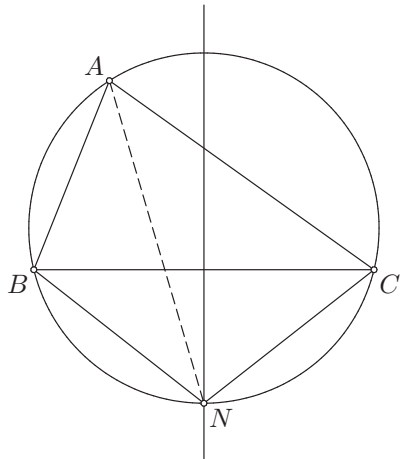


9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.

Решење:

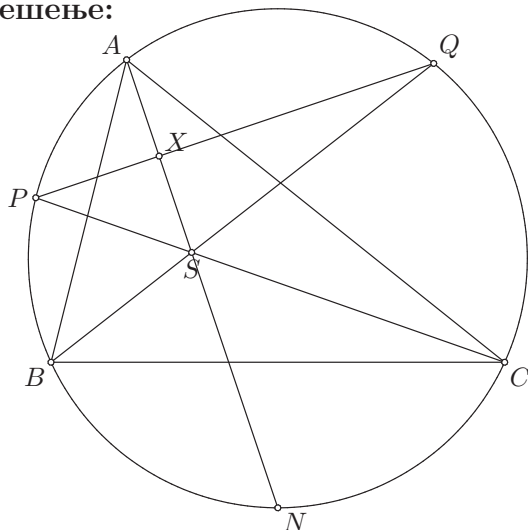


Нека је  $N$  пресечна тачка медијатрисе странице  $BC$  и описаног круга троугла  $\triangle ABC$  која припада оном луку  $\widehat{BC}$  којем не припада тачка  $A$  (наиме, постоје две пресечне тачке медијатрисе странице  $BC$  и описаног круга, па морамо прецизирати коју од њих желимо означити са  $N$ , а како желимо да то буде она тачка која се налази у углу  $\angle BAC$  и како имамо два лука  $\widehat{BC}$ , за  $N$  бирамо тачку на оном луку  $\widehat{BC}$  на којем се не налази тачка  $A$ ). Све што сада треба доказати јесте да је полуправа  $AN$  бисектриса угла  $\angle BAC$ , па је довољно доказати да је  $\angle BAN = \angle NAC$ .

Троугао  $\triangle NBC$  је једнакокраки јер је  $NB = NC$  ( $N$  је на медијатрисе дужи  $BC$ ), па следи да је  $\angle NBC = \angle BCN$ . Означимо те углове са  $\varphi$ . Углови  $\angle BAN$  и  $\angle BCN$  су оба периферијска над луком  $\widehat{BN}$ , па су они подударни, тј.  $\angle BAN = \angle BCN = \varphi$ . Слично, углови  $\angle NAC$  и  $\angle NBC$  су оба периферијска над луком  $\widehat{NC}$ , па су они подударни, тј. важи  $\angle NAC = \angle NBC = \varphi$ . Овим је доказ завршен, јер је сада  $\angle BAN = \varphi = \angle NAC$ .

10. Нека су  $P$  и  $Q$  средишта лукова  $AB$  и  $AC$  круга описаног око троугла  $ABC$  и  $s_\alpha$  бисектриса угла  $\angle BAC$ . Доказати да је  $PQ \perp s_\alpha$ .

Решење:



Из 9. задатка имамо да су  $P, Q$  тачке такве да су  $CP, BQ$  бисектрисе углова  $\angle BCA$  и  $\angle ABC$ . Као што знамо, бисектрисе унутрашњих углова троугла секу се у центру уписаног круга, па означимо пресечну тачку  $CP, BQ, s_\alpha$  са  $S$ . Такође, означимо са  $X$  пресечну тачку  $PQ$  и  $s_\alpha$ .

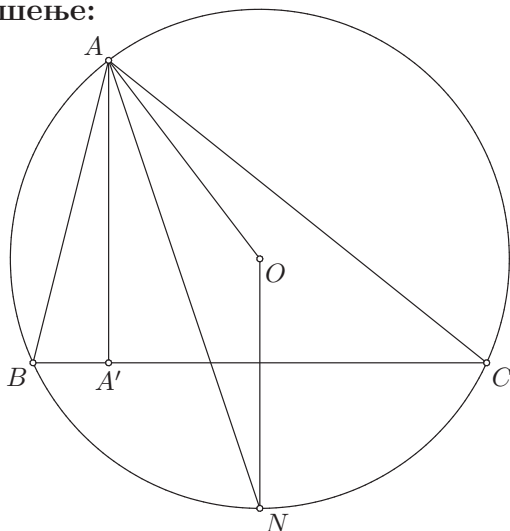
Посматрајмо троугао  $\triangle XSQ$  и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво имамо да је  $\angle XQS = \angle PQB = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$ , јер је  $CP$  бисектриса угла  $\angle BCA = \gamma$ . Угао  $\angle XSQ$  је спољашњи угао троугла  $\triangle ABS$ , па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су углови  $\angle BAS$  и  $\angle ABS$ . Из чињенице да су  $AS$  и  $BS$  бисектрисе углова  $\angle BAC = \alpha$  и  $\angle ABC = \beta$  следи да је  $\angle BAS = \frac{\alpha}{2}$  и  $\angle ABS = \frac{\beta}{2}$ . Дакле,  $\angle XSQ = \angle BAS + \angle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ , па је

$$\angle SXQ = \pi - \angle XSQ - \angle XQS = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је  $QX \perp XS$ , односно да је  $PQ \perp s_\alpha$ .

11. Нека су  $A'$ ,  $N$  и  $O$  редом подножје висине из  $A$ , пресек бисектрисе угла  $\angle BAC$  са описаном кругом троугла  $ABC$  ( $AB < AC$ ) и центар описаног круга, доказати  $\angle A'AN = \angle ANO = \angle NAO = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$ .

Решење:



На основу 9. задатка следи да се тачка  $N$  налази на медијатриси стране  $BC$ , па пошто и тачка  $O$  припада тој медијатриси, следи да је права  $ON$  баш медијатриса стране  $BC$ . Одавде добијамо да је  $ON \perp BC$ , а како је и  $AA' \perp BC$ , следи да је  $ON \parallel AA'$ . Сада имамо да углови  $\angle A'AN$  и  $\angle ANO$  имају заједнички крак  $AN$  и паралелне краке  $AA'$  и  $NO$ , па су то подударни углови. Дакле,  $\angle A'AN = \angle ANO$ . Троугао  $\triangle ANO$  је једнакокрак, јер су  $OA$  и  $ON$  полупречници описаног круга троугла  $\triangle ABC$ , па су подударни, тј.  $OA = ON$ . Следи да су углови наспрам њих подударни, тј. да је  $\angle ANO = \angle NAO$ .

Сада када знамо да су ови углови подударни, треба да изразимо било који од њих преко углова  $\beta$  и  $\gamma$ , тј. углова  $\angle ABC$  и  $\angle ACB$ . Изразимо нпр. угао  $\angle A'AN$ . Имамо да је  $\angle A'AN = \angle BAN - \angle BAA'$  и да је  $\angle BAN = \frac{\alpha}{2}$ . Како је троугао  $\triangle ABA'$  правоугли и  $\angle A'BA = \angle CBA = \beta$ , следи да је  $\angle BAA' = \pi - \angle BA'A - \angle A'BA = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$ . Сада имамо да је

$$\begin{aligned} \angle A'AN &= \angle BAN - \angle BAA' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\alpha - \pi + 2\beta}{2} \\ &= \frac{\alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

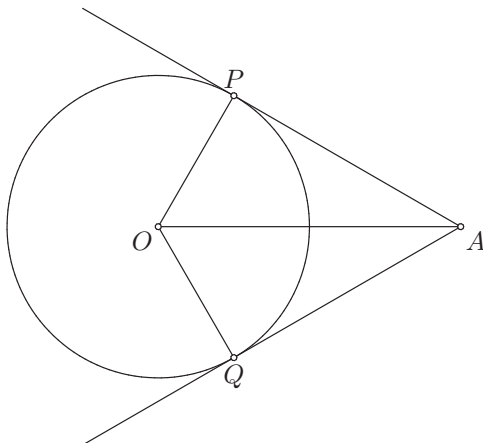
**Напомена 2.** Где се овде користила претпоставка да је  $AB < AC$ ? Ако замислимо да смо на претходној слици обрнуто означили тачке  $B$  и  $C$ ,

онда није  $\angle A'AN = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$ , него је  $\angle A'AN = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC)$ . Поента је у томе што се при претпоставци  $AB > AC$  мења распоред тачака на слици и онда не важе неке ствари које важе када је  $AB < AC$ . Конкретно, не важи  $\angle A'AN = \angle BAN - \angle BAA'$ , већ  $\angle A'AN = \angle A'AB - \angle NAB$ , па то мења резултат.

