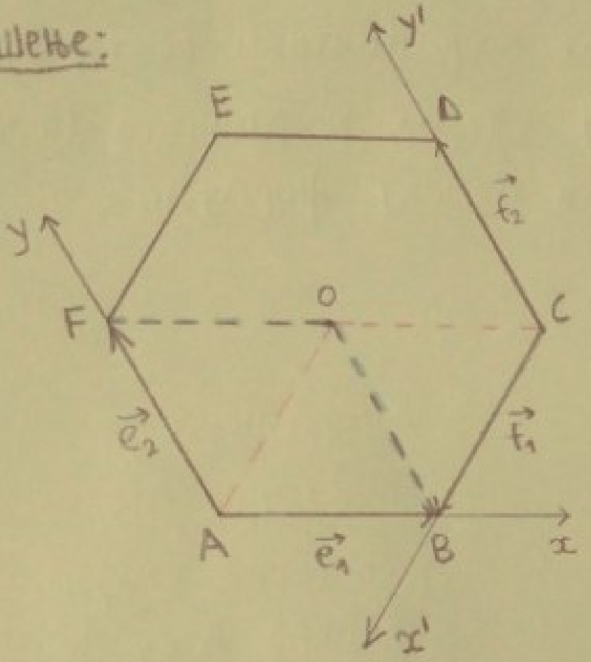
3.2. Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао. Репер Axy има координатне векторе $\vec{e_1}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2}=\overrightarrow{AF}$, а репер $Cx'y'$ координатне векторе $\vec{f_1}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{f_2}=\overrightarrow{CD}$. Одредити формуле које представљају везу координата (x,y) и (x',y'), њима инверзне формуле, као и координате темена шестоугла у оба репера.

Решење:



Координатни вектори у старом реперу Axy су $\vec{e_1}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e_2}=\overrightarrow{AF}$ (Ax и Ay су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e_1}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e_2}=\overrightarrow{AF}$ као на слици лево).

Координатни вектори у новом реперу $Cx'y'$ су $\vec{f_1}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{f_2}=\overrightarrow{CD}$ (Cx' и Cy' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f_1}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{f_2}=\overrightarrow{CD}$ као на слици лево).

Потребно је да изразимо нове координатне векторе $\vec{f_1}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{f_2}=\overrightarrow{CD}$ преко старих координатних вектора $\vec{e_1}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e_2}=\overrightarrow{AF}$ да бисмо нашли везу између старих координата (x,y) и нових координата (x',y'). То радимо користећи својства сабирања вектора и супротног вектора.

$$\vec{f_1}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}$$
$$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=-\vec{e_1}-\vec{e_2}$$

Тачка A је почетак вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, а F је крајња тачка вектора $\vec{e_2}$

$\overrightarrow{FC}=2\overrightarrow{AB}$ јер су $\overrightarrow{FC}$ и $\overrightarrow{AB}$ истог правца и смера и FC је 2 пута дужа од дужи AB

Дакле, $\vec{f_1} = -\vec{e_1} - \vec{e_2}$.

$\vec{f_2} = \vec{CD} = \vec{AF} = \vec{e_2}$

Вектори $\vec{CD}$ и $\vec{AF}$ су истог правца, смера и интензитета.

Поновимо формулу са предавања и вежби о трансформацији координата.

Ако је Axy стари репер са координатним векторима $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, а $Cx'y'$ нови репер са координатним векторима $\vec{f_1}$ и $\vec{f_2}$, онда је веза између старих координата (x,y) и нових координата (x',y') дата помоћу формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Координате првог новог координатног вектора $\vec{f_1}$ израженог помоћу вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ редом.

У овом задатку је $\vec{f_1} = -\vec{e_1} - \vec{e_2}$ те је $a_{11} = -1$ и $a_{21} = -1$

Координате другог новог координатног вектора $\vec{f_2}$ израженог помоћу старих координатних вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ редом.

У овом задатку је $\vec{f_2} = \vec{e_2} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$ те је $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 1$.

Координате вектора $\vec{AC}$ (почетак старог репера Axy је тачка A, а почетак новог репера $Cx'y'$ је тачка C) израженог помоћу старих координатних вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$.

У овом задатку је $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} =$
$= \vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AB} - (-\vec{AB} - \vec{AF})$
$= \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{AF} =$
$= 2\vec{AB} + \vec{AF} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2}$
те је $b_1 = 2$ и $b_2 = 1$.

Уочимо центар O датог правилног шестоугла $ABCDEF$. Троуглови OAB и OAF су једнакостранични те је $\measuredangle ABO = \measuredangle AFO = 60°$ и $\measuredangle BAF = \measuredangle BOF = 120°$.

