РЕШЕЊА ДРУГОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 12.01.2019.

Група 1

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама
$$y = x^2,\ y = 4x^2,\ x \leq 5.$$
2. (5 поена) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y' + 2y\mathrm{tg}x = \cos^2 x$ са почетним условом $y(0) = 1$.
3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + y' - 2y = xe^x$.
4. (5 поена) Бацају се две коцке за игру истовремено. Ако се зна да је збир палих бројева већи од 10 одредити вероватноћу да су пале две шестице.
5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

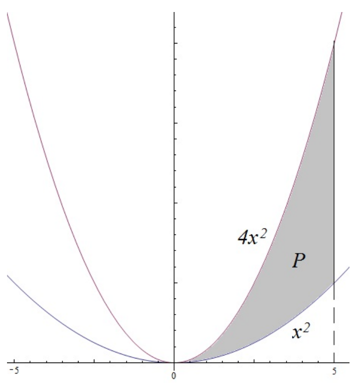
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ a^2 - a^3 & \frac{a}{2} & \frac{1}{4} & a^3 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити EX;
(в) Одредити DX.

РЕШЕЊА

1. Пресечна тачка графика функција x^2 и $4x^2$ је решење једначине $x^2 = 4x^2$. Решење ове једначине је $x = 0$ што ће бити доња граница интеграла док ће горња граница бити 5. Тражена површина је

$$P = \int_0^5 (4x^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{3x^3}{3}\Big|_0^5 = x^3\Big|_0^5 = 125,$$



2. Нађимо најпре опште решење дате једначине. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда чије је решење дато формулом

$$
\begin{aligned}
y &= e^{-\int 2\mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int 2\mathrm{tg}x\mathrm{d}x}\cos^2 x\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{2\ln|\cos x|}\left(c+\int e^{-2\ln|\cos x|}\cos^2 x\mathrm{d}x\right)\\
&= \cos^2 x\left(c+\int \frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x\mathrm{d}x\right)\\
&= \cos^2 x\left(c+\int \mathrm{d}x\right)\\
&= \cos^2 x(c+x).
\end{aligned}
$$

Користили смо да је

$$
\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t=\cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{bmatrix} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t|+c_1 = -\ln|\cos x|+c_1.
$$

Још остаје да нађемо партикуларно решење које задовољава услов $y(0)=1$. То решавамо убацивањем $x=0$ и $y=1$ у опште решење.

$$
1=\cos^2 0(c+0),
$$

одакле је $c=1$, па је тражено партикуларно решење

$$
y=\cos^2 x(1+x).
$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$
y''+y'-2y=0.
$$

Њена карактеристична једначина је

$$
\lambda^2+\lambda-2=0,
$$

па је

$$
\lambda_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2},
$$

тј. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-2$ па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$
y_h=c_1e^x+c_2e^{-2x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.
$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx)$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$
y_p'=e^x(Ax^2+(2A+B)x+B),\ y_p''=e^x(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B).
$$

Након убацивања, добијамо

$$
e^x(Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)+e^x(Ax^2+(2A+B)x+B)-2e^x(Ax^2+Bx)=xe^x,
$$

одакле након скраћивања са e^x и изједначавањем коефицијената уз 1 и x са обе стране једнакости добијамо систем

$$
6A=1,\ 2A+3B=0,
$$

па је $A = \frac{1}{6}$ и $B = -\frac{1}{3}$, односно $y_p = e^x\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}\right)$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} + e^x\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}\right)\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да су пале две шестице а са B догађај да је збир палих бројева већи од 10. Потребно је одредити $P(A|B)$. На основу формуле условне вероватноће имамо

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Одредимо још вероватноће $P(A),\ P(B|A),\ P(B)$.

Повољних исхода за догађај A је само 1, а укупан број могућих исхода је 36, па је $P(A) = \frac{1}{36}$.

Вероватноћа догађаја $P(B|A)$ је вероватноћа да је збир палих бројева већи од 10 уколико знамо да су пале две шестице. Како знамо да су пале две шестице, збир палих бројева је 12 што је увек веће од 10 па је ово заправо сигуран догађај тј. $P(B|A) = 1$.

Повољни исходи за догађај B су $\{56, 66, 65\}$ тј. имамо три повољна исхода од укупно 36, па је $P(B) = \frac{3}{36}$. Коначно,

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Други начин: Како знамо да је збор палих бројева већи од 10, знамо да су могући исходи $\{56, 66, 65\}$, тј. имамо укупно три исхода, а повољан је само један, да су пале две шестице, па је тражена вероватноћа $\frac{1}{3}$.

