РЕШЕЊА СЕПТЕМБАРСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 20.09.2023.

## ЗАДАЦИ

**1. (8 п)** Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-7}\right)^{n^2}$.
**2. (8 п)** Испитати конвексност и наћи превојне тачке функције $y = \ln^2 x + \ln x$.
**3. (8 п)** Израчунати $\int \frac{\cos x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$.
**4. (8 п)** Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + y' - 2y = 20\sin 2x$.
**5. (8 п)** Из шпила од 52 карте извлаче се три карте одједном.
**(4 п)** а) Одредити вероватноћу да ниједна од три карте није у знаку срца.
**(4 п)** б) Ако знамо да ниједна од три карте није у знаку срца, одредити вероватноћу да су извучена тачно два краља.
**6. (5 п)** а) Дати дефиницију асимптоте реалне функције реалне промењливе и како се израчунава у свим случајевима (вертикална, коса).
**(5 п)** б) Наћи све асимптоте функције $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x+2}$.
**7. (10 п)** Како гласи и како се решава Бернулијева диференцијална једначина? Наћи опште решење диференцијалне једначине $y' - 2xy = 3x^3y^2$.

## РЕШЕЊА

**1.** Означимо $a_n = \left(\frac{2n}{2n-7}\right)^{n^2}$. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n-7}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-7}{7}}\right)^{\frac{2n-7}{7}\frac{7}{2n-7}\cdot n} = e^{\frac{7}{2}} > 1,$$

то дати ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

**2.** Домен функције је $\mathcal{D} = (0, +\infty)$. Израчунајмо први и други извод дате функције

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2\ln x + 1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1-2\ln x}{x^2}.$$

Имамо да је $f''(x) = 0$ за $x = \sqrt{e}$ и

$$f''(x) > 0 \text{ за } x \in (0, \sqrt{e}),$$
$$f'(x) < 0 \text{ за } x \in (\sqrt{e}, +\infty),$$

па закључујемо да је

$$f \text{ ковексна на } (0, \sqrt{e}),$$
$$f \text{ конкавна на } (\sqrt{e}, +\infty),$$
$$\text{тачка } x = \sqrt{e} \text{ је превојна тачка.}$$

**3.**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\cos 2x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos x}{1-2\sin^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{1-2t^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2}{(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-t\sqrt{2}+1+t\sqrt{2}}{(1-t\sqrt{2})(1+t\sqrt{2})}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t\sqrt{2}} + \frac{1}{1-t\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln(1+t\sqrt{2}) - \ln(1-t\sqrt{2})\Big) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x\cdot\sqrt{2}}{1-\sin x\cdot\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

**4.** Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + y' - 2y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ су $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$, па је $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x, \quad y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$$

па је

$$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = 20\sin 2x$$

односно након сређивања

$$\sin 2x(-6A-2B) + \cos 2x(2A-6B) = 20\sin 2x$$

одакле изједначавањем коефицијената уз $\sin 2x$ и $\cos 2x$ добијамо систем две једначине са две непознате.

$$\begin{gathered} -6A - 2B = 20 \\ 2A - 6B = 0 \end{gathered}$$

Решење овог система је $A = -3,\ B = -1$, па добијамо да је партикуларно решење је $y_p = -3\sin 2x - \cos 2x$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - 3\sin 2x - \cos 2x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**5.** (а) Означимо са $A$ догађај да ниједна извучена карта није у знаку срца. Тражимо $P(A)$. Укупан број исхода при извлачењу три карте одједном из шпила од 52 карте је $\binom{52}{3}$, а број повољних исхода је $\binom{39}{3}$ јер нам одговара да извучемо било које три карте које нису срце, а тих карата има укупно 39. Дакле, по дефиницији тражена вероватноћа је

$$P(A) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{\frac{39\cdot38\cdot37}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{52\cdot51\cdot50}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{703}{1700}.$$

(б) Означимо са $B$ догађај да су извучена тачно два краља. У овом делу задатка нама се тражи условна вероватноћа $P(B|A)$ коју рачунамо по формули

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Вероватноћу $P(A)$ смо већ израчунали па остаје само да одредимо вероватноћу $P(AB)$ тј. колика је вероватноћа да се догађаји $A$ и $B$ истовремено испуне, односно да су извучена тачна два краља и да ниједна од карата није у знаку срца. Укупан број исхода при овом извлачењу је поново $\binom{52}{3}$, а број повољних исхода рачунамо као $\binom{3}{2}\cdot\binom{37}{1}$ (од три краља који нису срце бирамо два и то је $\binom{3}{2}$ могућности и то множимо са бројем могућности да од преосталих 37 карата које нису ни та два краља нити срце изаберемо једну, тј. $\binom{37}{1}$). Коначно,

$$P(B|A) = \frac{\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{37}{1}}{\binom{52}{3}}}{\frac{703}{1700}} = \frac{3}{247}.$$

**6.** (а) Видети у уџбенику.
(б) Домен дате функције је $\mathcal{D} = (-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$, па је права $x=-2$ потенцијална вертикална асимптота. Како је

$$\lim_{x\to-2+} = -\infty, \lim_{x\to-2-} = +\infty,$$

закључујемо да права $x=-2$ јесте вертикална асимптота. Пошто је $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, фнкција нема хоризонталних асимптота. Остаје да проверимо косе асимптоте. Како је

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = 0,$$

закључујемо да је права $y=x$ коса асимптота.
**7.** Након смене $u = y^{-1}$, полазна Бернулијева једначина се своди на следећу линеарну једначину:

$$u' + 2xu = -3x^3$$

чије је решење

$$u = e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx\right)$$
$$u = e^{-x^2}\left(c - 3\int e^{x^2}x^3dx\right)$$
$$u = e^{-x^2}\left(c - \frac{3}{2}e^{x^2}x^2 + \frac{3}{2}e^{x^2}\right)$$
$$u = ce^{-x^2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}, c\in\mathbb{R}$$

Враћањем полазне смене, добијамо:

$$y = \frac{1}{ce^{-x^2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}}, c \in \mathbb{R}.$$