21. Доказати да две хомотетије θ и δ у афиној групи простора $\mathcal{A}$ комутирају ако и само ако имају заједничко средиште хомотетије.

Напомена 1: Да би овај задатак важио у свим случајевима претпостављамо да је хомотетија дефинисана и у случају да је коефицијент управо 1. Наиме, то има смисла јер као што ће се видети из самог задатка, скуп свих хомотетија које имају заједнички центар са операцијом композиције представљају Абелову групу.

Напомена 2: Испоставиће се да је хомотетија са коефицијентом 1 коинциденција, и како је очигледно да коинциденција има све фиксне тачке, то је свака тачка центар хомотетије. Ако је π хомотетија са коефицијентом 1, а S и C неке две произвољне тачке важиће $\pi(X) = X = S + 1 \cdot \overrightarrow{SX} = C + 1 \cdot \overrightarrow{CX}$, тако да има смисла рећи да је свака тачка центар. Зато можемо рећи за сваку хомотетију и коинциденцију да имају заједнички центар.

$\Leftarrow$:

Ако је коефицијент хомотетије π 1, а A центар важи: $\pi(X) = A + 1 \cdot \overrightarrow{AX} = X$, тако да је ово коинциденција.

Нека је $\theta = \chi_{S,\beta}$ и $\delta = \chi_{S,\alpha}$, а $x \in \mathcal{A}$ произвољан елемент афиног простора $\mathcal{A}$. Важи:

$$\theta \circ \delta(x) = \chi_{S,\beta} \circ \chi_{S,\alpha}(x) = \chi_{S,\beta} \circ (S + \alpha \cdot \overrightarrow{Sx}) = \chi_{S,\beta}(S) + \overrightarrow{\chi}_{S,\beta}(\alpha \cdot \overrightarrow{Sx}) = S + \beta \cdot \alpha \cdot \overrightarrow{Sx}$$

што је једна хомотетија са центром у S и коефицијентом $\alpha \cdot \beta$. Како β и α по дефиницији нису нула, онда то неће бити ни њихов производ, и стога је композиција затворена на скупу хомотетија са истим центром.
Из $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ и истог поступка примењеног на обрнут редослед композиције, јасно је да комутирају, а како је композиција пресликавања асоцијативна и има неутрал (коинциденција), то је доказано да је ово Абелова група.

$\Rightarrow$:
Претпоставимо да $\theta = \chi_{S,\beta}$ и $\delta = \chi_{C,\alpha}$ комутирају.
Тада ће комутирати и за произвољну тачку, рецимо S:

$$\theta \circ \delta(S) = \delta \circ \theta(S) \Leftrightarrow \theta \circ \delta(S) = \delta(S),$$

јер је S центар хомотетије θ. Ако уведемо смену $y = \delta(S)$, добијамо $\theta(y) = y$, па је y фиксна тачка од θ.
Но, како је $\theta(y) = S + \beta \cdot \overrightarrow{Sy} = y$, тада је $y - S = \beta \cdot \overrightarrow{Sy}$, односно $\overrightarrow{Sy} = \beta \cdot \overrightarrow{Sy}$, па је пребацивши ове изразе са исте стране или $\beta = 1$ или је $\overrightarrow{Sy} = \overrightarrow{0}$.

Разликујемо два случаја, $\beta \neq 1$ одакле се види да мора бити $\overrightarrow{Sy} = \overrightarrow{0}$, тј $S \equiv y$. Односно да је центар неидентичке хомотетије једина фиксна тачка те хомотетије.

Користећи да је центар хомотетије јединствен, следи да је:

$$S = y = \delta(S).$$

А како је δ исто хомотетија, следи коначно и $S \equiv C$, што је и требало доказати.
У случају да је α или β једнако 1, тада по напомени 2, они имају по дефиницији заједнички центар. $\square$