РЕШЕЊА ЈУНСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 19.06.2019.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!-n!}$.
2. (8 п) Испитати монотоност и наћи екстремуме функције $y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
3. (8 п) Израчунати $\int \frac{\cos x}{\cos 2x} \mathrm{d}x$.
4. (8 п) Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине $y'' - 8y' + 16y = x^2$, са почетним условима $y(0) = 0,\ y(1) = 19$.
5. (8 п) Милена има две полице са књигама од којих је неке прочитала. На првој полици од укупно 30 прочитала је 10 књига, а на другој од укупно 40 прочитала је 30 књига. Милена насумице бира полицу и једну књигу са ње.

(4 п) а) Одредити вероватноћу да је одабрала књигу коју није читала.

(4 п) б) Ако је одабрала књигу коју није читала, одредити вероватноћу да је са прве полице.

6. (5 п) а) Како гласи Кошијев критеријум за конвергенцију редова?

(5 п) б) Користећи Кошијев критеријум испитати за које $x \geqslant 0$ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+n+1}$ конвергира.

7. (10 п) Линеарна диференцијална једначина првог реда. Опште решење и решење Кошијевог проблема.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{5^n}{(n+1)!-n!}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+2)!-(n+1)!}}{\frac{5^n}{(n+1)!-n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)\cdot(n+1)!}}{\frac{5^n}{n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{(n+1)^2} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен функције је $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Израчунајмо први извод дате функције

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2+x} = -\frac{1}{x(x+1)}.$$

Како је $f'(x) < 0$ за $x \in \mathcal{D}$, закључујемо да функција f свуда опада и нема екстремума.

3.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\cos 2x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos x}{1 - 2\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2t^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t\sqrt{2})(1 + t\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2}{(1 - t\sqrt{2})(1 + t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1 - t\sqrt{2} + 1 + t\sqrt{2}}{(1 - t\sqrt{2})(1 + t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 + t\sqrt{2}} + \frac{1}{1 - t\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln(1 + t\sqrt{2}) - \ln(1 - t\sqrt{2})\right) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1 + t\sqrt{2}}{1 - t\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1 + \sin x \cdot \sqrt{2}}{1 - \sin x \cdot \sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 8y' + 16y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ су $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, па је $y_h = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$$

па је

$$2A - 8(2Ax + B) + 16(Ax^2 + Bx + C) = 128x^2$$

односно након сређивања

$$16Ax^2 + (-16A + 16B)x + 2A - 8B + 16C = 128x^2$$

одакле изједначавањем коефицијената уз 1, x и x^2 добијамо систем три једначине са три непознате.

$$\begin{aligned}
2A - 8B + 16C &= 0 \\
-16A + 16B &= 0 \\
16A &= 128
\end{aligned}$$

Решење овог система је $A = 8$, $B = 8$, $C = 3$, па добијамо да је партикуларно решење је $y_p = 8x^2 + 8x + 3$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + 8x^2 + 8x + 3, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Остаје још да нађемо партикуларно решење. Убацивањем услова $y(0) = 0$ и $y(1) = 19$ у опште решење добијамо једначине

$$0 = c_1 + 3,$$

$$19 = c_1 e^4 + c_2 e^4 + 19,$$

одакле коначно добијамо да је $c_1 = -3$ и $c_2 = 3$, па је тражено партикуларно решење

$$y = -3e^{4x} + 3xe^{4x} + 8x^2 + 8x + 3.$$

5. Означимо са H_1 и H_2 хипотезе да је Милена одабрала књигу са прве односно друге полице и нека је догађај A догађај да је извукла књигу коју није читала.
(а) Желимо да одредимо $P(A)$. На основу формуле потпуне вероватноће имамо да је

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2),$$

па одредимо ове четири вероватноће.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A|H_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}, \quad P(A|H_2) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4},$$

па добијамо

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{24}.$$

(б) Желимо да одредимо вероватноћу $P(H_1|A)$ коју рачунамо по формули

$$P(H_1|A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{11}{24}} = \frac{8}{11}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Означимо са $a_n = \frac{x^n}{n^2+n+1}$. Тада је

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n^2+n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt[n]{n^2+n+1}} = x.$$

Знамо да на основу Кошијевог критеријума дати ред конвергира за $r < 1$, а дивергира за $r > 1$, па ће дати ред конвергирати за $x < 1$, дивергирати за $x > 1$ и још случај $x = 1$ треба посебно испитати. Када је $x = 1$ дати ред постаје

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1},$$

а овај ред конвергира на основу поредбеног критеријума јер је он еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ за који знамо да конвергира.

Коначно, добијамо да дати ред конвергира за $x \in [0, 1]$.

7. Видети у уџбенику.