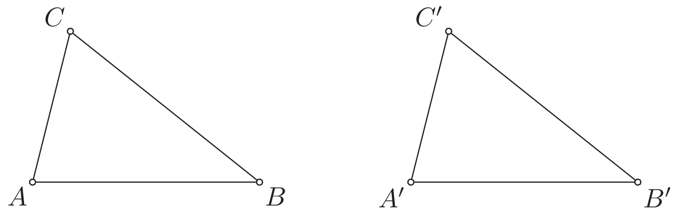
Геометрија 2

- вежбе -

1 Подударност

Подсетимо се ставова о подударности троуглова. Јасно нам је да два подударна троугла имају међусобно подударне одговарајуће странице и углове. Обратно, за два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ довољно је доказати само за нека три пара страница или углова да су подударни. Ставови који се доказују у теорији и који дају ове довољне услове за подударност два троугла зову се Ставови о подударности троуглова. Има их пет и сада ћемо их навести.

Став 1. *Нека су дати троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следећег:*
*1° (**СУС**) $AB = A'B'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $AC = A'C'$;*
*2° (**ССС**) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$;*
*3° (**УСУ**) $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $AB = A'B'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$;*
*4° (**ССУ**) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, а углови $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle A'B'C'$ су оба оштра, оба права или оба тупа;*
*5° (**УУС**) $AB = A'B'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$;*
онда је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



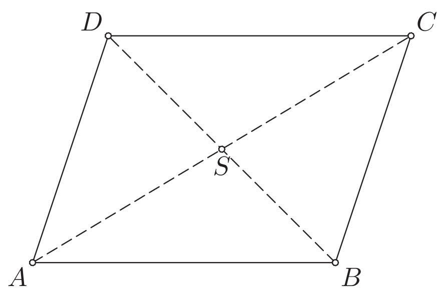
Дакле, сваки од ставова 1°–5° еквивалентан је са подударношћу троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$.

Приметимо да код троуглова не можемо тек тако писати знак „=” уместо знака „≅”. Код дужи и углова се то може толерисати, јер се ту уместо једнакости скупова тачака мисли на једнакост дужина дужи, односно мера углова. Међутим, одговарајућа мера за троуглове је површина, а два троугла која имају исту површину не морају бити подударна.

Вратимо се сада на Ставове о подударности троуглова. На први поглед нам се може учинити да су ставови УСУ и УУС исти, јер уколико су нама позната нека два угла троугла, познат нам је и трећи због тога што је збир углова у троуглу једнак $180°$, односно π. Но, на овом предмету се изучавају две геометрије, еуклидска и хиперболичка. Еуклидска геометрија је стандардна, уобичајена геометрија с којом се сусрећемо још у основној школи, а о хиперболичкој геометрији ћемо учити касније. За сада ћемо рећи да се испоставља да ће у хиперболичкој геометрији збир углова у троуглу увек бити мањи од π и да тај збир може бити било који број између 0 и π.

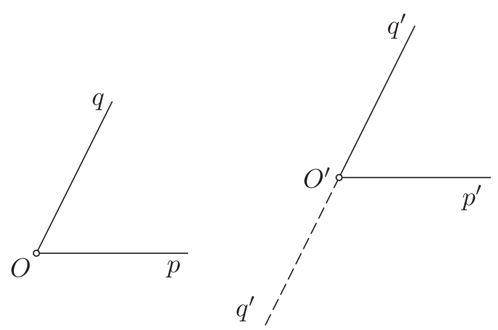
Осим ставова о подударности троуглова, користићемо једно веома важно тврђење везано за паралелограм. Најпре дајмо дефиницију паралелограма.

Дефиниција 1. Четвороугао $ABCD$ је *паралелограм* ако је $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.



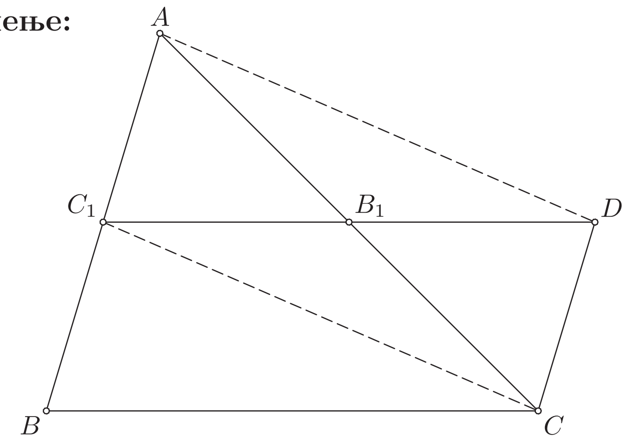
Теорема 1. *Нека је у равни дат конвексан четвороугао $ABCD$. Следећа тврђења су еквивалентна.*
1° *Четвороугао $ABCD$ је паралелограм.*
2° *Свака два суседна угла четвороугла $ABCD$ су суплементна.*
3° *Парови наспрамних углова четвороугла $ABCD$ су парови подударних углова.*
4° $AB \parallel CD$ *и* $AB = CD$
5° $AB = CD$ *и* $AD = BC$
6° *Дијагонале AC и BD имају заједничко средиште.*

Теорема 2 (Углови са паралелним крацима)**.** *Нека су $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ такви да је $Op \parallel O'p'$ и $Oq \parallel O'q'$. Тада је $\measuredangle pOq = \measuredangle p'O'q'$ или $\measuredangle pOq + \measuredangle p'O'q' = \pi$.*



1. (**Средња линија троугла**) Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и BA троугла ABC, онда су праве BC и B_1C_1 паралелне и важи $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

Решење:



Нека је D тачка на полуправој C_1B_1 таква да је $C_1B_1 = B_1D$. Тада је тачка B_1 средиште дијагонала AC и C_1D четвороугла AC_1CD, те је он паралелограм. Следи да је $AC_1 \parallel CD$ и да је $AC_1 = CD$ као наспрамне странице паралелограма. Како је $AC_1 = C_1B$ јер је C_1 средиште AB, имамо да је $C_1B = CD$, а како су праве AC_1 и C_1B исте, следи да је и $C_1B \parallel CD$. Одавде закључујемо да је четвороугао $BCDC_1$ паралелограм, па имамо да је $BC \parallel C_1D$ и $BC = C_1D$. Како имамо да су праве C_1B_1 и C_1D исте, следи да је $C_1B_1 \parallel BC$, а како је B_1 средиште C_1D, следи да је $C_1B_1 = \frac{1}{2}C_1D = \frac{1}{2}BC$, што је и требало доказати.

Дефиниција 2. Дуж која повезује средишта две странице троугла ABC зове се *средња линија* троугла $\triangle ABC$.

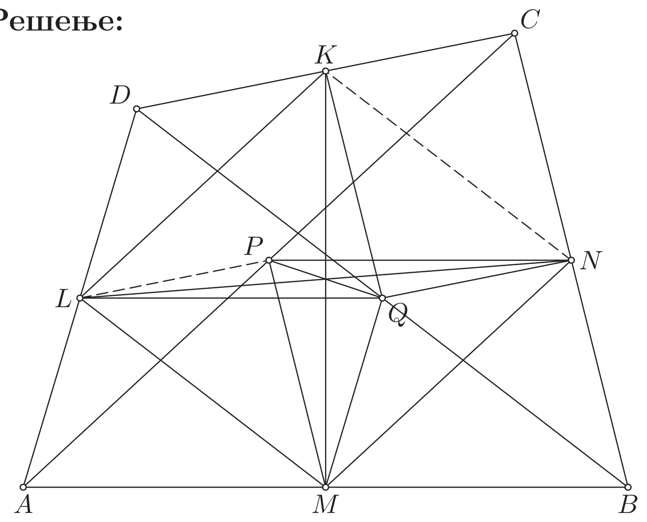
2. Ако су A, B, C, D четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:

а) MN и KL, MP и QK, NP и QL су међусобно подударне дужи;

б) дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште;

в) сваки од углова $\measuredangle PMQ$, $\measuredangle PNQ$, $\measuredangle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD, AB и CD, AC и BD.