У строго формалном доказу, какви су нпр. докази на предавањима, морали бисмо помоћу претпоставке  $AB < AC$  доказивати да важи распоред тачака који добијамо цртањем слике. Међутим, када решавамо задатке на колоквијуму или испиту, ми то не морамо да доказујемо, већ је довољно да то „видимо са слике”. Зато је неопходно нацртати слику која одговара датој претпоставци. Конкретно у овом задатку, треба нацртати слику тако да заиста буде  $AB < AC$ , што смо и учинили.

**Дефиниција 10.** Нека је  $A$  тачка ван круга  $k$  и нека су  $P, Q$  додирне тачке тангенти из тачке  $A$  на кругу  $k$ . Дужи  $AP, AQ$  зову се *тангентне дужи* из тачке  $A$  на кругу  $k$ .

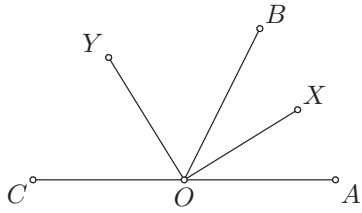
**Теорема 7.** *Тангентне дужи из тачке  $A$  на кругу  $k$  су подударне.*



**Доказ:** Посматрајмо троуглове  $\triangle OPA$  и  $\triangle OQA$ . Њима је заједничка страница  $OA$ , странице  $OP$  и  $OQ$  су подударне јер су то полупречници круга  $k$ , углови  $\angle OPA$  и  $\angle OQA$  су прави (углови између тангенти и полупречника), па су подударни, а углови  $\angle OAP$  и  $\angle OAQ$  су оба оштра јер већ имамо праве углове у троугловима  $\triangle OPA$  и  $\triangle OQA$ , па преостали углови морају бити оштри. Закључујемо на основу става ССУ да је  $\triangle OPA \cong \triangle OQA$ , па је  $AP = AQ$ , што је и требало доказати.  $\square$

**Дефиниција 11.** *Најоредни ујлови* су они углови који имају заједничко теме и један крак, а преостали краци припадају једној правој.

**Теорема 8.** *Бисектрисе најоредних ујлова су међусобно нормалне.*

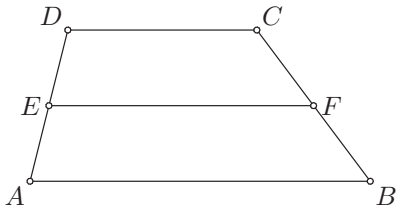


**Доказ:** Нека је  $\angle AOB = \alpha$  и  $\angle BOC = \beta$ . Тада је  $\alpha + \beta = \pi$ . Ако је  $OX$  бисектриса угла  $\angle AOB$ , а  $OY$  бисектриса угла  $\angle BOC$ , онда је  $\angle XOY = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$ , тј. да су бисектрисе  $OX$  и  $OY$  међусобно нормалне.  $\square$

**Дефиниција 12.** Четвороугао  $ABCD$  је *трапез* са *основицама*  $AB, CD$  и *крацима*  $AD, BC$  ако је  $AB \parallel CD$ .

Имали смо средњу линију троугла, а сада ћемо дефинисати и средњу линију трапеза.

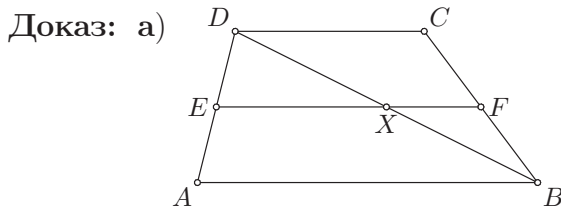
**Дефиниција 13.** Нека је  $ABCD$  трапез и нека су  $E, F$  редом средишта кракова  $AD, BC$ . Дуж  $EF$  зове се *средња линија* трапеза  $ABCD$ .



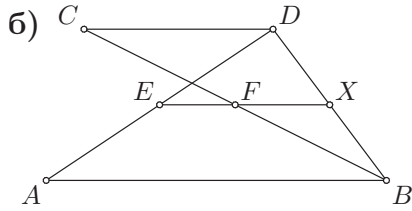
**Теорема 9.** Нека је четвороугао  $ABCD$  трапез и нека су  $E, F$  средишта кракова  $AD, BC$ . Тада је средња линија  $EF$  паралелна основицама трапеза, тј.  $EF \parallel AB$  и  $EF \parallel CD$  и важи

а)  $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$  ако је трапез  $ABCD$  конвексан;

б)  $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$  ако је трапез  $ABCD$  неконвексан и  $AB > CD$ .



Нека је  $X$  средиште дијагонале  $BD$  трапеза  $ABCD$ . Следи да је  $EX$  средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $EX \parallel AB$  и  $EX = \frac{1}{2}AB$ . Слично,  $XF$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $XF \parallel CD$  и  $XF = \frac{1}{2}CD$ . Како је  $AB \parallel CD$ , следи да је  $EX \parallel XF$ , па су тачке  $E, X, F$  колинеарне. Одавде добијамо да је  $EF \parallel AB$  и  $EF = EX + XF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ .



Нека је  $X$  средиште дијагонале  $BD$  трапеца  $ABCD$ . Следи да је  $EX$  средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $EX \parallel AB$  и  $EX = \frac{1}{2}AB$ . Слично,  $XF$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $XF \parallel CD$  и  $XF = \frac{1}{2}CD$ . Како је  $AB \parallel CD$ , следи да је  $EX \parallel XF$ , па су тачке  $E, X, F$  колинеарне. Одавде добијамо да је  $EF \parallel AB$  и  $EF = EX - XF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ .  $\square$

**Напомена 3.** Ми смо доказали да су одређене дужи средње линије (троугла или трапеца) ако знамо да су њени крајеви средишта одговарајућих страница и онда смо добијали паралелност. Међутим, довољно је да знамо само за један крај дужи да је средиште одговарајуће странице и да знамо паралелност да би посматрана дуж била средња линија. Ово убудуће можемо користити.

**12. (Велики задатак)** Ако са  $A_1, B_1$  и  $C_1$  обележимо средишта ивица  $BC = a, CA = b, AB = c$  троугла  $ABC$  ( $b > c$ ), са  $p$  полуобим тог троугла, са  $l(O, r)$  описани круг тог троугла, са  $P, Q, R$  тачке у којима уписани круг  $k(S, \rho)$  додирује праве  $BC, CA, AB$ , са  $P_i, Q_i, R_i$  ( $i = a, b, c$ ) тачке у којима споља уписани круг  $k_i(S_i, \rho_i)$  додирује редом праве  $BC, CA, AB$ , са  $M$  и  $N$  тачке у којима медијатриса ивица  $BC$  сече круг  $l$ , при чему је  $M$  на луку  $BAC$ , са  $M'$  и  $N'$  подножја управних из тачака  $M$  и  $N$  на правој  $AB$ , са  $P', P'_a, P'_b, P'_c$  дијаметрално супротне тачке тачкама  $P, P_a, P_b, P_c$ , доказати да је:

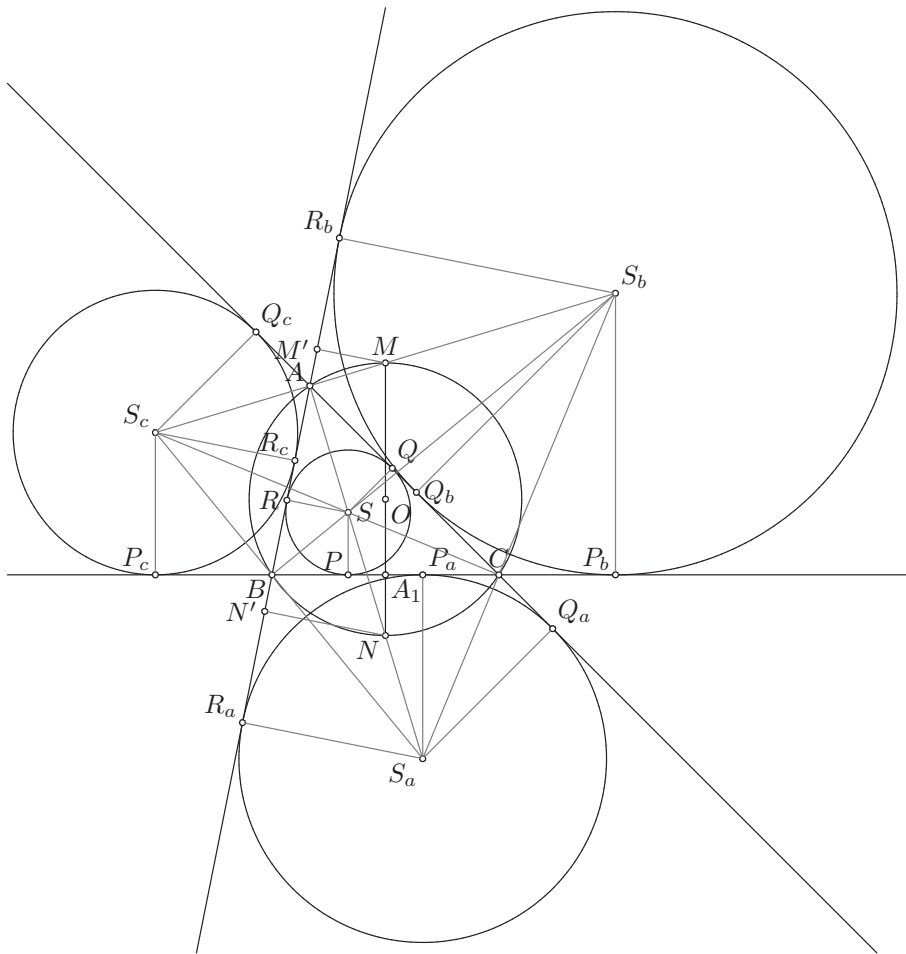
- 1)  $\mathcal{B}(A, P', P_a), \mathcal{B}(A, P, P'_a), \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$ ;
- 2)  $AQ_a = AR_a = p, QQ_a = RR_a = a, Q_bQ_c = R_bR_c = a$ ;
- 3)  $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$ ;
- 4)  $PP_a = b - c, P_bP_c = b + c$ ;
- 5)  $PA_1 = P_aA_1, P_cA_1 = P_bA_1$ ;
- 6)  $NS = NS_a = NB = NC, MS_b = MS_c = MB = MC$ ;
- 7)  $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$ ;
- 8)  $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$ ;

9)  $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$ ;

10)  $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$ ,  $AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$ ;

11)  $M'N' = b$ .

**Решење:**



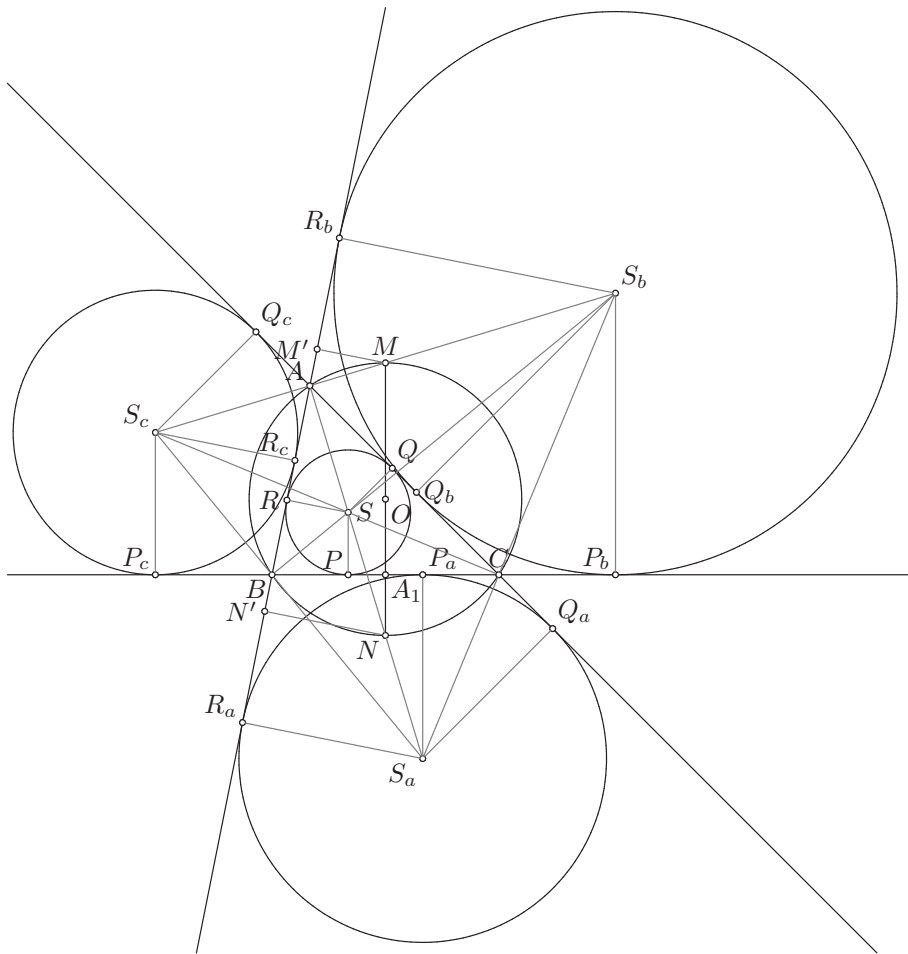
1) Ово тврђење нећемо сада доказивати, јер ћемо у доказу користити сличност. Доказ ћемо видети у следећем поглављу.

2) Доказујемо  $AQ_a = AR_a = p$ ,  $QQ_a = RR_a = a$ ,  $Q_bQ_c = R_bR_c = a$ . Дужи  $AQ_a$  и  $AR_a$  су тангентне дужи из тачке  $A$  на споља уписаном кругу  $k_a$ , па следи да су оне подударне, тј. да је  $AQ_a = AR_a$ . Да бисмо доказали да су те дужи једнаке полуобиму троугла  $\triangle ABC$ , посматрајмо збир  $AQ_a + AR_a$ . Имамо да је  $AQ_a + AR_a = AC + CQ_a + AB + BR_a = AC + AB + CQ_a + BR_a$ , па како је  $CQ_a = CP_a$  и  $BR_a = BP_a$ , јер су то

тангентне дужи редом из тачака  $C, B$  на кругу  $k_a$ , следи да је

$$\begin{aligned} AQ_a + AR_a &= AC + AB + CQ_a + BR_a \\ &= b + c + CP_a + BP_a = b + c + BC \\ &= b + c + a = 2p, \end{aligned}$$

па је  $AQ_a = AR_a = \frac{2p}{2} = p$ , што је и требало доказати. Такође, јасно је да смо овим доказали да је и  $BP_b = BR_b = p$ , као и  $CP_c = CQ_c = p$ , јер смо већ напомињали да су сва три темена троугла равноправна.



Даље, како је  $AQ = AR$ , јер су то тангентне дужи из тачке  $A$  на уписаном кругу  $k$ , следи да је  $QQ_a = AQ_a - AQ = AR_a - AR = RR_a$ . Такође, пошто знамо да је  $AQ_a = AR_a = p$ , треба да докажемо да је  $AQ = AR = p - a$ , да би било  $QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a$ . У том циљу, означимо  $AQ = AR = x$ ,  $BR = BP = y$  (тангентне дужи из



$B$  на  $k$ ) и  $CP = CQ = z$  (тангентне дужи из  $C$  на  $k$ ). Сада из очигледних једнакости

$$\begin{aligned} AR + RB &= AB \\ BP + PC &= BC \\ CQ + QA &= CA \end{aligned}$$

следи да имамо следећи систем линеарних алгебарских једначина са непознатим  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ z + x &= b. \end{aligned}$$

Саберимо све три једначине и добићемо  $x + y + y + z + z + x = c + a + b$ , односно  $2(x + y + z) = 2p$ , односно  $x + y + z = p$ . Сада лако добијамо да је

$$\begin{aligned} x &= x + y + z - (y + z) = p - a, \\ y &= x + y + z - (x + z) = p - b \quad \text{и} \\ z &= x + y + z - (x + y) = p - c. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је  $AQ = AR = x = p - a$  (успут смо доказали и да је  $BR = BP = y = p - b$  и  $CP = CQ = z = p - c$ ), па је

$$QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a.$$

Приметимо да је  $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$ , а имамо да је  $CQ_c = p$ , као и да је  $CQ_b = CP_b$  јер су то тангентне дужи из тачке  $C$  на кругу  $k_b$ . Како је  $CP_b = BP_b - BC$  и  $BP_b = p$ , следи да је  $CP_b = p - a$ , па имамо да је

$$Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b = p - CP_b = p - (p - a) = a.$$

Слично, приметимо да је  $R_bR_c = BR_b - BR_c$ , затим да је  $BR_b = p$ , да је  $BR_c = BP_c = CP_c - CB$  и да је  $CP_c = p$ , па је  $BR_c = CP_c - CB = p - a$ , што значи да је

$$R_bR_c = BR_b - BR_c = p - (p - a) = a,$$

што је и требало доказати.

