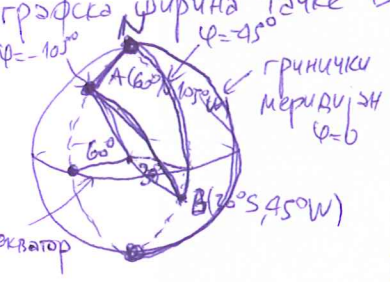


8.2. A(60°N, 105°W)
 B(30°S, 45°W)

Географска ширина тачке А је $\theta_A = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$, а географска дужина је $\varphi_A = -105^\circ$. Слично, географска ширина тачке В је $\theta_B = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$, а географска дужина је $\varphi_B = -45^\circ$.



У сферном троуглу $\triangle \widehat{NAB}$ је:

$$\widehat{NA} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\widehat{NB} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\angle ANB = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Из косинусне теореме следи да је

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \angle ANB$$

$$\cos \widehat{AB} = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} = -\frac{2\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos \widehat{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\widehat{AB} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

8.4. а) Троугао који има три прava угла је једнакостраничан (наспрам једнаких углова су једнаке стране). Нека је његова страница a . Из дуалне косинусне теореме је

$$-\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \cos a$$

$$-0 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot \cos a$$

$$0 = 0 - \cos a$$

$$0 = -\cos a$$

$$\cos a = 0$$

$$a = \frac{\pi}{2}$$

(Може и из обичне косинусне теореме)

$$\cos a = \cos a \cdot \cos a + \sin a \cdot \sin a \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\cos a = \cos^2 a + \sin^2 a \cdot 0$$

$$\cos a = \cos^2 a + 0 = \cos^2 a$$

$$\cos a (1 - \cos a) = 0$$

$$\cos a = 0 \text{ или } \cos a = 1$$

$$a = \frac{\pi}{2} \text{ или } a = 0$$

Дакле, све странице су једнаке $\frac{\pi}{2}$. Једно од темена може бити северни пол. Друга два темена су на екватору, јер је растојање било које тачке на екватору од северног пола једнако $\frac{\pi}{2}$ (што је географска ширина северног пола). Друго од темена може бити на граничком меридијану, а треће теме може бити на меридијану $\varphi = 90^\circ$. Дакле, могућа темена таквог троугла су

$A(\theta = 90^\circ, \varphi = \text{недефинисано}), B(\theta = 0^\circ, \varphi = 0^\circ), C(\theta = 0^\circ, \varphi = 90^\circ)$. У Декартовим координатама:

A: $x = \cos \theta \cos \varphi = 0 \cdot (\) = 0$
 $y = \cos \theta \sin \varphi = 0 \cdot (\) = 0$
 $z = \sin \theta = 1$

B: $x = \cos \theta \cos \varphi = 1 \cdot 1 = 1$
 $y = \cos \theta \sin \varphi = 1 \cdot 0 = 0$
 $z = \sin \theta = 0$

C: $x = \cos \theta \cos \varphi = 1 \cdot 0 = 0$
 $y = \cos \theta \sin \varphi = 1 \cdot 1 = 1$
 $z = \sin \theta = 0$

$A(0, 0, 1)$
 $B(1, 0, 0)$
 $C(0, 1, 0)$

8.7. Ако тачка има географску ширину θ_0 , онда је $\widehat{NA} = \widehat{NA'} - \widehat{AA'} = \frac{\pi}{2} - \theta_0$. Значи, све тачке на паралели $\theta = \theta_0$ су на растојању $d = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ од северног пола, па следи да је геометријско место тачака које су удаљене од северног пола за d управо паралела $\theta = \frac{\pi}{2} - d$. Како је свако растојање краћи лук великог круга а обим (сваког) великог круга је $2\pi \cdot 1 = 2\pi$, следи да је $0 < d \leq \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$, при чему су тачке на растојању π дијаметрално супротне тачке сфере (и постоји бесконачно много великих полукругова који их спајају).