Решење:

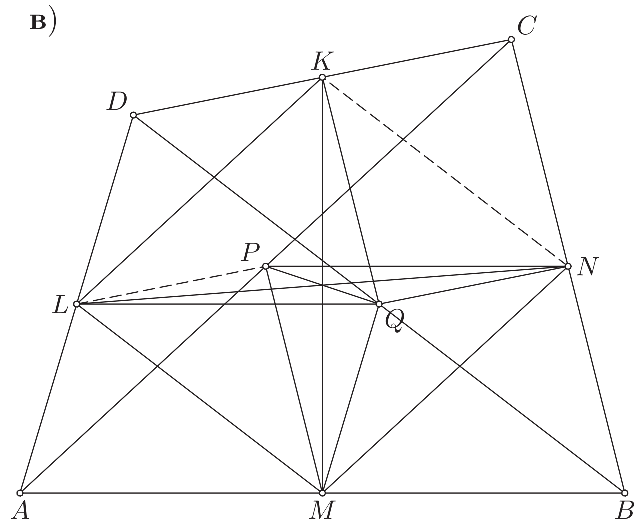


а) Како су тачке M и N средишта дужи AB и BC, редом, дуж MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па закључујемо да је $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Такође, KL је средња линија троугла $\triangle ACD$, па следи да је $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Закључујемо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$.

Слично је и QK средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $QK \parallel BC$ и $QK = \frac{1}{2}BC$. Такође је MP средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MP \parallel BC$ и $MP = \frac{1}{2}BC$, па закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$.

б) Из дела **а)** имамо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$, па је четвороугао $MNKL$ паралелограм. Следи да његове дијагонале MK и LN имају заједничко средиште. Такође, из дела **а)** закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$, па је четвороугао $KPMQ$ паралелограм. Одавде закључујемо да његове дијагонале KM и PQ имају заједничко средиште. Како смо доказали да и MK и LN имају заједничко средиште, а свака дуж има јединствено средиште, следи да све три дужи (MK, LN и PQ) имају заједничко средиште.

в)

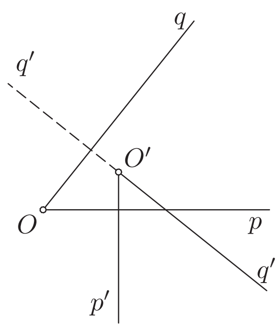


Дуж PM је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PM \parallel BC$, а дуж MQ је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $MQ \parallel AD$. Ако са $\measuredangle(AD, BC)$ означимо угао који граде праве AD и BC, онда тај угао и угао $\measuredangle PMQ$ имају паралелне краке, па су подударни. Дакле, $\measuredangle PMQ = \measuredangle(AD, BC)$.

Дуж PN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PN \parallel AB$, а дуж NQ је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $NQ \parallel CD$. Угао који граде праве AB и CD и угао $\measuredangle PNQ$ имају паралелне краке, па морају бити једнаки, односно важи $\measuredangle PNQ = \measuredangle(AB, CD)$.

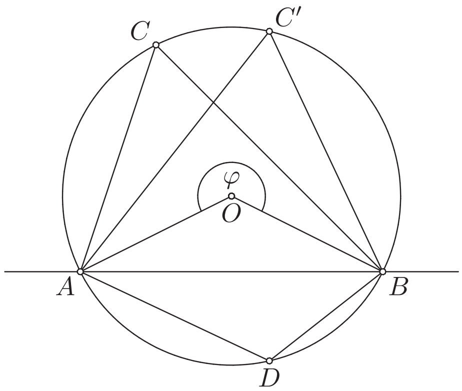
Коначно, LM је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $LM \parallel BD$, а MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MN \parallel AC$. Сада видимо да углови $\measuredangle LMN$ и $\measuredangle(AC, BD)$ имају паралелне краке, па следи да је $\measuredangle LMN = \measuredangle(AC, BD)$.

Теорема 3 (Углови са нормалним крацима)**.** *Нека су $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ такви да је $Op \perp O'p'$ и $Oq \perp O'q'$. Тада је $\measuredangle pOq = \measuredangle p'O'q'$ или $\measuredangle pOq + \measuredangle p'O'q' = \pi$.*



Подсетимо се сада централних и периферијских углова.

Дефиниција 3. Нека је k круг, нека је O његов центар и нека су A, B, C тачке са тог круга. Угао $\measuredangle ACB$ зове се *периферијски угао*, а угао $\measuredangle AOB$ зове се *централни угао*.



Ако су тачке C и O са исте стране праве AB, онда знамо да је $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$. Зато се у том случају каже да централни угао $\measuredangle AOB$ *одговара* периферијском углу $\measuredangle ACB$. С тим у вези, ако је C' нека друга тачка на кругу k таква да су C, C', O с исте стране праве AB, онда из $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AOB = 2\measuredangle AC'B$ следи да је $\measuredangle ACB = \measuredangle AC'B$. За периферијске углове $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle AC'B$ каже се да су *над истим луком* или *над истом тетивом* (у овом случају, луком $\widehat{AB}$, односно тетивом AB). Међутим, ако је D тачка на кругу k која је са супротне стране праве AB од тачака C, C', O, онда неће бити $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$. Разлог је тај што његов одговарајући централни угао није угао $\measuredangle AOB$. У ствари, његов централни угао је на слици означен са φ и представља допуну угла $\measuredangle AOB$ до пуног угла. И у овом случају важи да је одговарајући централни угао два пута већи од периферијског, дакле $\varphi = 2\measuredangle ADB$. Израчунајмо колики је угао $\measuredangle ADB$. Како је пун угао једнак 2π, следи да је $\measuredangle AOB + \varphi = 2\pi$, па је $\varphi = 2\pi - \measuredangle AOB = 2\pi - 2\measuredangle ACB$. Одавде закључујемо да је $\measuredangle ADB = \pi - \measuredangle ACB$.

Приметимо да периферијски углови $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle ADB$ нису над истим луком, јер је угао $\measuredangle ACB$ над луком $\widehat{ADB}$, док је угао $\measuredangle ADB$ над луком $\widehat{ACB}$. Формулишимо теорему.

Теорема 4. *Периферијски углови над истим луком су међусобно подударни. Периферијски углови над истом тетивом су или подударни или суплементни углови.*

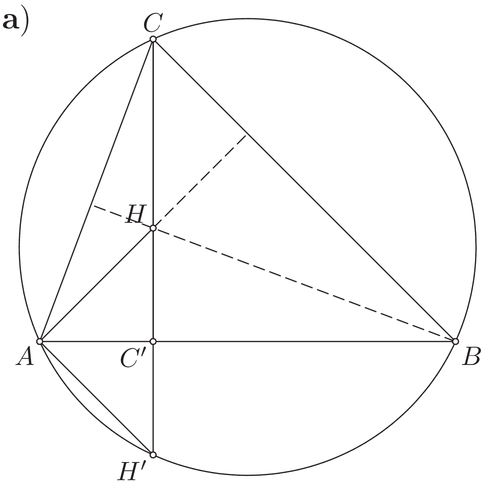
Важи и обратно. Наиме, нека су у равни дате тачке A, B, C на кругу k и тачка C' за коју не знамо да ли је на кругу. Уколико су C, C' са исте стране праве AB и $\measuredangle ACB = \measuredangle AC'B$ или уколико су C, C' са супротних страна праве AB и $\measuredangle ACB + \measuredangle AC'B = \pi$, следи да $C' \in k$.

Ако су тачке A, B са круга k такве да је AB пречник и ако је O центар круга k, онда је централни угао $\measuredangle AOB$ опружени угао, тј. $\measuredangle AOB = \pi$.

Теорема 5. *Периферијски угао над пречником је прав.*

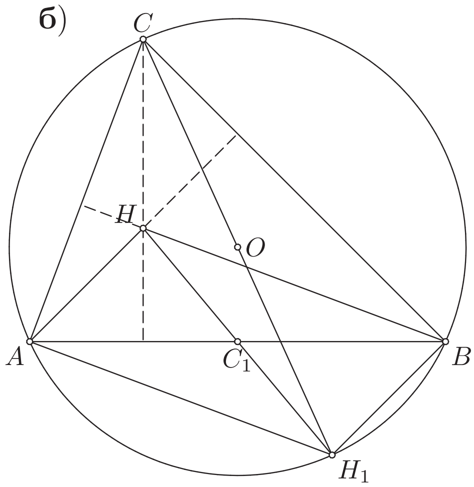
3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на:
а) странице троугла; **б)** средишта страница троугла;
припадају кругу описаном око тог троугла.

