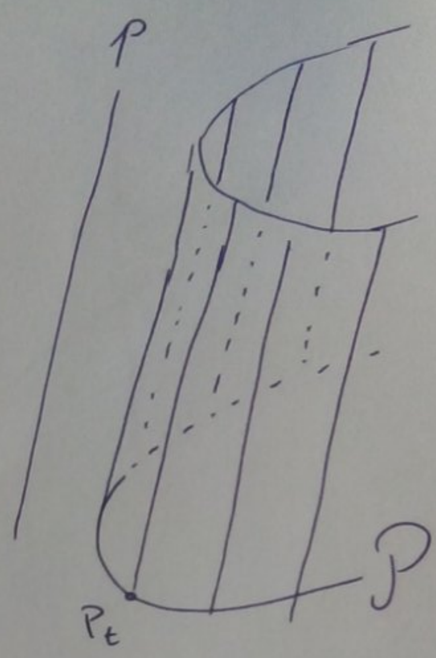
7.9.

$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$

$P: \begin{cases} x^2 = 2y \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0, \ x = t \\ y = t^2/2 \end{cases}$

$\mathcal{C}: ?$



све изводнице цилиндра паралелне су датој правој p и садрже по једну тачку са параболе P

$P_t(t, t^2/2, 0) \leftarrow$ произвољна тачка са параболе P

$g_t: \frac{x-t}{2} = \frac{y - t^2/2}{3} = \frac{z}{4}$

$(\vec{v}_g = \vec{v}_p)$

права паралелна са p, а сече параболу P.
Што су праве које чине наш цилиндар

Елиминишимо t из g_t:

$\frac{x-t}{2} = \frac{z}{4} \Rightarrow \cancel{4}_2(x-t) = \cancel{2}z \Rightarrow t = \frac{2x-z}{2}$

$\frac{y - t^2/2}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y - \left(\frac{2x-z}{2}\right)^2/2}{3} = \frac{z}{4}$

$\frac{y - \frac{4x^2 - 4xz + z^2}{8}}{3} = \frac{z}{4}$

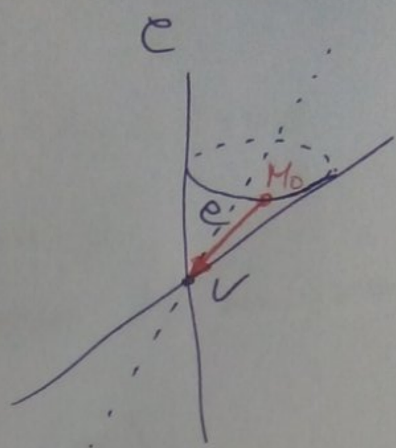
$\frac{8y - 4x^2 + 4xz - z^2}{24} = \frac{z}{4}$

$\mathcal{C}: 8y - 4x^2 + 4xz - z^2 - 6z = 0$

7.10. $V(0,1,1)$

$e: \begin{cases} x^2+3y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$

$\mathcal{C} \ni e, V, \quad \mathcal{C}: ?$



Можемо наћи једначине изводница тако што узмемо произвољну тачку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ са елипсе и спојимо је са врхом V

$$\overrightarrow{VM_0} = (x_0,\ y_0-1,\ z_0-1)$$

$$s_0: \frac{x}{x_0} = \frac{y-1}{y_0-1} = \frac{z-1}{z_0-1}$$ ← права која пролази кроз V, а има вектор правца $\overrightarrow{VM_0}$

$z_0 = 0$ за тачку на елипси

Елиминишимо x_0, y_0 и z_0 тј. "прошетајмо" тачку M_0 по елипси.

$$\frac{x}{x_0} = \frac{z-1}{z_0-1} \Rightarrow \cancel{x_0(z-1) = x(z_0-1)}$$

$$x_0(1-z) = x \Rightarrow x_0 = \frac{x}{1-z}$$

$$\frac{y-1}{y_0-1} = \frac{1-z}{1} \Rightarrow y_0 - 1 = \frac{y-1}{1-z} \Rightarrow y_0 = \frac{y-z}{1-z}$$

$$\xrightarrow[x^2+3y^2=4]{\text{jeq. } e} \frac{x^2}{(1-z)^2} + 3\cdot\left(\frac{y-z}{1-z}\right)^2 = 4$$

$$x^2 + 3(y-z)^2 - 4(1-z)^2 = 0$$

(7.14.) г) $M: \; 12x^2+6y^2+9z^2-12xz-12yz-4=0$

"алгоритам" је као у 7.14. 1).

- Дакле, запишимо најпре површ M матрично:

$$(x \;\; y \;\; z \;\; 1)\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$= A$

- Блок матрица B је $B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

- сопствене вредности матрице B:

$$B - \lambda E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 12-\lambda & 0 & -6 \\ 0 & 6-\lambda & -6 \\ -6 & -6 & 9-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$=(12-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -6 \\ -6 & 9-\lambda \end{vmatrix} + (-6)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 6-\lambda \\ -6 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \ldots = -\lambda^3+27\lambda^2-162\lambda = -\lambda(\lambda^2-27\lambda+162)$$

$$= -\lambda(\lambda-9)(\lambda-18)$$

$\rightarrow \lambda_1 = 18, \; \lambda_2 = 9, \; \lambda_3 = 0$

- Потражимо јединичне сопствене векторе за сваку од ових сопствених вредности.

- $\underline{\underline{\lambda_1 = 18}}$

$$(B - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & -6 \\ -6 & -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6u - 6w = 0 & \longrightarrow \quad u = -w \\ -12v - 6w = 0 & \longrightarrow \quad w = -2v \\ -6u - 6v - 9w = 0 & \end{cases} \quad \Big\} \rightarrow u = 2v$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \quad u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ ← нормиран соб. век.

- $\underline{\underline{\lambda_2 = 9}}$

$$(B - \lambda_2 E)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 6w = 0 & \rightarrow \quad u = 2w \\ -3v - 6w = 0 & \rightarrow \quad v = -2w \\ -6u - 6v = 0 & \end{cases} \quad \Big\} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = w\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\underline{\underline{\lambda_3 = 0}}$

$$(B - \lambda_3 E)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12u \qquad\quad - 6w = 0 & \rightarrow 2u = w \\ \qquad 6v - 6w = 0 & \rightarrow v = w \ \rightarrow v = 2u \\ -6u - 6v + 9w = 0 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 2u \\ 2u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad u_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Дакле, матрица $R_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, тј. проширена

$$R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ф-ле трансформација су $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$, а

једначина површи у новом коорд. систему

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

тј. $\mathcal{M}': \quad 18x^2 + 9y^2 - 4 = 0$

$$18x^2 + 9y^2 = 4 \quad \leftarrow \text{елиптички цилиндар}$$