**3)** Доказујемо  $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$ . Све смо већ доказали док смо доказивали **2)**. Заиста, доказали смо да је

$AQ = AR = x = p - a$ , затим да је  $CQ_b = CP_b = p - a$  и коначно да је  $BR_c = BP_c = p - a$ . Дакле, заиста је

$$AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a.$$

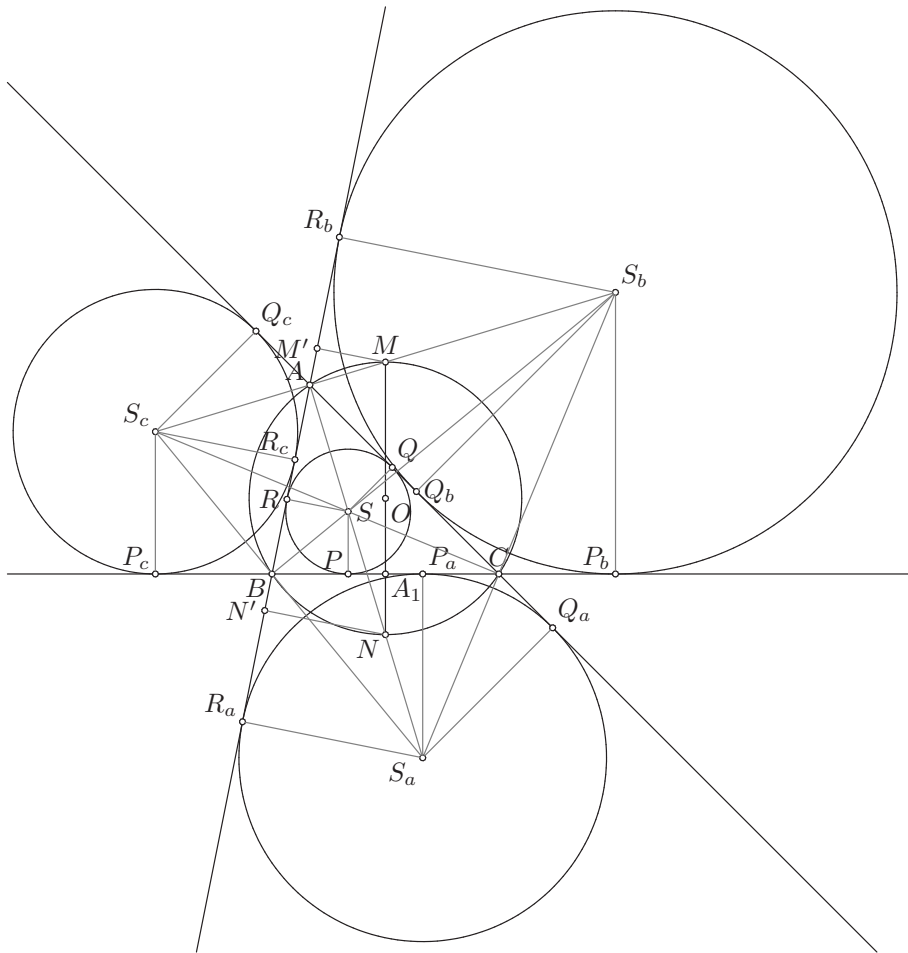
4) Доказујемо  $PP_a = b - c$ ,  $P_bP_c = b + c$ . Имамо да је  $PP_a = BP_a - BP$  и знамо да је  $BP = y = p - b$ . Како је  $BP_a = BR_a$  јер су то тангентне дужи из  $B$  на кругу  $k_a$  и како је  $BR_a = AR_a - AB = p - c$ , следи да је

$$PP_a = BP_a - BP = BR_a - (p - b) = p - c - (p - b) = b - c.$$

Даље, имамо да је  $P_bP_c = P_bC + CP_c$  и знамо да је  $P_bC = p - a$  и да је  $CP_c = p$ , па следи да је

$$P_bP_c = P_bC + CP_c = p - a + p = 2p - a = a + b + c - a = b + c.$$

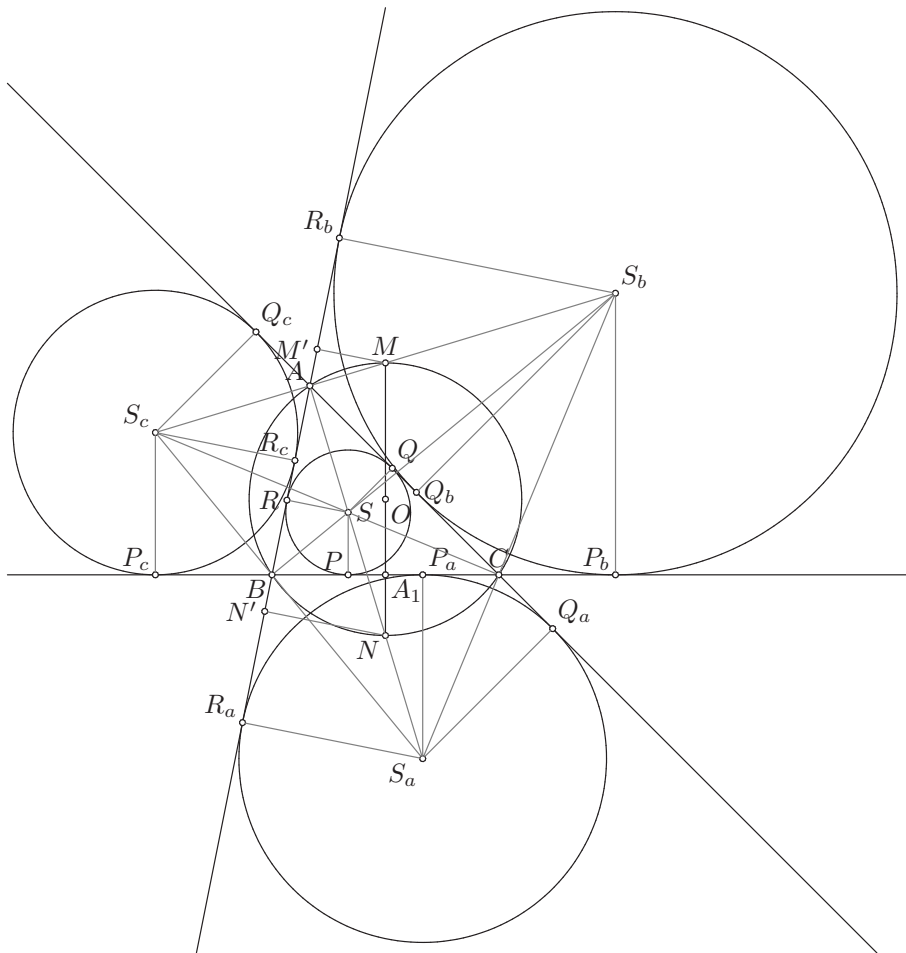
што је и требало доказати.



5) Доказујемо  $PA_1 = P_aA_1$ ,  $P_cA_1 = P_bA_1$ . Практично треба доказати да је  $A_1$  (средиште дужи  $BC$ ) средиште дужи  $PP_a$  и  $P_bP_c$ . Имамо да је

$$\begin{aligned} PA_1 &= BA_1 - BP = \frac{1}{2}BC - (p - b) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a+b+c}{2} + b = \frac{a - a - b - c + 2b}{2} \\ &= \frac{b-c}{2} = \frac{1}{2}PP_a, \end{aligned}$$