Решење:
а)



Означимо са C' подножје висине из темена C на правој AB, а са H' тачку која је симетрична ортоцентру H у односу на страницу AB (у питању је осна симетрија). Тада је $HH' \perp AB$ и тачка C' је средиште дужи HH', тј. $HC' = C'H'$. Како је и $\measuredangle HC'A = \measuredangle H'C'A$, јер су оба угла права (једнака $90°$, односно $\frac{\pi}{2}$) и $AC' = AC'$, на основу става СУС закључујемо да је $\triangle HC'A \cong \triangle H'C'A$. Добијамо да је $\measuredangle AH'C' = \measuredangle AHC'$. Нама је циљ да докажемо да су углови $\measuredangle AH'C$ и $\measuredangle ABC$ подударни, јер ћемо онда имати да је угао $\measuredangle AH'C$ периферијски над луком $\widehat{AC}$, па ће H' припадати описаном кругу троугла $\triangle ABC$. Углови $\measuredangle AH'C'$ и $\measuredangle AH'C$ су исти, па је довољно доказати да је $\measuredangle AHC' = \measuredangle ABC$. Међутим, како је $HC' \perp AB$ јер је HC' висина, и $AH \perp BC$ јер је AH висина, следи да углови $\measuredangle AHC'$ и $\measuredangle ABC$ имају нормалне краке, те су међусобно подударни.

б)



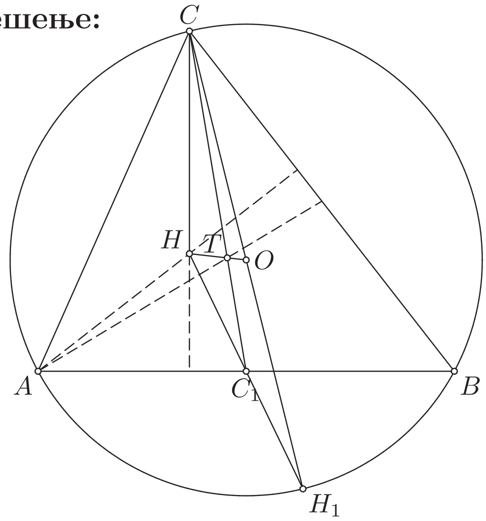
Означимо са C_1 средиште странице AB троугла $\triangle ABC$ и са H_1 тачку симетричну ортоцентру H у односу на тачку C_1 (сада је у питању централна симетрија). Тада је тачка C_1 средиште дужи HH_1. У четвороуглу AH_1BH дијагонале AB и HH_1 имају заједничко средиште, тачку C_1, па је у питању паралелограм. Закључујемо да је $BH \parallel H_1A$ и да је $AH \parallel H_1B$. Како је BH висина, следи да је $BH \perp AC$, па следи и да је $H_1A \perp AC$, тј. $\measuredangle H_1AC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle ACH_1$ је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена A, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1. Слично, AH је висина, па је $AH \perp BC$, а пошто је $H_1B \parallel AH$, следи да је $H_1B \perp BC$, тј. да је $\measuredangle H_1BC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle BCH_1$ је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена B, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1.

Описани кругови троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$ имају исти центар (средиште дужи CH_1) и исти полупречник (половина дужи CH_1), те ти троуглови имају исти описани круг. Дакле, један исти круг садржи тачке A, B, C, H_1. Како се око сваког троугла може описати само један круг, тј. за сваке три неколинеарне тачке постоји јединствени круг који их садржи, следи да описани круг троугла $\triangle ABC$ (тј. онај круг који садржи његова темена A, B, C) мора бити исти као и круг који садржи тачке A, B, C, H_1 (дакле, заједнички описани круг троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$). Овим је доказано да се тачка H_1 налази на описаном кругу троугла $\triangle ABC$.

Напомена 1. Није потребно посебно доказивати да и тачке симетричне ортоцентру H у односу на странице AC и BC, као и тачке симетричне средиштима тих страница, припадају описаном кругу троугла $\triangle ABC$ јер су све три странице троугла $\triangle ABC$ међусобно равноправне.

4. (**Ојлерова права**) Средиште описаног круга O, ортоцентар H и тежиште T произвољног троугла су колинеарне тачке и важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$. Доказати.

Решење:



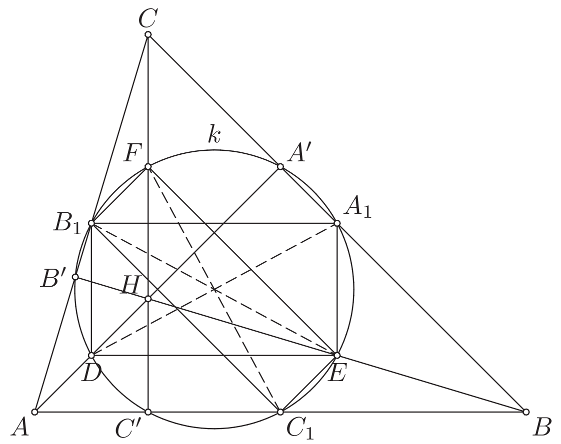
Нека је H_1 тачка из 3. задатка, тј. тачка симетрична ортоцентру H у односу на средиште C_1 странице AB. Посматрајмо троугао $\triangle CH_1H$. Како је C_1 средиште његове странице H_1H, следи да је дуж CC_1 тежишна дуж тог троугла. Такође, дуж CC_1 је и тежишна дуж троугла $\triangle ABC$, јер је C_1 средиште његове странице AB. Из 3. задатка следи да је CH_1 пречник описаног круга троугла $\triangle ABC$, па је његов центар O средиште дужи CH_1. Дакле, дуж HO је тежишна дуж троугла $\triangle CH_1H$, па је њен пресек са тежишном дужи CC_1 тежиште троугла $\triangle CH_1H$. Означимо га са T_1 и докажимо да је то заправо тачка T (тежиште троугла $\triangle ABC$), тј. да је $T_1 = T$.

Како је тежиште сваког троугла тачка која дели његове тежишне дужи у односу 2:1, следи да тежиште T троугла $\triangle ABC$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT : TC_1 = 2 : 1$. Такође, тежиште T_1 троугла $\triangle CH_1H$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT_1 : T_1C_1 = 2 : 1$. Како је тачка која дели неку дуж у неком односу јединствена, следи да је $T_1 = T$. Дакле, T је тежиште и троугла $\triangle CH_1H$. Према томе, тачка T припада његовој тежишној дужи HO (па су H, T, O колинеарне) и дели је у односу 2:1, тј. важи $HT : TO = 2 : 1$. Како T припада баш дужи HO, следи да вектори $\overrightarrow{HT}$ и $\overrightarrow{TO}$ имају исти смер, а из $HT : TO = 2 : 1$ следи да је $HT = 2TO$, па је заиста $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$.

Дефиниција 4. Права која садржи колинеарне тачке H, T, O зове се *Ојлерова права.*

5. (**Ојлеров круг**) Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.

Решење:



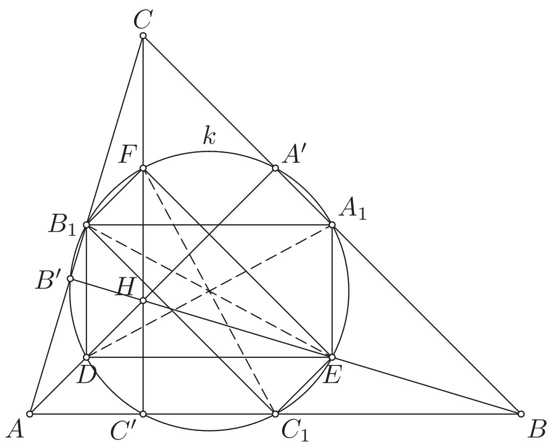
Нека су A', B', C' редом подножја висина из темена A, B, C на страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ и нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Дужи које спајају темена и ортоцентар H троугла $\triangle ABC$ су дужи AH, BH, CH, па означимо редом са D, E, F њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака $(A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F)$.

Посматрајмо четвороугао DEA_1B_1. Дуж B_1A_1 је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $B_1A_1 \parallel AB$ и $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$, а дуж DE је средња линија троугла $\triangle ABH$, па је $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Закључујемо да је DEA_1B_1 паралелограм. Поред тога, DB_1 је средња линија троугла $\triangle ACH$, па је $DB_1 \parallel CH$. Како је $CH \perp AB$ јер је CH висина, следи да је $DB_1 \perp AB$. Међутим, имамо да је $B_1A_1 \parallel AB$, па је $DB_1 \perp B_1A_1$. Према томе, угао $\measuredangle DB_1A_1$ је прав, па како је паралелограм који има један прав угао заправо правоугаоник, следи да је четвороугао DEA_1B_1 правоугаоник. Како се око правоугаоника може описати круг, следи да постоји круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E.

Слично, четвороугао B_1C_1EF је правоугаоник. Заиста, он је паралелограм, јер је B_1C_1 средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $B_1C_1 \parallel BC$ и $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$ и EF је средња линија троугла $\triangle BCH$, па је $EF \parallel BC$ и $EF = \frac{1}{2}BC$, одакле закључујемо да је $B_1C_1 \parallel EF$ и $B_1C_1 = EF$.