Како су наспрамни углови четвороугла $ABOF$ једнаки, то је он паралелограм. Слично је и четвороугао $ABCO$ паралелограм јер је $\measuredangle OAB = \measuredangle OCB = 60^\circ$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle AOC = 120^\circ$ (централни углови $\measuredangle FOA$, $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle BOC$ правилног шестоугла једнаки су по 60°).

Зато је $\vec{CB} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} = \vec{FA} + \vec{BA} = -\vec{AF} - \vec{AB} = -\vec{AB} - \vec{AF}$.

Дакле, по наведеној формули за трансформацију координата, веза између старих и нових координата је:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

← резултат множења ових матрица је матрица типа 2x1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot x' + 0\cdot y' \\ -1\cdot x' + 1\cdot y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x' \\ -x'+y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x'+2 \\ -x'+y'+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -x'+2 \\ y = -x'+y'+1 \end{matrix}$$

Ово су тражене везе између старих и нових координата.

На основу њих налазимо тражене инверзне формуле, тако што x' и y' изражавамо преко x и y.

$$x = -x'+2 \Rightarrow x' = -x+2$$

$$y = -x'+y'+1 \Rightarrow y' = y + x' - 1 = y - x + 2 - 1 = -x + y + 1$$

Инверзне формуле можемо написати и у облику матричне једнакости.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot x + 0\cdot y \\ -1\cdot x + 1\cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Напишимо сада координате темена шестоугла у старом реперу Axy. Претпоставимо да треба да изразимо координате темена T. То су заправо координате вектора $\overrightarrow{AT}$ изражених преко координатних вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ репера Axy.

Теме шестоугла	Одговарајући вектор	Тражене координате темена у реперу Axy
A	$\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2}$	(0,0)
B	$\overrightarrow{AB} = 1\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2}$	(1,0)
C	$\overrightarrow{AC} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2}$ изведено на страни 2	(2,1)
D	$\overrightarrow{AD} = 2\cdot\overrightarrow{BC} = 2\cdot\overrightarrow{AO} = 2\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\cdot\overrightarrow{AF} = 2\vec{e_1} + 2\cdot\vec{e_2}$	(2,2)
E	$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF} - (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF})$ доказано на страни 3 $= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$	(1,2)
F	$\overrightarrow{AF} = 0\cdot\vec{e_1} + 1\cdot\vec{e_2}$	(0,1)

Дакле, координате темена шестоугла у старом реперу Axy су A(0,0), B(1,0), C(2,1), D(2,2), E(1,2) и F(0,1).

Напишимо сада координате темена шестоугла у новом реперу $Cx'y'$. Како смо већ одредили координате темена шестоугла у старом реперу Axy и знамо везу између нових и старих координата, можемо на тај начин израчунати координате темена шестоугла у новом реперу $Cx'y'$.

$$\left.\begin{array}{l} x' = -x+2 \\ y' = -x+y+1 \end{array}\right\rangle$$ извели смо ове формуле на страни 3

Теме шестоугла	Координате темена у реперу Axy	Координате темена у реперу $Cx'y'$
A	$(0,0)$ $x=0$ $y=0$	$x'=-0+2=2$ $y'=-0+0+1=1$ $(2,1)$
B	$(1,0)$ $x=1$ $y=0$	$x'=-1+2=1$ $y'=-1+0+1=0$ $(1,0)$
C	$(2,1)$ $x=2$ $y=1$	$x'=-2+2=0$ $y'=-2+1+1=0$ $(0,0)$
D	$(2,2)$ $x=2$ $y=2$	$x'=-2+2=0$ $y'=-2+2+1=1$ $(0,1)$
E	$(1,2)$ $x=1$ $y=2$	$x'=-1+2=1$ $y'=-1+2+1=2$ $(1,2)$
F	$(0,1)$ $x=0$ $y=1$	$x'=-0+2=2$ $y'=-0+1+1=2$ $(2,2)$

Дакле, координате темена шестоугла у новом реперу $Cx'y'$ су $A(2,1)$, $B(1,0)$, $C(0,0)$, $D(0,1)$, $E(1,2)$ и $F(2,2)$.

3.4. Дате су координате тачака $A(2,1)$, $B(3,0)$ и $C(1,4)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(1,6)$, $B(1,9)$ и $C(3,1)$. Изразити координате (x,y) произвољне тачке M у реперу Oxy помоћу координата (x',y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$.

Решење: Формула која повезује старе и нове координате у афиним реперима Oxy и $O'x'y'$ редом су:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Циљ је да одредимо $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ и b_2.