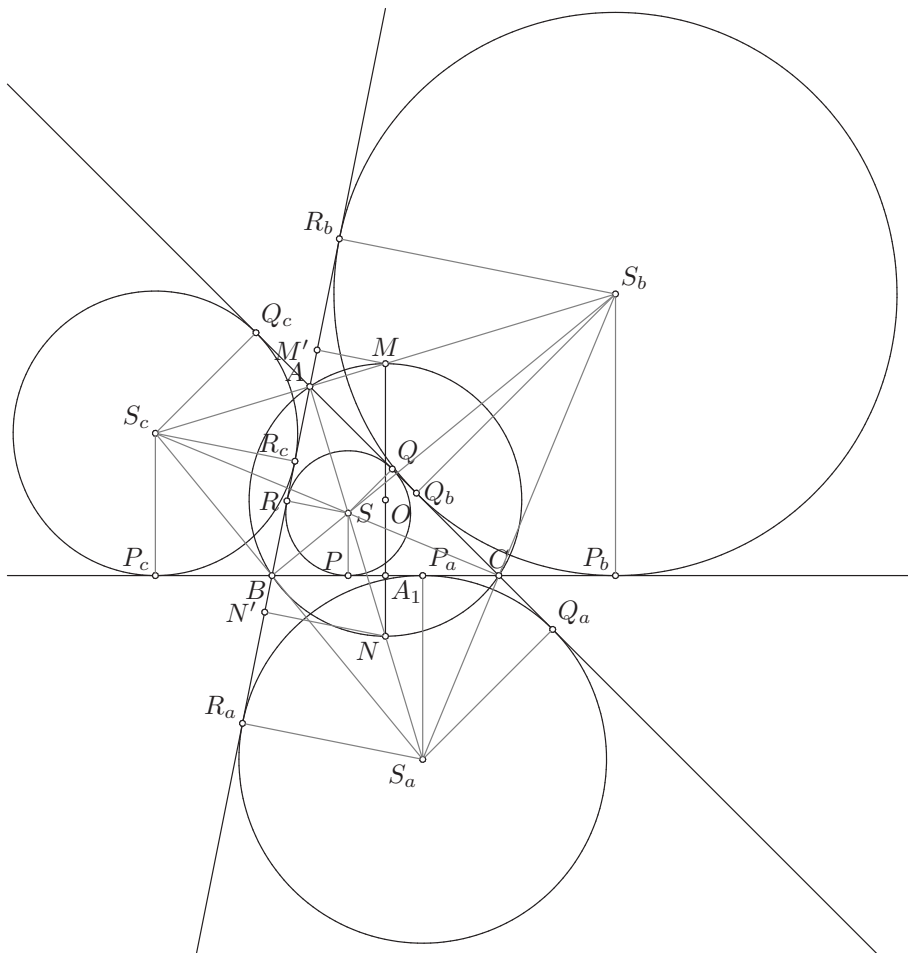
па је заиста  $A_1$  средиште дужи  $PP_a$ , тј.  $PA_1 = P_aA_1$ .



Слично, имамо да је

$$\begin{aligned}
 P_c A_1 &= P_c B + B A_1 = p - a + \frac{1}{2} BC \\
 &= \frac{a + b + c}{2} - a + \frac{a}{2} = \frac{a + b + c - 2a + a}{2} \\
 &= \frac{b + c}{2} = \frac{1}{2} P_c P_b,
 \end{aligned}$$

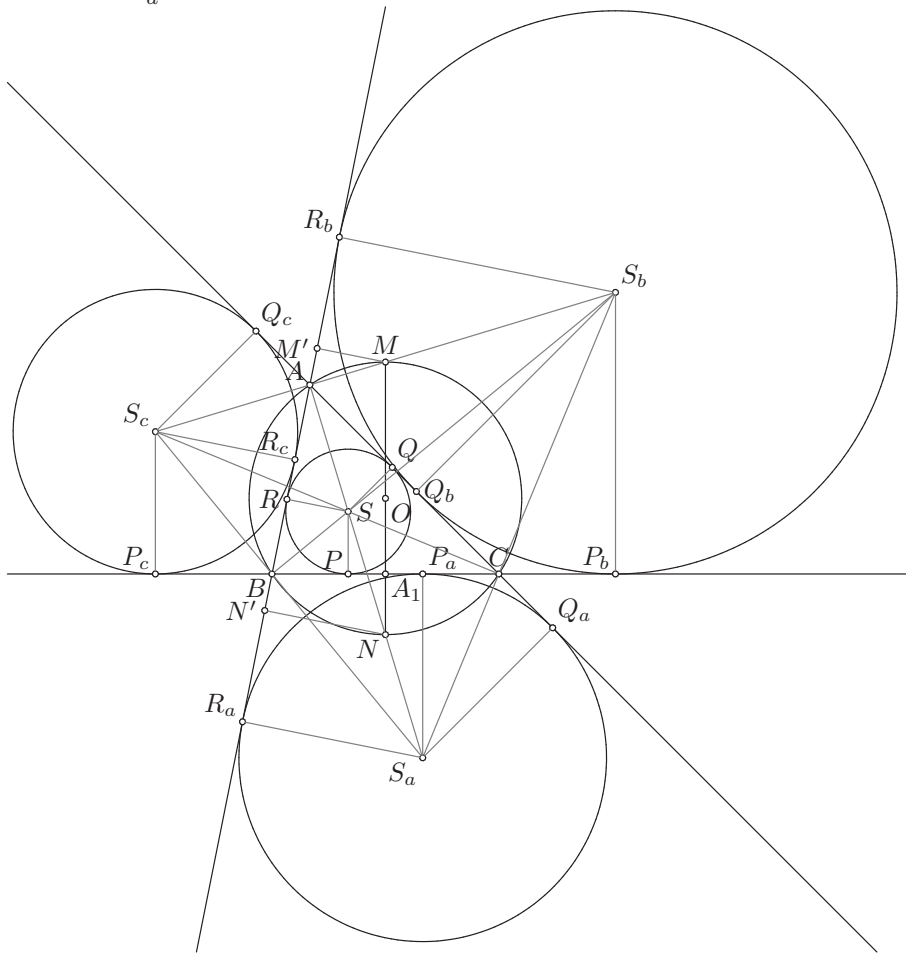
па је  $A_1$  средиште дужи  $P_c P_b$ , односно важи  $P_c A_1 = P_b A_1$ .



**6)** Доказујемо  $NS = NS_a = NB = NC$ ,  $MS_b = MS_c = MB = MC$ . Четвороугао  $SPP_a S_a$  је трапез јер је  $SP \perp BC$  и  $S_a P_a \perp BC$ , па је  $SP \parallel S_a P_a$ . Такође,  $A_1 N \perp BC$  јер је права  $A_1 N$  симетрала дужи  $BC$ , па је  $A_1 N \parallel SP$  и  $A_1 N \parallel S_a P_a$ . Како је  $A_1$  средиште  $PP_a$ , следи да је

$A_1N$  средња линија неконвексног трапеца  $SP P_a S_a$ . Закључујемо да је  $N$  средиште дужи  $SS_a$  и  $A_1N = \frac{1}{2}(S_a P_a - SP) = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$ .

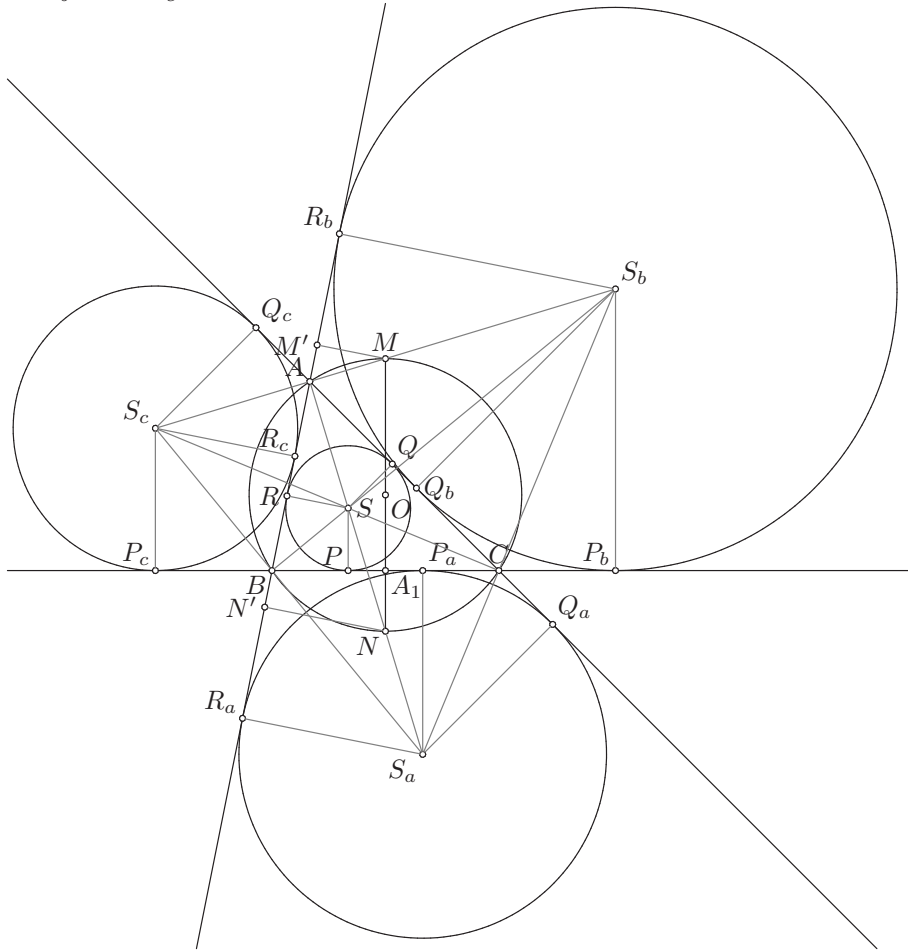
Троугао  $\triangle SBS_a$  је правоугли с правим углом код темена  $B$  ( $SB$  је симетрала унутрашњег, а  $BS_a$  је симетрала спољашњег угла код темена  $B$  троугла  $\triangle ABC$ ) и  $N$  је средиште хипотенузе  $SS_a$ , па је  $N$  центар описаног круга  $\triangle SBS_a$ . Следи да је  $NS = NS_a = NB$ , а како  $N$  припада симетрали дужи  $BC$ , следи да је  $NB = NC$ , па имамо да је  $NS = NS_a = NB = NC$ .