Поред тога, C_1E је средња линија троугла $\triangle ABH$, па је $C_1E \parallel AH$, а пошто је $AH \perp BC$ јер је AH висина, важи и $C_1E \perp BC$. А како је $B_1C_1 \parallel BC$, следи да је $C_1E \perp B_1C_1$, тј. да је угао $\measuredangle B_1C_1E$ прав, па је четвороугао B_1C_1EF паралелограм са једним правим углом, односно он је правоугаоник.

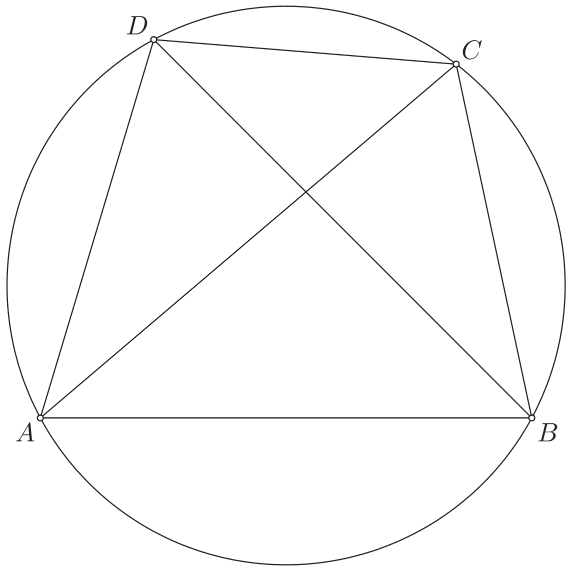
Како је дијагонала правоугаоника пречник његовог описаног круга, следи да је његов центар средиште дијагонале, а полупречник половина дијагонале. Дуж B_1E је заједничка дијагонала правоугаоника DEA_1B_1 и B_1C_1EF, па следи да описани кругови тих правоугаоника имају исти центар и исти полупречник, односно та два правоугаоника имају исти описани круг. Дакле, круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E садржи и тачке B_1, C_1, E, F. Дакле, постоји круг, назовимо га k, који садржи тачке A_1, B_1, C_1, D, E, F.



Остаје нам још да докажемо да тачке A', B', C' припадају том кругу. Дуж B_1E је пречник круга k, а угао $\measuredangle B_1B'E$ је прав, јер је $B'E$ висина, а права B_1B' је иста као и права AC. Како је $\measuredangle B_1B'E$ прав као и периферијски угао над пречником B_1E круга k, то тачка B' припада кругу k. Слично доказујемо и да тачке A', C' припадају кругу k. Уочимо дијагоналу DA_1 правоугаоника DEA_1B_1 и приметимо да је угао $\measuredangle DA'A_1$ прав, јер је DA' висина, а права $A'A_1$ је иста као и права BC. Како је $\measuredangle DA'A_1$ прав, онда тачка A' припада кругу k са пречником DA_1. За тачку C' уочимо дијагоналу FC_1 правоугаоника B_1C_1EF и приметимо да је $\measuredangle FC'C_1 = \frac{\pi}{2}$ јер је FC' висина, а права $C'C_1$ иста као и права AB. Како је угао $\measuredangle FC'C_1$ прав, онда тачка C' припада кругу k са пречником FC_1.

Дефиниција 5. Круг који садржи тачке $A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F$ зове се *Ојлеров круг*.

Дефиниција 6. Четвороугао $ABCD$ је *тетиван* ако се око њега може описати круг, тј. ако постоји круг који садржи његова темена A, B, C, D.



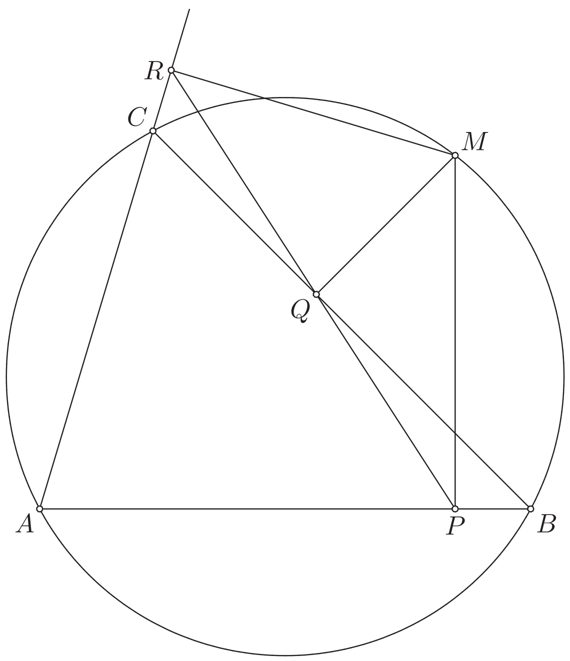
Посматрајмо конвексан четвороугао $ABCD$. Нека је он тетиван. Наспрамни углови $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ су периферијски углови над тетивом BD и при томе су тачке A, C са супротних страна праве BD. Следи да је $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \pi$. Обратно, нека не знамо да ли је четвороугао $ABCD$ тетиван, а имамо да је $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \pi$. Посматрајмо круг k описан око троугла $\triangle ABD$. Како се тачке A, C налазе са супротних страна праве BD, следи да је угао $\measuredangle BCD$ периферијски над тетивом BD, па његово теме C припада кругу k. Дакле, круг k садржи темена четвороугла $ABCD$, па је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Дакле, услов да су наспрамни углови конвексног четвороугла суплементни потребан је и довољан (дакле еквивалентан) да четвороугао $ABCD$ буде тетиван. Специјално, уколико су напрамни углови четвороугла $ABCD$ прави, онда су они суплементни, па је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Од еквивалентних услова за тетивност конвексног четвороугла даћемо још један. Ако је четвороугао $ABCD$ конвексан и $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$, онда је тај четвороугао тетиван. Овај услов је у ствари услов подударности периферијских углова $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$ над луком $\widehat{AB}$ (тачке C, D су са исте стране праве AB).

6. (**Симсонова права**) Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правама које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.

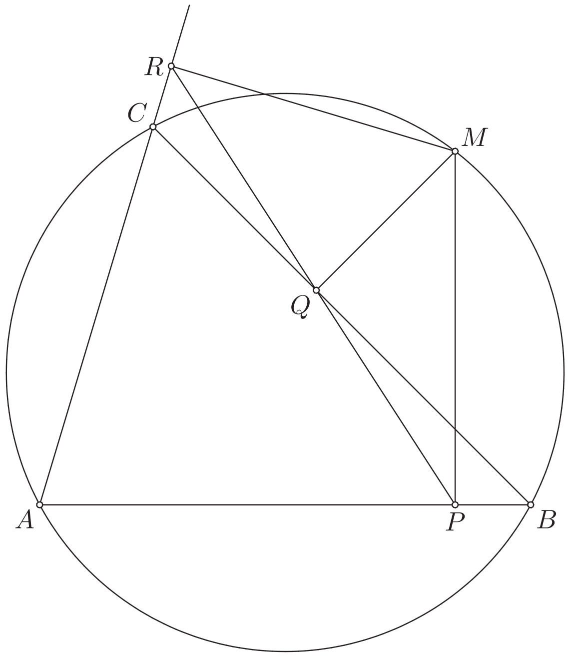
Решење:



Нека је M произвољна тачка на кругу описаном око троугла $\triangle ABC$ и нека су P, Q, R редом подножја нормала из M на праве AB, BC, CA. Уколико докажемо да је $\measuredangle PQB = \measuredangle CQR$, онда ће због колинеарности тачака B, Q, C (Q је подножје нормале из M на праву BC, па припада тој правој) углови $\measuredangle PQB$ и $\measuredangle CQR$ бити унакрсни, па ће онда и тачке P, Q, R припадати једној правој, тј. биће колинеарне.

Уочимо четвороугао $APMR$. Он је тетиван, јер су му наспрамни углови $\measuredangle APM$ и $\measuredangle ARM$ прави, па су суплементни. Следи да су и друга два наспрамна угла суплементна, тј. $\measuredangle PAR + \measuredangle PMR = \pi$. Даље, уочимо четвороугао $CQMR$. И он је тетиван, јер су му супротни углови $\measuredangle CQM$ и $\measuredangle CRM$ прави, па су суплементни. Одавде закључујемо да су периферијски углови $\measuredangle CQR$ и $\measuredangle CMR$ над луком $\widehat{CR}$ подударни. Дакле, $\measuredangle CQR = \measuredangle CMR$.

Посматрајмо сада четвороугао $PBMQ$. Њему су углови $\measuredangle BQM$ и $\measuredangle BPM$ над BM подударни, јер су то прави углови. Следи да је четвороугао $PBMQ$ тетиван, па је $\measuredangle PQB = \measuredangle PMB$, јер су то периферијски углови над луком $\widehat{PB}$. Коначно, четвороугао $ABMC$ је тетиван (по дефиницији, његова темена A, B, M, C припадају једном кругу и то баш описаном кругу троугла $\triangle ABC$), па су супротни углови $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BMC$ суплементни, тј. $\measuredangle BAC + \measuredangle BMC = \pi$.



Сада, како је $\measuredangle BAC = \measuredangle PAR$ јер је у питању исти угао и како важи да је $\measuredangle BAC + \measuredangle BMC = \pi$ и $\measuredangle PAR + \measuredangle PMR = \pi$, закључујемо да је $\measuredangle BMC = \measuredangle PMR$. А како имамо да је $\measuredangle BMC = \measuredangle PMB + \measuredangle PMC$ и $\measuredangle PMR = \measuredangle PMC + \measuredangle CMR$, следи да је $\measuredangle PMB = \measuredangle CMR$. Одавде следи, због $\measuredangle PQB = \measuredangle PMB$ и $\measuredangle CQR = \measuredangle CMR$, да је $\measuredangle PQB = \measuredangle CQR$, што смо и желели да докажемо.

Дефиниција 7. Права која садржи тачке P, Q, R зове се *Симсонова права.*

Дефиниција 8. Четвороугао $ABCD$ је *тангентан* уколико се у њега може уписати круг, тј. уколико постоји круг такав да су странице тог четвороугла тангенте на том кругу.

Ако се код четвороугла бисектрисе унутрашњих углова секу у једној тачки, онда је тај четвороугао тангентан.

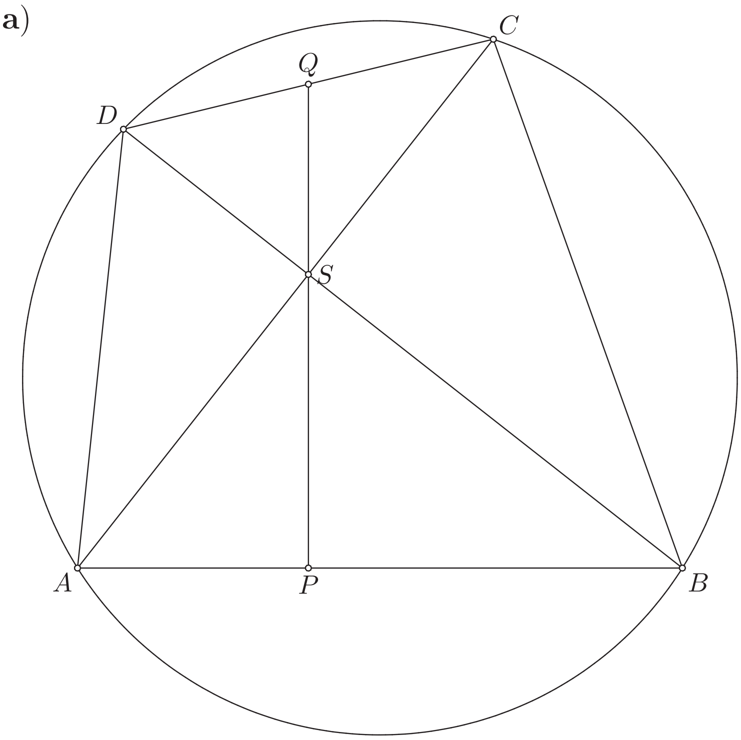
7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S.

а) Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD. Доказати.

б) Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA, редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.

Решење:

а)

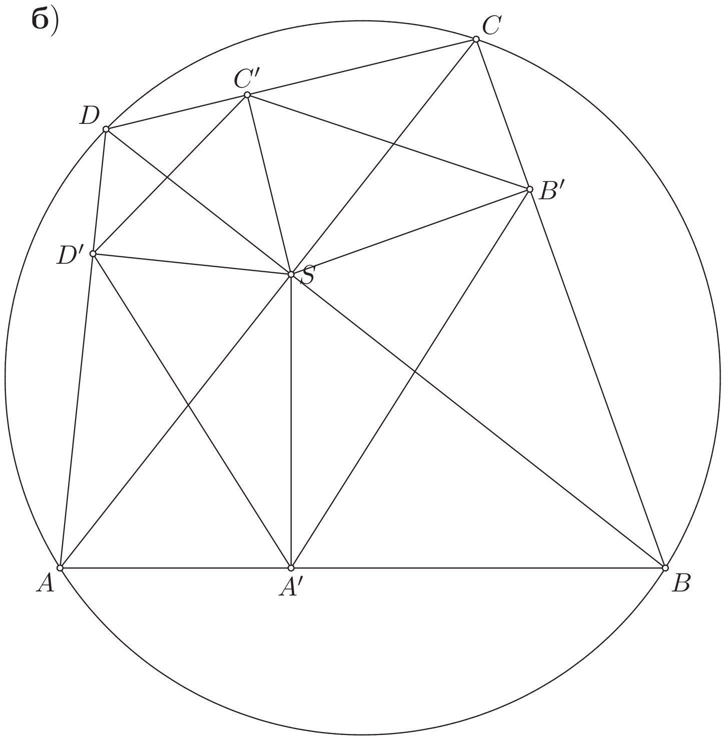


Нека је P подножје нормале из S на страници AB и нека је Q пресечна тачка праве PS и странице CD. Означимо угао $\measuredangle BAC = \alpha$ и угао $\measuredangle ABD = \beta$. Како је $\measuredangle BAS = \measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABS = \measuredangle ABD = \beta$, из $\measuredangle BAS + \measuredangle ABS + \measuredangle ASB = \pi$ и $\measuredangle ASB = \frac{\pi}{2}$ (дијагонале четвороугла $ABCD$ су нормалне) следи да је $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, тј. да је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Даље, $\measuredangle BDC = \measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \beta$ (периферијски углови над истим луком). Како је $\measuredangle APS = \frac{\pi}{2}$ и $\measuredangle PAS = \measuredangle BAS = \alpha$, следи да је $\measuredangle PSA = \pi - \measuredangle APS - \measuredangle PAS = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$. Поред тога, како је $\measuredangle ASB = \frac{\pi}{2}$, следи да је $\measuredangle PSB = \measuredangle ASB - \measuredangle PSA = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$.

Сада приметимо да су углови $\measuredangle DSQ$ и $\measuredangle PSB$ унакрсни, па следи да је $\measuredangle DSQ = \measuredangle PSB = \alpha$. Такође, углови $\measuredangle CSQ$ и $\measuredangle PSA$ унакрсни, па је и $\measuredangle CSQ = \measuredangle PSA = \beta$. У троуглу $\triangle DSQ$ су углови $\measuredangle DSQ = \alpha$ и $\measuredangle SDQ$ подударни (јер је $\measuredangle SDQ = \measuredangle BDC = \alpha$), па је он једнакокраки. Следи да је $DQ = QS$. А у троуглу $\triangle CSQ$ су углови $\measuredangle CSQ = \beta$ и $\measuredangle SCQ$ подударни (јер је $\measuredangle SCQ = \measuredangle ACD = \beta$), па је и тај троугао једнакокраки. Следи да је $CQ = QS$, па заједно са $DQ = QS$ следи да је $CQ = DQ$, односно да је Q средиште CD.

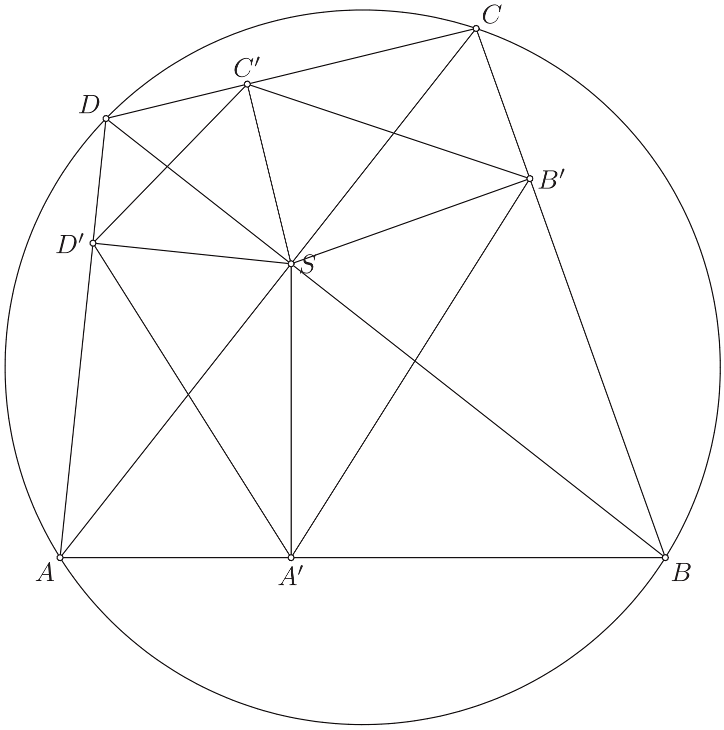
б)



Докажимо да су $A'S, B'S, C'S, D'S$ симетрале унутрашњих углова код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$. Тада ћемо имати да се симетрале унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$ секу у једној тачки (тачки S), па ће то бити центар његовог уписаног круга, а сам четвороугао ће бити тангентни.

Четвороугао $A'BB'S$ је тетиван. Заиста, наспрамни углови $\measuredangle BA'S$ и $\measuredangle BB'S$ су оба права, па су и суплементни. Слично, четвороугао $B'CC'S$ је тетиван јер су наспрамни углови $\measuredangle CB'S$ и $\measuredangle CC'S$ прави углови, па су суплементни, затим је четвороугао $C'DD'S$ тетиван јер су му наспрамни углови $\measuredangle DC'S$ и $\measuredangle DD'S$ оба права, па су суплементни, и, коначно, четвороугао $D'AA'S$ је тетиван јер су му наспрамни углови $\measuredangle AD'S$ и $\measuredangle AA'S$ оба права, па су суплементни. Иначе, сви малопре поменути углови су прави јер су, по дефиницији, тачке A', B', C', D' подножја нормала из S редом на страницама AB, BC, CD, DA.

Пре него што искористимо тетивност горепоменутих четвороуглова, означимо углове: $\measuredangle SA'B' = \alpha$, $\measuredangle SB'C' = \beta$, $\measuredangle SC'D' = \gamma$, $\measuredangle SD'A' = \delta$. Из тетивности четвороугла $A'BB'S$ следи да је $\measuredangle SBB' = \measuredangle SA'B' = \alpha$ (периферијски над луком $\widehat{SB'}$). Међутим, $\measuredangle DBC = \measuredangle SBB' = \alpha$, па из тетивности четвороугла $ABCD$ следи да је $\measuredangle DAC = \measuredangle DBC = \alpha$ (периферијски над луком $\widehat{DC}$), а сада из $\measuredangle SAD' = \measuredangle CAD = \alpha$ и тетивности четвороугла $D'AA'S$ следи да је $\measuredangle SA'D' = \measuredangle SAD' = \alpha$. Дакле, $\measuredangle SA'B' = \alpha = \measuredangle SA'D'$, па је заиста $A'S$ симетрала угла $B'A'D'$, тј. унутрашњег угла код темена A' четвороугла $A'B'C'D'$.



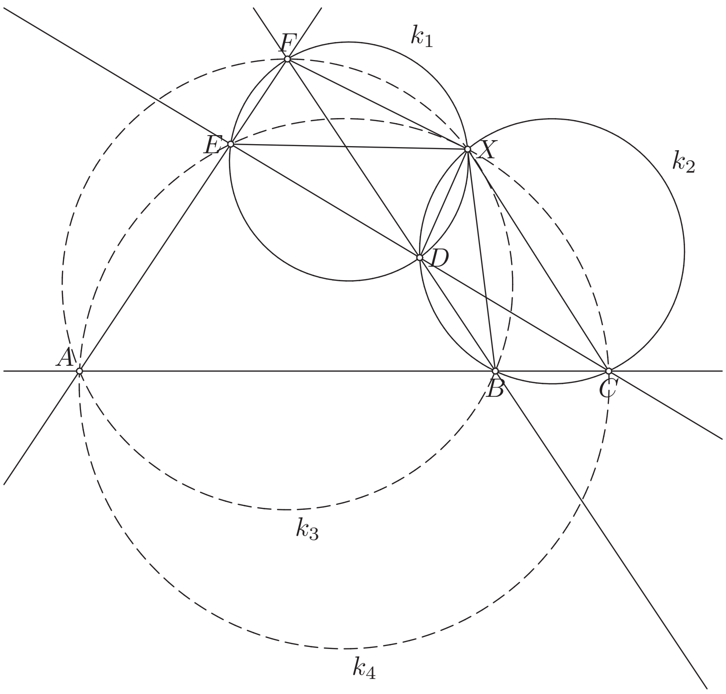
Сасвим слично се доказује да је $\beta = \measuredangle SB'C' = \measuredangle SCC' = \measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \measuredangle A'BS = \measuredangle A'B'S$, тј. да је $\measuredangle SB'C' = \measuredangle SB'A' = \beta$, а затим и да је $\measuredangle SC'D' = \measuredangle SC'B' = \gamma$ и $\measuredangle SD'A' = \measuredangle SD'C' = \delta$. Дакле, заиста се тачка S налази у пресеку симетрала унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$, па је тај четвороугао тангентан.

Приметимо да су унутрашњи углови код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$ подударни редом угловима $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$. Да бисмо доказали да је $A'B'C'D'$ тетиван, довољно је доказати да је збир нека два супротна угла, нпр. углова код темена A' и C', једнак опруженом углу. Другим речима, довољно је доказати да је $2\alpha + 2\gamma = \pi$, односно да је $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Из претходног имамо да је $\measuredangle SBC = \alpha$ и да је $\measuredangle SCB = \gamma$, па како из услова нормалности дијагонала AC и BD четвороугла $ABCD$ имамо да је $\measuredangle BSC = \frac{\pi}{2}$, следи да је

$$\alpha + \gamma = \measuredangle SBC + \measuredangle SCB = \pi - \measuredangle BSC = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

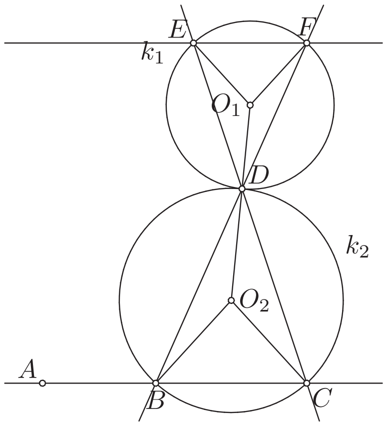
8. (**Микелова теорема**) Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.

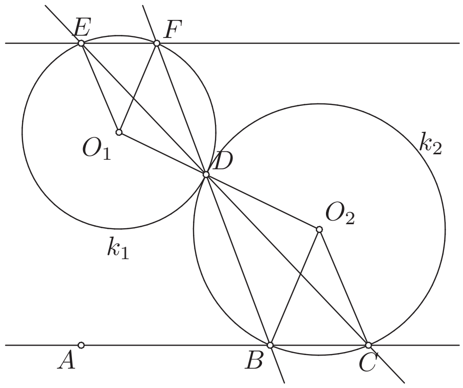
Решење:



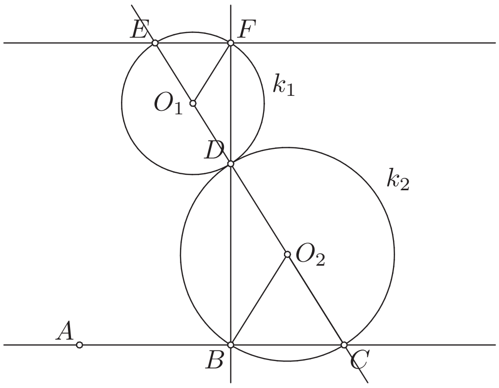
Означимо пресечне тачке ових правих са A, B, C, D, E, F, као на слици, односно тако да важи $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(C, D, E)$, $\mathcal{B}(A, E, F)$ и $\mathcal{B}(B, D, F)$. Троуглови које одређују ове четири праве су троуглови $\triangle DEF$, $\triangle BCD$, $\triangle ABF$, $\triangle ACE$. Нека је k_1 описани круг троугла $\triangle DEF$, нека је k_2 описани круг троугла $\triangle BCD$, нека је k_3 описани круг троугла $\triangle ABF$ и нека је k_4 описани круг троугла $\triangle ACE$. Желимо да докажемо да се ова четири круга секу у једној тачки.

Уочимо најпре кругове k_1 и k_2, описане око троуглова $\triangle DEF$ и $\triangle BCD$. Тачка D припада и кругу k_1 и кругу k_2, те та два круга имају заједничку тачку D. Докажимо најпре да та два круга имају још једну заједничку тачку, тј. да се они секу у двема тачкама.

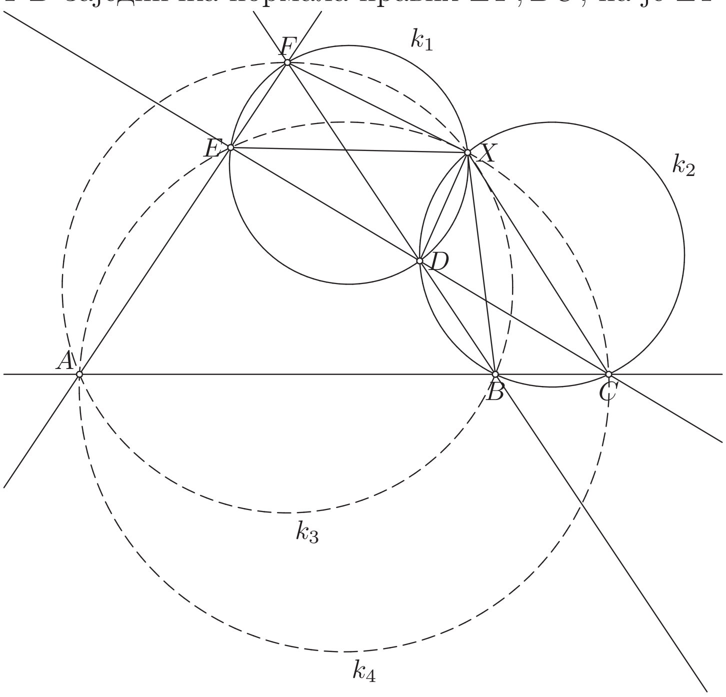




Нека кругови k_1, k_2 имају само једну пресечну тачку D, тј. тачку додира, и означимо са O_1, O_2 редом центре кругова k_1, k_2. Како се кругови k_1, k_2 додирују у тачки D, важи распоред тачака $\mathcal{B}(O_1, D, O_2)$. Тачка O_1 или припада дужи ED или важи једна од релација $O_1, F \mathbin{\ddot{-}} ED$ или $O_1, F \div ED$. Ако O_1 не припада ED, означимо $\measuredangle O_1DE = x$. Троугао $\triangle O_1DE$ је једнакокраки, јер је $O_1D = O_1E$ као полупречници круга k_1, па је $\measuredangle O_1ED = \measuredangle O_1DE = x$ и $\measuredangle EO_1D = 180^\circ - \measuredangle O_1ED - \measuredangle O_1DE = 180^\circ - x - x = 180^\circ - 2x$. Ако важи $O_1, F \mathbin{\ddot{-}} ED$, онда је $\measuredangle EFD = 90^\circ - x$, јер је он периферијски над тетивом ED који одговара централном углу $180^\circ - 2x$, а ако важи $O_1, F \div ED$, онда је $\measuredangle EFD = 90^\circ + x$, јер је он периферијски над тетивом ED који одговара централном углу $360^\circ - (180^\circ - 2x) = 180^\circ + 2x$. Такође, углови $\measuredangle O_1DE$ и $\measuredangle O_2DC$ су унакрсни, па је $\measuredangle O_2DC = \measuredangle O_1DE = x$. Троугао $\triangle O_2DC$ је једнакокраки, јер је $O_2D = O_2C$ као полупречници круга k_2, па је $\measuredangle O_2CD = \measuredangle O_2DC = x$ и $\measuredangle CO_2D = 180^\circ - \measuredangle O_2CD - \measuredangle O_2DC = 180^\circ - x - x = 180^\circ - 2x$. Како важи $\mathcal{B}(O_1, D, O_2)$ и $\mathcal{B}(F, D, B)$, онда важи и $O_1, O_2 \div FB$ и $F, B \div EC$. Према томе, ако важи $O_1, F \mathbin{\ddot{-}} ED$, онда важи и $O_2, B \mathbin{\ddot{-}} DC$, па је $\measuredangle CBD = 90^\circ - x$, јер је он периферијски над тетивом DC који одговара централном углу $180^\circ - 2x$. С друге стране, ако важи $O_1, F \div ED$, онда важи и $O_2, B \div DC$, па је $\measuredangle CBD = 90^\circ + x$, јер је он периферијски над тетивом DC који одговара централном углу $360^\circ - (180^\circ - 2x) = 180^\circ + 2x$. Према томе, у оба случаја је $\measuredangle EFD = \measuredangle CBD$. Како та два угла имају заједнички крак BF, следи да је $EF \parallel BC$.

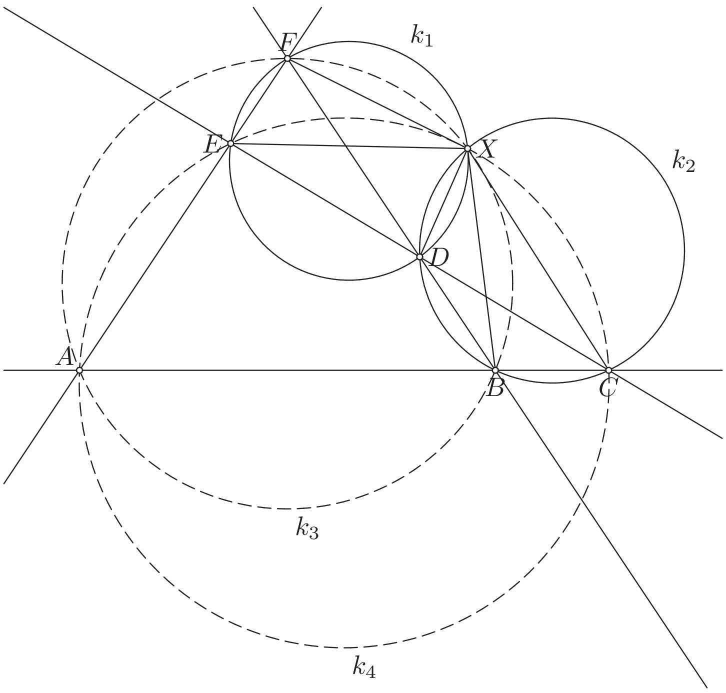


Ако O_1 припада ED, онда је $\measuredangle EFD = 90°$, јер је он периферијски угао над пречником ED. Такође, како важи $\mathcal{B}(O_1, D, O_2)$, $\mathcal{B}(E, D, C)$ и O_1 припада ED, следи да O_2 припада DC. Стога је $\measuredangle DBC = 90°$, јер је он периферијски над пречником DC. Како важи $\mathcal{B}(F, D, B)$, следи да је FB заједничка нормала правих EF, BC, па је $EF \parallel BC$.



Према томе, ако би се кругови k_1 и k_2 додиривали у тачки D, онда би било $EF \parallel BC$, што је немогуће, јер се EF и BC секу у тачки A. То значи да се кругови k_1 и k_2 морају сећи у двема различитим тачкама и нека су X, D пресечне тачке кругова k_1 и k_2. Означимо углове $\measuredangle EDF = \alpha$, $\measuredangle EXD = \beta$ и $\measuredangle DXB = \gamma$. Углови $\measuredangle BDC$ и $\measuredangle EDF$ су унакрсни, па су подударни. Дакле, $\measuredangle BDC = \alpha$. Угао $\measuredangle EXF$ је периферијски над луком $\widehat{EF}$, па је подударан углу $\measuredangle EDF$. Следи да је $\measuredangle EXF = \alpha$. Такође, угао

$\measuredangle BXC$ је периферијски над луком $\widehat{BC}$, па је подударан углу $\measuredangle BDC$. Следи да је и $\measuredangle BXC = \alpha$.