Тачка	Координате тачке у афином реперу Oxy	Координате тачке у афином реперу $O'x'y'$
A	$x=2 \quad y=1$	$x'=1 \quad y'=6$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{11} + 6a_{12} + b_1 &= 2 \quad (1) \\ a_{21} + 6a_{22} + b_2 &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

B	$x=3 \quad y=0$	$x'=1 \quad y'=9$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} a_{11} + 9a_{12} + b_1 &= 3 \quad (3) \\ a_{21} + 9a_{22} + b_2 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

C	$x=1 \quad y=4$	$x'=3 \quad y'=1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 3a_{11} + a_{12} + b_1 &= 1 \quad (5) \\ 3a_{21} + a_{22} + b_2 &= 4 \quad (6) \end{aligned}$$

Остало је још да решимо систем од 6 једначина са 6 непознатих. Довољно је решити два система од 3 једначине са 3 непознате.

$$a_{11}+6a_{12}+b_1=2 \quad (1) \quad /\cdot(-1)$$
$$a_{11}+9a_{12}+b_1=3 \quad (3) \quad +$$
$$3a_{11}+a_{12}+b_1=1 \quad (5)$$

$$a_{11}+6a_{12}+b_1=2$$
$$3a_{12}=1 \Rightarrow \boxed{a_{12}=\frac{1}{3}}$$
$$2a_{11}-5a_{12}=-1$$
$$2\cdot a_{11}-\frac{5}{3}=-1$$
$$2a_{11}=-1+\frac{5}{3}$$
$$2a_{11}=\frac{2}{3}$$
$$\boxed{a_{11}=\frac{1}{3}}$$

$$b_1=2-a_{11}-6a_{12}$$
$$b_1=2-\frac{1}{3}-6\cdot\frac{1}{3}$$
$$b_1=2-\frac{1}{3}-2$$
$$\boxed{b_1=-\frac{1}{3}}$$

$$a_{21}+6a_{22}+b_2=1 \quad (2) \quad /\cdot(-1)$$
$$a_{21}+9a_{22}+b_2=0 \quad (4) \quad +$$
$$3a_{21}+a_{22}+b_2=4 \quad (6) \quad +$$

$$a_{21}+6a_{22}+b_2=1$$
$$3a_{22}=-1 \Rightarrow \boxed{a_{22}=-\frac{1}{3}}$$
$$2a_{21}-5a_{22}=3$$
$$2a_{21}+\frac{5}{3}=3$$
$$2a_{21}=3-\frac{5}{3}$$
$$2a_{21}=\frac{9-5}{3}$$
$$2a_{21}=\frac{4}{3}$$
$$\boxed{a_{21}=\frac{2}{3}}$$

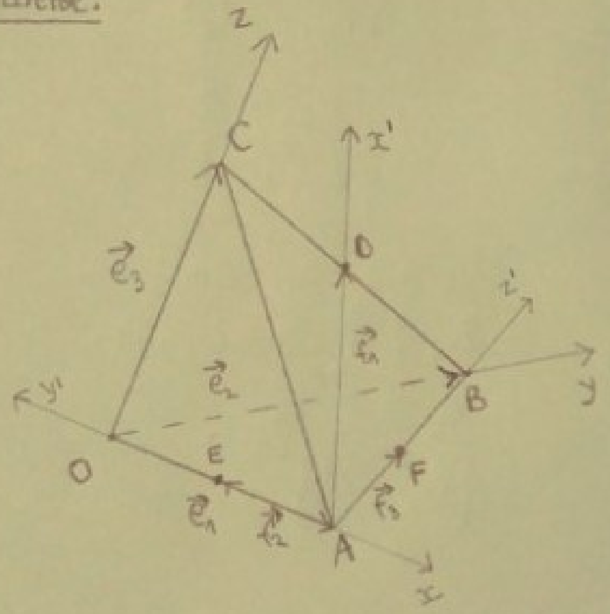
$$b_2=1-a_{21}-6a_{22}$$
$$b_2=1-\frac{2}{3}-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$b_2=\frac{1}{3}+2$$
$$\boxed{b_2=\frac{7}{3}}$$

Тако смо добили тражену везу између координата (x,y) произвољне тачке M у реперу Oxy и координата (x',y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$ и она је дата формулом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

3.5. Дат је тетраедар $OABC$. Афини репер $Oxyz$ има почетак у темену O, а координатни вектори су $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$. Афини репер $Ax'y'z'$ има почетак у темену A тетраедра, а његови координатни вектори су $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$, где су D, E и F средишта ивица BC, OA и AB. Изразити координате (x,y,z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ помоћу координата (x',y',z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$. Одредити инверзне формуле као и координате темена тетраедра у односу на репер $Ax'y'z'$.