Докажимо да  $M$  припада бисектриси  $AS_b$  спољашњег угла  $\angle CAR_b$  троугла  $\triangle ABC$ . Како је  $AS$  бисектриса унутрашњег угла  $\angle BAC$  троугла  $\triangle ABC$ , следи да је  $SA \perp AS_b$ , тј. да је  $\angle SAS_b = \frac{\pi}{2}$ . Тачка  $N$  припада бисектриси  $AS$ , па је  $\angle NAS_b = \frac{\pi}{2}$ , а  $MN$  је пречник описаног круга  $l$  троугла  $\triangle ABC$ , па је  $\angle NAM = \frac{\pi}{2}$  (периферијски угао над пречником). Одавде закључујемо да тачка  $M$  припада полуправој  $AS_b$ , што смо и тражили.

Четвороугао  $S_cP_cP_bS_b$  је трапез, јер је  $S_cP_c \perp BC$  и  $S_bP_b \perp BC$ , па је  $S_cP_c \parallel S_bP_b$ . Такође,  $A_1M \perp BC$  јер је права  $A_1M$  симетрала дужи  $BC$ , па је  $A_1M \parallel S_cP_c$  и  $A_1M \parallel S_bP_b$ . Тачка  $A_1$  је средиште  $P_cP_b$ , па следи да је  $A_1M$  средња линија (конвексног) трапеза  $S_cP_cP_bS_b$ . Закључујемо да је  $M$  средиште дужи  $S_bS_c$  и  $A_1M = \frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$ .

Троугао  $\triangle S_bBS_c$  је правоугли с правим углом код темена  $B$  ( $S_bB$  је симетрала унутрашњег, а  $BS_c$  је симетрала спољашњег угла код темена  $B$  троугла  $\triangle ABC$ ) и  $M$  је средиште хипотенузе  $S_bS_c$ , па следи да је  $M$  центар описаног круга троугла  $\triangle S_bBS_c$ . Према томе,  $MS_b = MS_c = MB$ , а како је  $MB = MC$  јер  $M$  припада симетрали дужи  $BC$ , па следи да је  $MS_b = MS_c = MB = MC$ .

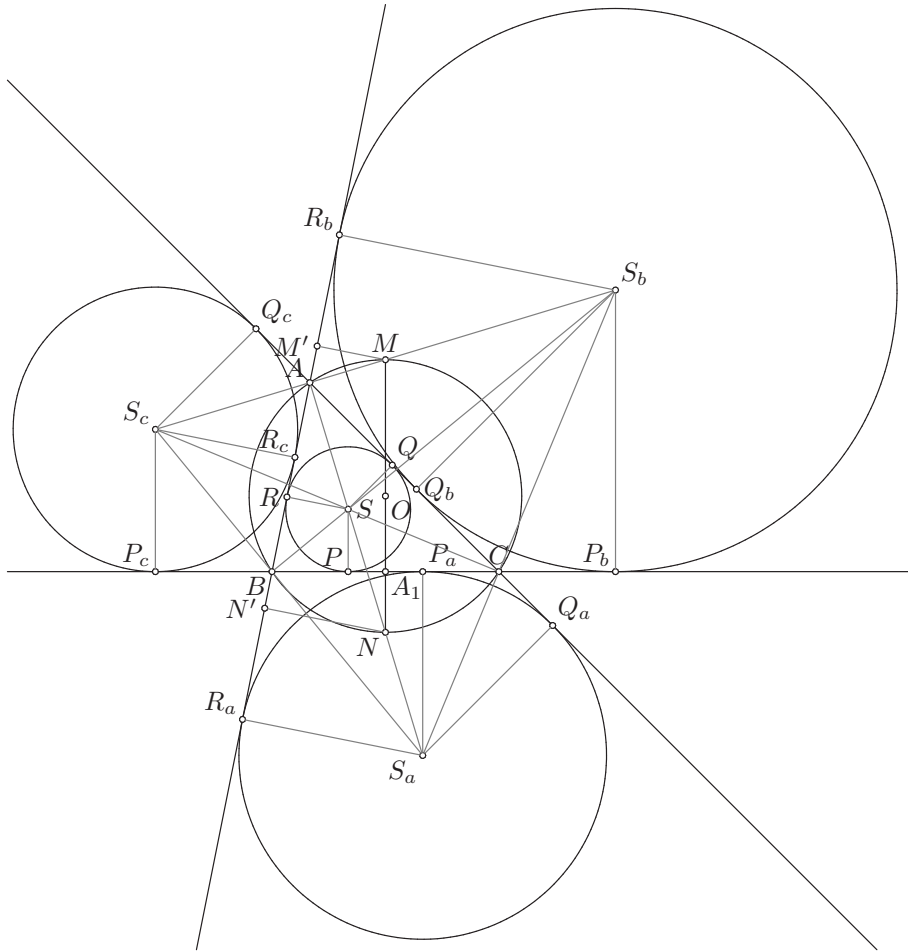


**7)** Доказујемо  $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$ ,  $A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$ , а то смо већ доказали док смо доказивали део **6**).

**8)** Доказујемо  $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$ ,  $NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$ . Четвороугао  $S_cR_cR_bS_b$  је трапез јер је  $S_cR_c \perp AB$  и  $S_bR_b \perp AB$ , па је  $S_cR_c \parallel S_bR_b$ . Такође,  $MM' \perp AB$ , па је  $MM' \parallel S_cR_c$  и  $MM' \parallel S_bR_b$ , а  $M$  је средиште  $S_cS_b$ ,

па је  $MM'$  средња линија неконвексног трапеца  $S_cR_cR_bS_b$ . Следи да је  $MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$ .

Четвороугао  $SRR_aS_a$  је траpez јер је  $SR \perp AB$  и  $S_aR_a \perp AB$ , па је  $SR \parallel S_aR_a$ . Такође,  $NN' \perp AB$ , па је  $NN' \parallel SR \parallel S_aR_a$  и  $N$  је средиште  $SS_a$ , па је  $NN'$  средња линија конвексног трапеца  $SRR_aS_a$ . Закључујемо да је  $NN' = \frac{1}{2}(SR + S_aR_a) = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$ .



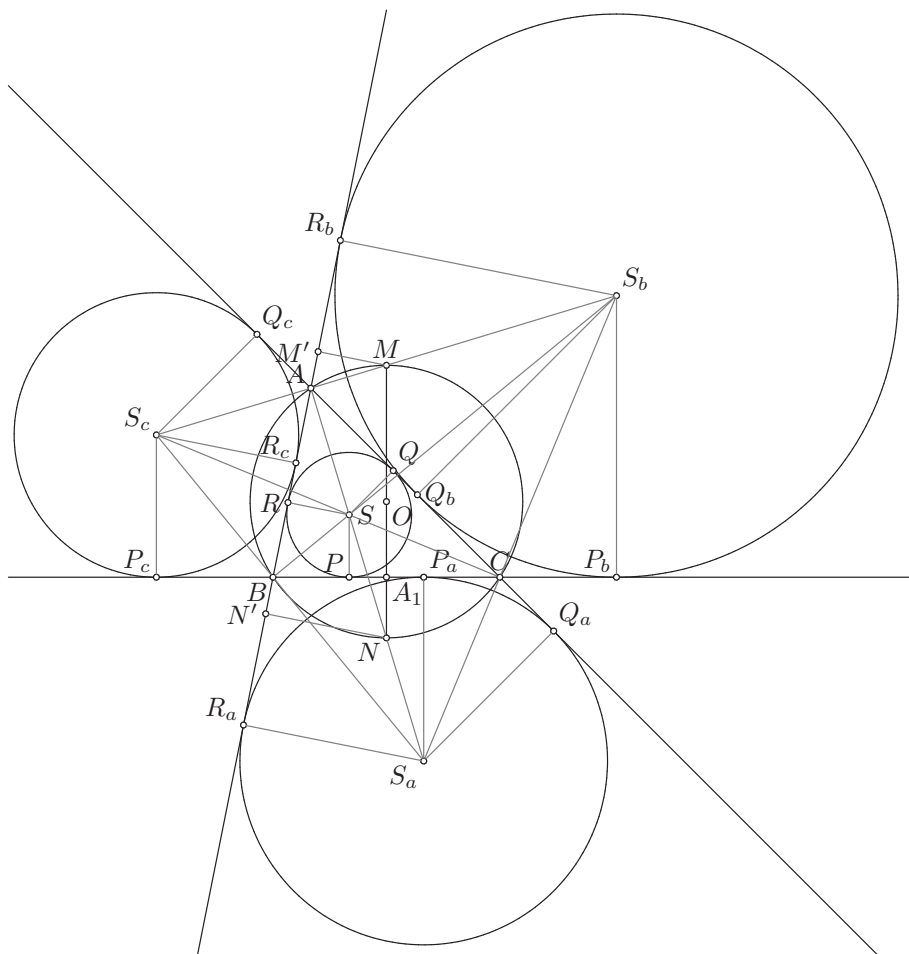
9) Доказујемо  $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$ . За пречник  $MN$  описаног круга  $l$  троугла  $\triangle ABC$  имамо с једне стране да је  $MN = 2r$ , а с друге стране да је  $MN = MA_1 + A_1N = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c + \rho_a - \rho)$ . Дакле,  $2r = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho)$ , па је  $4r = \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho$ , односно  $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$ .

