симетрија. Према индуктивној хипотези, пресликавање $\mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија, тј. $\mathcal{S}_B$, за неку тачку B. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA_{2n}}}$. Нека је тачка C таква да је $\overrightarrow{CA_{2n+1}} = \overrightarrow{BA_{2n}}$. Тада је $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA_{2n}}} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CA_{2n+1}}}$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{CA_{2n+1}}} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_C$, тј. пресликавање $\mathfrak{I}$ је централна симетрија.

На основу принципа математичке индукције, за сваки природан број n и произвољне тачке $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ простора $\mathbf{S}$ важи да је пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ централна симетрија. Другим речима, композиција непарног броја централних симетрија је централна симетрија, што је и требало доказати.

4. Одредити тип изометрије $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$.

Решење: Нека је α раван која садржи тачку P и нормална је на PP' и нека је β раван која садржи средиште дужи PP' и нормална је на њој. Тада је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$. Разликујемо два случаја:

1° Равни α, β, π припадају једном прамену. Пошто су равни α, β међусобно паралелне (јер су нормалне на PP'), овај случај се остварује ако је $\pi \perp PP'$.



Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\gamma$, за неку раван γ тог прамена, тј. за неку раван γ нормалну на PP'. Дакле, у овом случају је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексија.