4.5. $k_1: (x-7)^2+(y-3)^2=r_1^2$ $\quad C_1(7,3),\ r_1>0$

$k_2: (x-17)^2+(y-3)^2=81$ $\quad C_2(17,3),\ r_2=9$

$t: ax+by+c=0$ заједничка тангента

$d(C_1,t)=r_1,\quad d(C_2,t)=9$

$$\frac{|7a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r_1 \qquad \frac{|17a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=9$$

Без умањења општости можемо узети да је $a^2+b^2=1$

$|7a+3b+c|=r_1,\quad |17a+3b+c|=9,\quad a^2+b^2=1$

а) Број заједничких тангенти се рачуна у зависности од $|r_1-r_2|$, $d(C_1,C_2)$, r_1+r_2

$d(C_1,C_2)=\sqrt{(7-17)^2+(3-3)^2}=\sqrt{(-10)^2}=10$

1° $d(C_1,C_2)>r_1+r_2$ (број заједничких тангенти је 4)

$10>r_1+9$

$r_1<1$

2° $d(C_1,C_2)=r_1+r_2$ (кружнице се додирују споља, број заједничких тангенти је 3)

$10=r_1+9$

$r_1=1$

3° $|r_1-r_2|<d(C_1,C_2)<r_1+r_2$ (број заједничких тангенти је 2)

$|r_1-9|<10<r_1+9$

$\underline{r_1>1}$ $\qquad$ 3° 1. $r_1<9$ $\qquad$ 3° $r_1\geq 9$

$9-r_1<10 \qquad r_1-9<10$

$r_1>-1 \qquad r_1<19$

$1<r_1<19$

4° $d(C_1,C_2)=|r_1-r_2|$ (кружнице се додирују изнутра, број заједничких тангенти је 1)

$10=|r_1-9|$

$r_1=19$, јер је $r_1>0$

5° $d(C_1,C_2)<|r_1-r_2|$ $\qquad$ $10<r_1-9$ јер је $r_1>0$, па је $9-r_1<9<10$

$10<|r_1-9|$ $\qquad$ $r_1>19$

б) $r_1 = 3$

$|7a+3b+c| = 3, \quad |17a+3b+c| = 9, \quad a^2+b^2=1$

1° $7a+3b+c=3$
$17a+3b+c=9$

$10a=6$

$a=\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{10}_{5}}=\frac{3}{5}$

$a^2+b^2=1$

$\frac{9}{25}+b^2=1$

$b^2=\frac{16}{25}$

$b=\frac{4}{5} \qquad b=-\frac{4}{5}$

2° $7a+3b+c=3$
$17a+3b+c=-9$

$10a=-12$

$a=-\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{10}_{5}}=-\frac{6}{5}$ ↯

немогуће, јер је $|a|>1$, а треба да буде $a^2+b^2=1$, што значи да је $|a|\leq 1$.

3° $7a+3b+c=-3$
$17a+3b+c=9$

непотребно решавати, јер се заменом $a_1=-a,\ b_1=-b,\ c_1=-c$ добија случај 2°

4° $7a+3b+c=-3$
$17a+3b+c=-9$

такође непотребно решавати, јер се заменом $a_1=-a,\ b_1=-b,\ c_1=-c$ добија случај 1°

Добијају се решења: $a=\frac{3}{5},\ b=\frac{4}{5},\ c=3-7a-3b=3-\frac{21}{5}-\frac{12}{5}=-\frac{18}{5}$

$a=\frac{3}{5},\ b=-\frac{4}{5},\ c=3-7a-3b=3-\frac{21}{5}+\frac{12}{5}=\frac{6}{5}$

Дакле $t_1: \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{18}{5}=0, \quad t_2: \frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+\frac{6}{5}=0$ тј.