10) Доказујемо  $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$ ,  $AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$ . У делу 8) смо доказали да је  $MM'$  средња линија трапеца  $S_cR_cR_bS_b$ , па је  $M'$  средиште странице  $R_cR_b$ . Дакле,  $R_cM' = \frac{1}{2}R_cR_b = \frac{a}{2}$ . Даље имамо да је  $BM' = BR_c + R_cM' = p - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} = \frac{1}{2}(b + c)$  и да је  $AM' = BM' - BA = \frac{1}{2}(b + c) - c = \frac{1}{2}(b - c)$ .

Такође, у делу **8)** доказали смо да је  $NN'$  средња линија трапеза  $SRR_aS_a$ , па је  $N'$  средиште  $RR_a$ . Следи да је  $N'R_a = \frac{1}{2}RR_a = \frac{a}{2}$ , па је  $AN' = AR_a - N'R_a = p - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-a}{2} = \frac{1}{2}(b+c)$ . Такође, следи да је  $BN' = AN' - AB = \frac{1}{2}(b+c) - c = \frac{1}{2}(b-c)$ .

Дакле, доказали смо да важи

$$AM' = BN' = \frac{1}{2}(b-c) \quad \text{и} \quad AN' = BM' = \frac{1}{2}(b+c).$$



**11)** Доказујемо да је  $M'N' = b$ . Јасно је да је  $M'N' = M'A + AN' = \frac{1}{2}(b-c + b+c) = b$  што је и требало доказати.

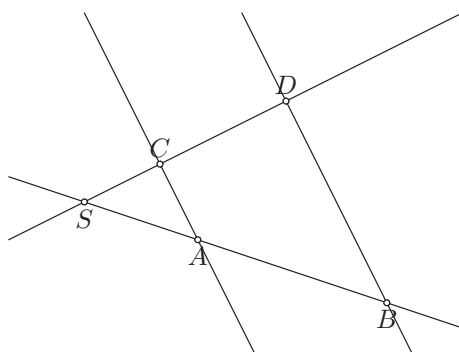


## 2 Сличност

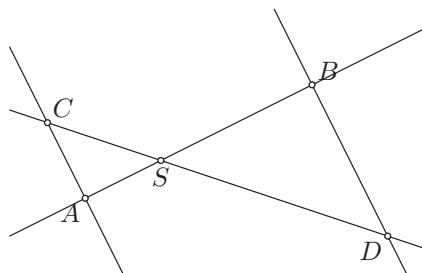
Подсетимо се Талесове теореме, једне од најстаријих теорема у математици.

**Теорема 10 (Талес).** Нека се праве  $p, q$  секу у тачки  $S$ . Нека су  $A, B$  две различите тачке праве  $p$ , које су различите од  $S$  и нека су  $C, D$  две различите тачке праве  $q$ , које су различите од  $S$ . Тада је

$$\begin{aligned} AC \parallel BD &\iff \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD} \\ &\iff \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}. \end{aligned}$$



При томе, уопште не мора да важи распоред тачака као што је на овој слици. Теорема ће важити и ако имамо неки други распоред тачака.



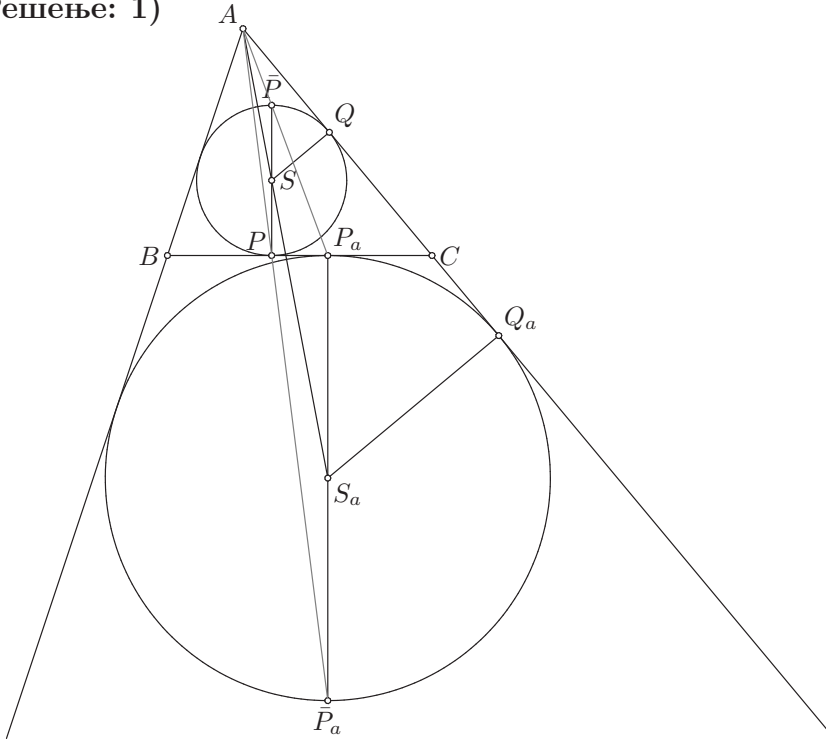
Искористимо Талесову теорему да решимо део **1)** Великог задатка (задатка 1.12).

**1.12. (Велики задатак)** Ако са  $A_1, B_1$  и  $C_1$  обележимо средишта ивица  $BC = a, CA = b, AB = c$  троугла  $ABC$  ( $b > c$ ), са  $p$  полуобим тог троугла, са  $l(O, r)$  описани круг тог троугла, са  $P, Q, R$  тачке у којима уписани круг  $k(S, \rho)$  додирује праве  $BC, CA, AB$ , са  $P_i, Q_i, R_i$  ( $i = a, b, c$ ) тачке у којима споља уписани круг  $k_i(S_i, \rho_i)$  додирује редом праве  $BC, CA, AB$ ,

са  $M$  и  $N$  тачке у којима медијатриса ивице  $BC$  сече круг  $l$ , при чему је  $M$  на луку  $BAC$ , са  $M'$  и  $N'$  подножја управних из тачака  $M$  и  $N$  на правој  $AB$ , са  $P', P'_a, P'_b, P'_c$  дијаметрално супротне тачке тачкама  $P, P_a, P_b, P_c$ , доказати да је:

$$1) \mathcal{B}(A, P', P_a), \quad \mathcal{B}(A, P, P'_a), \quad \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \quad \mathcal{B}(P_b, A, P'_c).$$