Имамо и да је $\measuredangle EFD = \measuredangle EXD = \beta$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{ED}$, као и $\measuredangle DCB = \measuredangle DXB = \gamma$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{DB}$. Одредимо угао $\measuredangle BAF = \measuredangle CAE$, пошто је то заједнички унутрашњи угао четвороуглова $ABXF$ и $ACXE$. У томе ће нам помоћи угао $\measuredangle CEA$ који је спољашњи угао код темена E троугла DEF, па је једнак збиру његова два несуседна унутрашња угла, а то су $\measuredangle EFD = \beta$ и $\measuredangle EDF = \alpha$. Дакле, $\measuredangle CEA = \alpha + \beta$. Следи да је $\measuredangle CAE = \pi - \measuredangle CEA - \measuredangle ACE = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

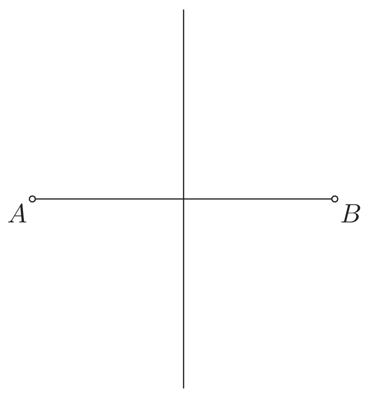
Сада доказујемо да су четвороуглови $ABXF$ и $ACXE$ тетивни, јер ћемо тада добити да њихово заједничко теме X припада круговима који садрже тачке A, B, F, односно A, C, E, а то су баш описани кругови троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$. Како је $\measuredangle BXF = \measuredangle BXD + \measuredangle DXE + \measuredangle EXF = \alpha + \beta + \gamma$, као и $\measuredangle CXE = \measuredangle CXB + \measuredangle BXD + \measuredangle DXE = \alpha + \beta + \gamma$, следи да су супротни углови $\measuredangle BAF$ и $\measuredangle BXF$ четвороугла $ABXF$, односно $\measuredangle CAE$ и $\measuredangle CXE$ четвороугла $ACXE$, суплементни. Дакле, то су тетивни четвороуглови, па имамо да X припада круговима k_3, k_4 (описаним око троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$).

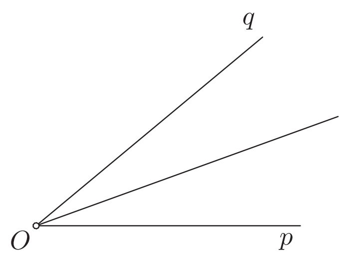
Према томе, тачка X припада круговима k_1, k_2, k_3, k_4. Како се кругови k_1, k_2 секу у тачкама D, X, а пресек сва четири круга садржи тачку X

и мора бити подскуп скупа који је пресек k_1 и k_2, следи да је пресек сва четири круга или скуп $\{D, X\}$ или скуп $\{X\}$ (тј. само тачка X). Међутим, тачка D не припада ни кругу k_3 ни кругу k_4, па следи да не припада пресеку сва четири круга. Дакле, пресек кругова k_1, k_2, k_3, k_4 је само тачка X, тј. та четири круга секу се у једној тачки (тачки X).

Дефиниција 9. Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\measuredangle pOq$. *Медијатриса* дужи AB је њена симетрала, тј. то је права у равни α која садржи њено средиште и нормална је на њој. *Бисектриса* угла $\measuredangle pOq$ је полуправа чије је теме тачка O, која припада углу $\measuredangle pOq$ и која дели угао $\measuredangle pOq$ на два подударна угла.

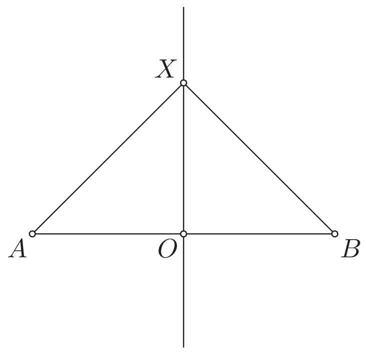
Дакле, медијатриса дужи је исто што и симетрала дужи, док је бисектриса угла *полуправа* која га дели на два подударна угла за разлику од симетрале угла која је *права* која садржи бисектрису.



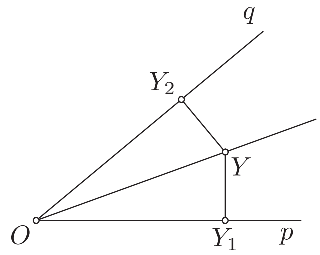


Теорема 6. *Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\measuredangle pOq$. Медијатриса дужи AB је скуп свих тачака X равни α таквих да је $XA = XB$. Бисектриса угла $\measuredangle pOq$ је скуп свих тачака Y равни α које припадају углу $\measuredangle pOq$ таквих да је $YY_1 = YY_2$, где је Y_1 подножје нормале из Y на крак Op, а Y_2 подножје нормале из Y на крак Oq.*

Доказ: Нека је X произвољна тачка медијатрисе дужи AB. Ако је X средиште дужи AB, онда одмах следи да је $XA = XB$ (по дефиницији средишта дужи). Нека X није средиште дужи AB, а њега (средиште) означимо са O. Посматрајмо троуглове $\triangle XOA$ и $\triangle XOB$. Ти троуглови имају заједничку страницу XO, затим су им углови $\measuredangle XOA$ и $\measuredangle XOB$ подударни јер су то прави углови (X је на медијатриси дужи AB, па је $XO \perp AB$) и странице OA и OB су им подударне јер је O средиште дужи AB. На основу става СУС закључујемо да је $\triangle XOA \cong \triangle XOB$, па следи да је $XA = XB$, што смо и хтели да докажемо.



Обратно, нека је X тачка равни α таква да је $XA = XB$. Ако је X средиште дужи AB, онда по дефиницији медијатрисе следи да јој X припада. Нека X није средиште дужи AB и означимо средиште са O. Да бисмо доказали да X припада медијатриси дужи AB, довољно је да докажемо да је $XO \perp AB$. Посматрајмо поново троуглове $\triangle XOA$ и $\triangle XOB$. Њима је страница XO заједничка, затим је $OA = OB$ јер је O средиште дужи AB и по претпоставци важи $XA = XB$. Закључујемо на основу става ССС да је $\triangle XOA \cong \triangle XOB$, па је $\measuredangle XOA = \measuredangle XOB$. Како је $\measuredangle AOB = \pi$ и $\measuredangle AOB = \measuredangle XOA + \measuredangle XOB = 2\measuredangle XOB$, следи да је $\measuredangle XOB = \frac{\pi}{2}$, тј. да је $XO \perp AB$.



Нека је Y произвољна тачка бисектрисе угла $\measuredangle pOq$. Тада Y припада углу $\measuredangle pOq$, јер бисектриса угла припада том углу. Ако је $Y = O$, онда су одговарајућа подножја нормала Y_1 и Y_2 на крацима Op и Oq угла $\measuredangle pOq$ из тачке $Y(= O)$ исто једнака тачки O, тј. $Y_1 = Y_2 = O$, а онда јасно важи $YY_1 = YY_2$. Нека је тачка Y различита од темена O угла $\measuredangle pOq$ и нека су Y_1, Y_2 подножја нормала из Y редом на крацима Op, Oq угла $\measuredangle pOq$. Посматрајмо троуглове $\triangle YOY_1$ и $\triangle YOY_2$. Њима је YO заједничка страница, затим је $\measuredangle YOY_1 = \measuredangle YOY_2$ јер је полуправа OY бисектриса угла $\measuredangle Y_1OY_2$, па га дели на два подударна угла $\measuredangle YOY_1$ и $\measuredangle YOY_2$, и углови $\measuredangle YY_1O$ и $\measuredangle YY_2O$ су подударни јер су то прави углови. Закључујемо на основу става СУУ да је $\triangle YOY_1 \cong \triangle YOY_2$, па добијамо да је $YY_1 = YY_2$, што смо и хтели да докажемо.

Обратно, нека је Y тачка из равни α која припада углу $\measuredangle pOq$ и нека је $YY_1 = YY_2$, где су Y_1, Y_2 подножја нормала из тачке Y на крацима Op и Oq угла $\measuredangle pOq$. Ако је $Y = O$ (то је могуће, јер је тачка O подножје нормале из тачке O и на краку Op и на краку Oq, па би тада било $Y_1 = Y_2 = Y = O$ и $YY_1 = YY_2$), онда Y припада бисектриси угла $\measuredangle pOq$ (по дефиницији, теме угла припада његовој бисектриси). Нека је тачка Y различита од темена O. Посматрајмо поново троуглове $\triangle OYY_1$ и $\triangle OYY_2$. Њима је OY заједничка страница, затим је по претпоставци $YY_1 = YY_2$, углови $\measuredangle OY_1Y$ и $\measuredangle OY_2Y$ наспрам OY су подударни (то су прави углови), а углови $\measuredangle YOY_1$ и $\measuredangle YOY_2$ наспрам YY_1, односно YY_2, јесу оба оштра, јер у неком троуглу може бити највише један прав или туп угао, а у троугловима $\triangle OYY_1$ и $\triangle OYY_2$ већ имамо по један прав угао, па остали морају бити оштри. Према ставу ССУ следи $\triangle OYY_1 \cong \triangle OYY_2$, па закључујемо да је $\measuredangle YOY_1 = \measuredangle YOY_2$, тј. полуправа OY дели угао $\measuredangle Y_1OY_2$ на два подударна угла. Следи да је полуправа OY у ствари бисектриса угла $\measuredangle pOq$, па Y припада тој бисектриси. $\square$