$t_1: 3x+4y-18=0, \quad t_2: 3x-4y+6=0$

4.6 $A(5,5)$
$B(1,3)$
$C(3,-1)$
$D(x_0,y_0)$

A_1 - средиште AB

$A_1\left(\frac{5+1}{2}, \frac{5+3}{2}\right)$

$A_1(3,4)$

B_1 - средиште BC

$B_1\left(\frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$

$B_1(2,1)$

C_1 - средиште CD

$C_1\left(\frac{3+x_0}{2}, \frac{-1+y_0}{2}\right)$

D_1 - средиште DA

$D_1\left(\frac{x_0+5}{2}, \frac{y_0+5}{2}\right)$

S_1 - пресек дијагонала A_1C_1 и B_1D_1, $S_1(4,3)$

$A_1C_1: \dfrac{x-3}{\frac{3+x_0}{2}-3}=\dfrac{y-4}{\frac{-1+y_0}{2}-4}$

Заменимо $x=4,\ y=3$

$\dfrac{1}{\frac{3+x_0}{2}-3}=\dfrac{-1}{\frac{-1+y_0}{2}-4}$

$\frac{3+x_0}{2}-3=-\frac{-1+y_0}{2}+4 \ /\cdot 2$

$3+x_0-6=1-y_0+8$

$B_1D_1: \dfrac{x-2}{\frac{x_0+5}{2}-2}=\dfrac{y-1}{\frac{y_0+5}{2}-1}$

$\dfrac{2}{\frac{x_0+5}{2}-2}=\dfrac{2}{\frac{y_0+5}{2}-1}$

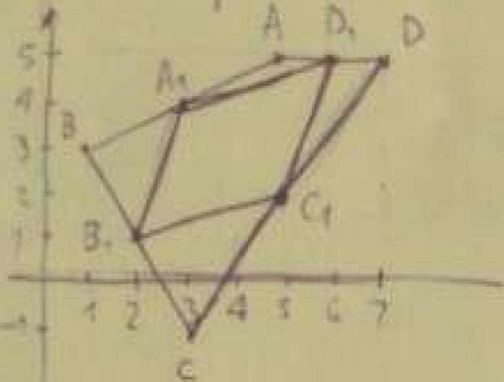
$\frac{x_0+5}{2}-2=\frac{y_0+5}{2}-1 \ /\cdot 2$

$x_0+5-4=y_0+5-2$

$$x_0 + y_0 = 12$$
$$x_0 - y_0 = 2$$
$$2x_0 = 14$$
$$x_0 = 7 \qquad y_0 = 5$$

$D(7,5)$

Однос површина:



$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|, \quad P_{ACD} = \frac{1}{2}\|\vec{AC}\times\vec{AD}\|$$

$$\vec{AB} = (1-5, 3-5) = (-4,-2)$$
$$\vec{AC} = (3-5, -1-5) = (-2,-6)$$
$$\vec{AD} = (7-5, 5-5) = (2,0)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,20) \qquad \vec{AC}\times\vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,12)$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10, \quad P_{ACD} = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6 \Rightarrow P_{ABCD} = 10+6 = 16$$

$A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм ($A_1D_1 \| BD \| B_1C_1$ и $A_1B_1 \| AC \| D_1C_1$ као средње линије троуглова)

$$\Rightarrow P_{A_1B_1C_1D_1} = \|\vec{A_1B_1}\times\vec{A_1D_1}\| = 8$$

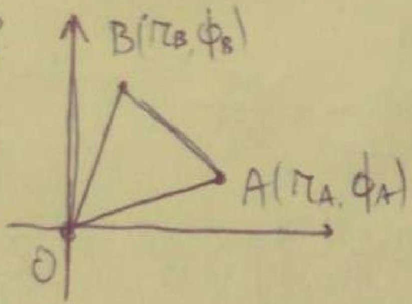
$$D_1\left(\frac{5+7}{2}, \frac{5+5}{2}\right)$$
$$D_1(6,5)$$

$$\vec{A_1B_1} = (2-3, 1-4) = (-1,-3)$$
$$\vec{A_1D_1} = (6-3, 5-4) = (3,1)$$

$$\vec{A_1B_1}\times\vec{A_1D_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,8)$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABCD}}{P_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{16}{8} = 2$$

4.8



У троуглу ΔOAB: $OA = r_A$

$OB = r_B$

$\sphericalangle AOB = |\phi_B - \phi_A|$

Косинусна теорема: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - OA \cdot OB \cdot \cos\sphericalangle AOB$

$= r_A^2 + r_B^2 - r_A r_B \cos(\phi_B - \phi_A)$

парна функција