**Решење: 1)**



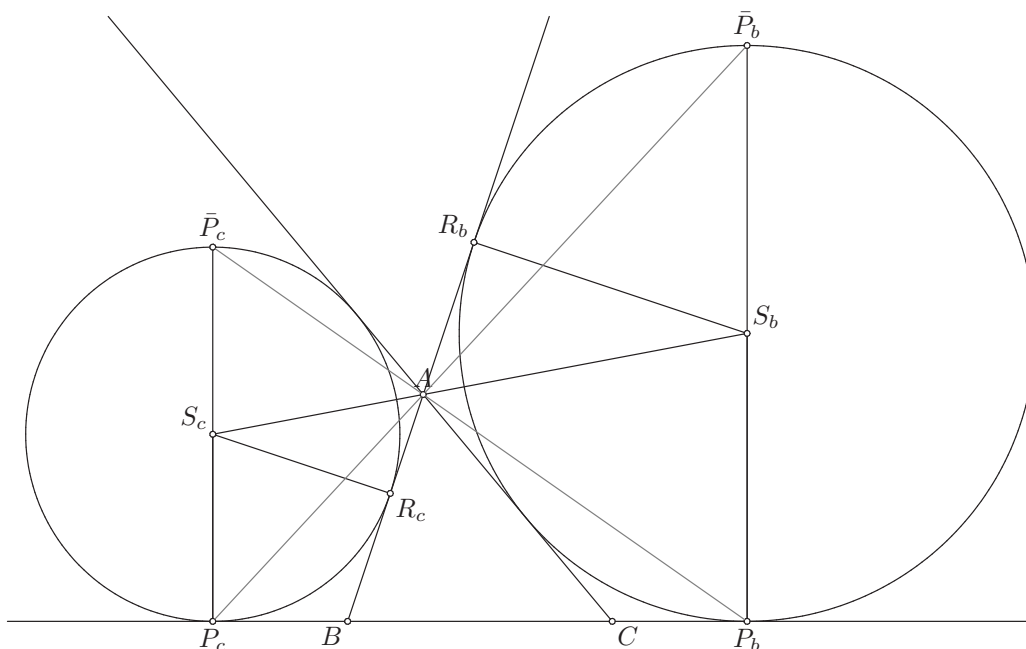
Нека је  $\bar{P}$  пресечна тачка праве  $SP$  и праве  $AP_a$ . Довољно је доказати да важи  $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$  и  $P' = \bar{P}$ . Како тачке  $P, P'$  припадају уписаном кругу  $k$  троугла  $\triangle ABC$  и правој  $SP$  и важи  $SP = SP' = \rho$ , а тачка  $P$  не припада правој  $AP_a$ , следи да је довољно доказати да је  $S\bar{P} = \rho$  да би било  $P' = \bar{P}$ .

Праве  $SS_a$  и  $QQ_a$  се секу у тачки  $A$  и важи  $SQ \perp AC$  и  $S_aQ_a \perp AC$ , па је  $SQ \parallel S_aQ_a$ . Према Талесовој теорему следи да је  $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SQ}{S_aQ_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$ . Такође, имамо и да се праве  $SS_a$  и  $\bar{P}P_a$  секу у тачки  $A$  и да је  $S\bar{P} \perp BC$  и  $S_aP_a \perp BC$ , па је  $S\bar{P} \parallel S_aP_a$ . Пошто важи  $\mathcal{B}(A, S, S_a)$ , према Талесовој теорему следи да важи  $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$  и  $\frac{S\bar{P}}{S_aP_a} = \frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$ . Међутим, важи  $S_aP_a = \rho_a$ , па је  $\frac{S\bar{P}}{\rho_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$ , одакле закључујемо да је  $S\bar{P} = \rho$ , односно да је  $P' = \bar{P}$ . Дакле, важи  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ .

Нека је  $\bar{P}_a$  пресечна тачка праве  $S_aP_a$  и праве  $AP$ . Довољно је доказати да важи  $\mathcal{B}(A, P, \bar{P}_a)$  и  $P'_a = \bar{P}_a$ . Како тачке  $P_a, P'_a$  припадају споља уписаном кругу  $k_a$  троугла  $\triangle ABC$  и правој  $S_aP_a$  и важи  $S_aP_a = SP'_a = \rho_a$ ,

а тачка  $P_a$  не припада правој  $AP$ , следи да је довољно доказати да је  $S_a\bar{P}_a = \rho_a$  да би било  $P'_a = \bar{P}_a$ .

Већ смо доказали да је  $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$ . Праве  $SS_a$  и  $P\bar{P}_a$  се секу у тачки  $A$  и из  $SP \perp BC$  и  $S_a\bar{P}_a \perp BC$  закључујемо да је  $SP \parallel S_a\bar{P}_a$ . Пошто важи  $\mathcal{B}(A, S, S_a)$ , на основу Талесове теореме следи да важи  $\mathcal{B}(A, P, \bar{P}_a)$  и  $\frac{S_a\bar{P}_a}{SP} = \frac{AS_a}{AS} = \frac{\rho_a}{\rho}$ . Међутим, важи  $SP = \rho$ , па је  $\frac{S_a\bar{P}_a}{\rho} = \frac{\rho_a}{\rho}$ , одакле закључујемо да је  $S_a\bar{P}_a = \rho_a$ , тј.  $P'_a = \bar{P}_a$ . Дакле, важи  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ .



Нека је  $\bar{P}_b$  пресечна тачка праве  $S_bP_b$  и праве  $AP_c$  и нека је  $\bar{P}_c$  пресечна тачка праве  $S_cP_c$  и праве  $AP_b$ . Довољно је доказати да важи  $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$  и  $P'_b = \bar{P}_b$ , као и да важи  $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$  и  $P'_c = \bar{P}_c$ . Како тачке  $P_b, P'_b$  припадају споља уписаном кругу  $k_b$  троугла  $\triangle ABC$  и правој  $S_bP_b$  и важи  $S_bP_b = S_bP'_b = \rho_b$ , а тачка  $P_b$  не припада правој  $AP_c$ , следи да је довољно доказати да је  $S_b\bar{P}_b = \rho_b$  да би било  $P'_b = \bar{P}_b$ . Слично, како тачке  $P_c, P'_c$  припадају споља уписаном кругу  $k_c$  троугла  $\triangle ABC$  и правој  $S_cP_c$  и важи  $S_cP_c = S_cP'_c = \rho_c$ , а тачка  $P_c$  не припада правој  $AP_b$ , следи да је довољно доказати да је  $S_c\bar{P}_c = \rho_c$  да би било  $P'_c = \bar{P}_c$ .

Праве  $S_bS_c$  и  $R_bR_c$  се секу у тачки  $A$  и важи  $S_bR_b \perp AB$  и  $S_cR_c \perp AB$ , па је  $S_bR_b \parallel S_cR_c$ . Према Талесовој теореме следи да је  $\frac{AS_b}{AS_c} = \frac{S_bR_b}{S_cR_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$ . Такође, имамо и да се праве  $S_bS_c$  и  $\bar{P}_bP_c$  секу у тачки  $A$  и да је  $S_b\bar{P}_b \perp BC$  и  $S_cP_c \perp BC$ , па је  $S_b\bar{P}_b \parallel S_cP_c$ . Пошто важи  $\mathcal{B}(S_c, A, S_b)$ , према Талесовој теореме следи да важи  $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$  и  $\frac{S_b\bar{P}_b}{S_cP_c} = \frac{AS_b}{AS_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$ . Међутим,  $S_cP_c = \rho_c$ , па је  $\frac{S_b\bar{P}_b}{\rho_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$ , одакле закључујемо да је  $S_b\bar{P}_b = \rho_b$ , односно да је  $P'_b = \bar{P}_b$ .

Дакле, важи  $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$ .

Праве  $S_b S_c$  и  $P_b \bar{P}_c$  се секу у тачки  $A$  и из  $S_b P_b \perp BC$  и  $S_c \bar{P}_c \perp BC$  закључујемо да је  $S_b P_b \parallel S_c \bar{P}_c$ . Пошто важи  $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$ , из Талесове теореме следи да важи  $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$  и  $\frac{S_c \bar{P}_c}{S_b P_b} = \frac{AS_c}{AS_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$ . Међутим, важи  $S_b P_b = \rho_b$ , па је  $\frac{S_c \bar{P}_c}{\rho_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$ , одакле закључујемо да је  $S_c \bar{P}_c = \rho_c$ , тј.  $P'_c = \bar{P}_c$ . Дакле, важи  $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$ .

Као што смо имали Ставово о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с тим што имамо у виду да сличност чува *подударности углова и односе сраница*.

**Став 2.** Нека су даћи троуглови  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$ . Ако важи нешто од следећег:

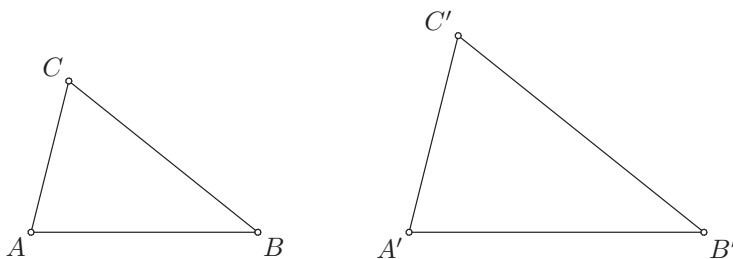
$$1^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle BAC = \angle B'A'C';$$

$$2^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'};$$

$$3^\circ \angle BAC = \angle B'A'C', \angle ABC = \angle A'B'C';$$

4<sup>o</sup>  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ,  $\angle ACB = \angle A'C'B'$ , а улови  $\angle ABC$  и  $\angle A'B'C'$  су оба оштра, оба права или оба тупа;

онда је  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .



Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).