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 - a^3 + \frac{a}{2} + \frac{1}{4} + a^3 + \frac{1}{4} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{2}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{1}{2}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{37}{8}.$$

Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{37}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{71}{64}.$$

Група 2

1. (5 поена) Израчунати површину фигуре ограничену кривама

$$y = 1 + x^2,\ y = 2x^2,\ x \geq 0.$$

2. (5 поена) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y' + 2y\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sin^2 x}$ са почетним условом $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. (5 поена) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

4. (5 поена) Бацају се две коцке за игру истовремено. Ако се зна да је збир палих бројева мањи од 4 одредити вероватноћу да су пале две јединице.

5. (5 поена) Нека је дата случајна величина X која зависи од параметра

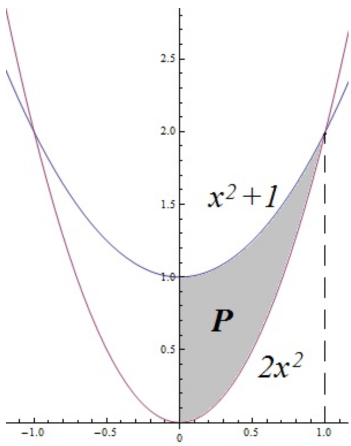
$$X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3} & \frac{a}{6} & \frac{a^2}{4} \end{pmatrix}$$

(а) Одредити параметар a;
(б) Одредити EX;
(в) Одредити DX.

РЕШЕЊА

1. Пресечна тачка графика функција $1 + x^2$ и $2x^2$ је решење једначине $1 + x^2 = 2x^2$. Решења ове једначине су $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ па због услова $x \geq 0$ закључујемо да је доња граница интеграла 0, а горња је 1. Тражена површина је

$$P = \int_0^1 (1 + x^2 - 2x^2)\mathrm{d}x = x - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3},$$



2. Нађимо најпре опште решење дате једначине. Дата једначина је линеарна диференцијална једначина првог реда чије је решење дато формулом

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int 2\mathrm{ctg}x\mathrm{d}x}\left(c+\int e^{\int 2\mathrm{ctg}x\mathrm{d}x}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)\\
&= e^{-2\ln|\sin x|}\left(c+\int e^{2\ln|\sin x|}\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2 x}\left(c+\int \sin^2 x\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2 x}\left(c+\int \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\sin^2 x}(c+x).
\end{aligned}$$

Користили смо да је

$$\int \mathrm{ctg}x\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t=\sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x\end{bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c_1 = \ln|\sin x| + c_1.$$

Још остаје да нађемо партикуларно решење које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. То решавамо убацивањем $x=\frac{\pi}{2}$ и $y=0$ у опште решење.

$$0 = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}\left(c+\frac{\pi}{2}\right),$$

одакле је $c=-\frac{\pi}{2}$, па је тражено партикуларно решење

$$y=\frac{1}{\sin^2 x}\left(-\frac{\pi}{2}+x\right).$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$y''-4y'+4y=0.$$

Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2-4\lambda+4=0,$$

па је

$$\lambda_1=\lambda_2=2,$$

па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = Ax^2e^{2x}$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$y_p'=e^{2x}(2Ax^2+2Ax),\ y_p''=e^{2x}(4Ax^2+8Ax+2A).$$

Након убацивања, добијамо

$$e^{2x}(4Ax^2+8Ax+2A)-4e^{2x}(2Ax^2+2Ax)+4Ax^2e^{2x}=e^{2x},$$

одакле добијамо $A=\frac{1}{2}$, односно $y_p=\frac{x^2}{2}e^{2x}$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y=y_h+y_p=c_1e^x+c_2xe^x+\frac{x^2}{2}e^{2x}\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

4. Означимо са A догађај да су пале две јединице а са B догађај да је збир палих бројева мањи од 4. Потребно је одредити $P(A|B)$. На основу формуле условне вероватноће имамо

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Одредимо још вероватноће $P(A)$, $P(B|A)$, $P(B)$.
Повољних исхода за догађај A је само 1, а укупан број могућих исхода је 36, па је $P(A) = \frac{1}{36}$.
Вероватноћа догађаја $P(B|A)$ је вероватноћа да је збир палих бројева мањи од 4 уколико знамо да су пале две јединице. Како знамо да су пале две јединице, збир палих бројева је 2 што је увек мање од 4 па је ово заправо сигуран догађај тј. $P(B|A) = 1$.
Повољни исходи за догађај B су $\{11, 12, 21\}$ тј. имамо три повољна исхода од укупно 36, па је $P(B) = \frac{3}{36}$. Коначно,

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

Други начин: Како знамо да је збор палих бројева мањи од 4, знамо да су могући исходи $\{11, 12, 21\}$, тј. имамо укупно три исхода, а повољан је само један, да су пале две јединице, па је тражена вероватноћа $\frac{1}{3}$.
5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$\frac{1}{3} + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{3} + \frac{a}{6} + \frac{a^2}{4} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{2}{3}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{2}{3}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = (-3) \cdot \frac{1}{3} + (-2) \cdot \frac{4}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{16}{9}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 9 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{44}{9}.$$

Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{44}{9} - \left(-\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{140}{81}.$$