Решење:



Координатни вектори у старом реперу $Oxyz$ су $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$. (Ox, Oy и Oz су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$). Координатни вектори у новом реперу $Ax'y'z'$ су $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$ (Ax', Ay' и Az' су усмерене у правцу и смеру вектора $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$)

Потребно је да изразимо нове координатне векторе $\vec{f_1}=\vec{AD}$, $\vec{f_2}=\vec{AE}$ и $\vec{f_3}=\vec{AF}$ преко старих координатних вектора $\vec{e_1}=\vec{OA}$, $\vec{e_2}=\vec{OB}$ и $\vec{e_3}=\vec{OC}$.

$$\vec{f_1}=\vec{AD}=\vec{AO}+\vec{OD}=\vec{OD}-\vec{OA}=\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{OC}-\vec{OA}=-\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{OC}=-\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}+\frac{1}{2}\vec{e_3}$$

D је средиште дужи BC
па је по задатку 1.8.
$\vec{OD}=\frac{1}{2}\vec{OB}+\frac{1}{2}\vec{OC}$

$$\vec{f_2}=\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{AO}=-\frac{1}{2}\vec{OA}=-\frac{1}{2}\vec{e_1}$$

$$\vec{f_3}=\vec{AF}=\vec{AO}+\vec{OF}=-\vec{OA}+\vec{OF}=-\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB}=-\frac{1}{2}\vec{OA}+\frac{1}{2}\vec{OB}=-\frac{1}{2}\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}$$

F је средиште дужи AB

Дакле, $\vec{f_1} = (-1)\cdot\vec{e_1} + \frac{1}{2}\cdot\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\vec{f_2} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

$\vec{f_3} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

Формула о трансформацији координата нам даје да ако је $Oxyz$ стари репер са координатним векторима $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$, а $Ax'y'z'$ нови репер са координатним векторима $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ и $\vec{f_3}$, онда је веза између старих координата (x,y) и нових координата:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Координате вектора $\vec{OA}$ (O је почетак репера $Oxyz$, а A је почетак репера $Ax'y'z'$) преко $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$.

$\vec{OA} = 1\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3} \Rightarrow b_1 = 1 \; b_2 = 0 \; b_3 = 0$

Координате првог новог координатног вектора $\vec{f_1}$ изражених помоћу вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$.

$\vec{f_1} = (-1)\vec{e_1} + \frac{1}{2}\cdot\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_3}$

$\Rightarrow a_{11} = -1 \;\; a_{21} = \frac{1}{2} \;\; a_{31} = \frac{1}{2}$

Координате $\vec{f_2}$ изражених преко $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$

$\vec{f_2} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

$\Rightarrow a_{12} = -\frac{1}{2} \;\; a_{22} = 0 \;\; a_{32} = 0$

Координате $\vec{f_3}$ изражених преко $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$

$\vec{f_3} = -\frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3}$

$\Rightarrow a_{13} = -\frac{1}{2} \;\; a_{23} = \frac{1}{2} \;\; a_{33} = 0$

Дакле, веза између координата (x,y,z) произвољне тачке M у реперу $Oxyz$ и координата (x',y',z') исте тачке у реперу $Ax'y'z'$ је:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot x' - \frac{1}{2}\cdot y' - \frac{1}{2}\cdot z' \\ \frac{1}{2}\cdot x' + 0\cdot y' + \frac{1}{2}\cdot z' \\ \frac{1}{2}\cdot x' + 0\cdot y' + 0\cdot z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -x' - \tfrac{1}{2}y' - \tfrac{1}{2}z' + 1 \\ y &= \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{1}{2}z' \\ z &= \tfrac{1}{2}x' \end{aligned}$$

Нађимо сада инверзне формуле, тј. изразимо x', y' и z' преко x, y и z.

$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$

$y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}z'$

$z = \frac{1}{2}x' \Rightarrow \boxed{x' = 2z}$

$$y = \frac{1}{2}\cdot 2z + \frac{1}{2}z'$$

$$y = z + \frac{1}{2}z'$$

$$\frac{1}{2}z' = y - z$$

$$\boxed{z' = 2y - 2z}$$

$$x = -x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$$

$$\frac{1}{2}y' = -x - x' - \frac{1}{2}z' + 1 = -x - 2z - \frac{1}{2}\cdot(2y - 2z) + 1 = -x - 2z - y + z + 1$$
$$= -x - y - z + 1$$

$$\boxed{y' = -2x - 2y - 2z + 2}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot x + 0\cdot y + 2\cdot z \\ -2\cdot x - 2y - 2z \\ 0\cdot x + 2y - 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нађимо још координате темена тетраедра $OABC$ у односу на репер $Ax'y'z'$.

Теме тетраедра	Координате темена у реперу $Oxyz$	Координате темена у реперу $Ax'y'z'$
O	$\vec{OO} = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3$ $(0,0,0)$ $x=0 \quad y=0 \quad z=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
A	$\vec{OA} = 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3$ $(1,0,0)$ $x=1 \quad y=0 \quad z=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
B	$\vec{OB} = 0\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3$ $(0,1,0)$ $x=0 \quad y=1 \quad z=0$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
C	$\vec{OC} = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3$ $(0,0,1)$ $x=0 \quad y=0 \quad z=1$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$