РЕШЕЊА АВГУСТОВСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 30.08.2023.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$.

2. (8 п) Одредити асимптоте функције $y = x\sqrt{\frac{x}{x-6}}$.

3. (8 п) Израчунати $\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' - 4y = 4e^{-2x}$.

5. (8 п) Вероватноћа да ће Пера освојити медаљу за свој тениски клуб је 0.5, а вероватноћа да ће је Мика освојити је 0.7. Наћи вероватноћу да ће бар једна медаља бити освојена ако се такмичари боре независно. Ако је медаља освојена, која је вероватноћа да ју је освојио Пера?

6. (5 п) а)

(5 п) б)

7. (10 п)

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}$. Како је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n+2)}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-1+\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-n-2+n-1}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{n+2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{-3}}\right)^{\frac{n+2}{-3}\cdot(-3)}\\
&= e^{-3}\\
&= \frac{1}{e^3} < 1,
\end{aligned}$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2. Одредимо најпре домен дате функције. Да би x било у домену, мора да важи $\frac{x}{x-6} \geqslant 0$ и $x-6\neq 0$. Прва неједнакост нам даје услов да мора бити $x\in(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$, а друга да је $x\neq 6$, па када направимо пресек ових услова, добијамо да је домен дате функције $\mathcal{D}=(-\infty,0]\cup(6,+\infty)$. Тачке $x=0$ и $x=6$ су потенцијалне асимптоте и приметимо да може постојати само леви лимес у тачки 0 и десни лимес у тачки 6 (јер функција није дефинисана десно од 0 и лево од 6). Одредимо ова два лимеса.

Вертикалне асимптоте:

$$\lim_{x\to 0-} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = 0 \neq \infty,$$

па права $x=0$ није вертикална асимптота.

$$\lim_{x\to 6+} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = +\infty,$$

па права $x = 6$ јесте вертикална асимптота и то је једина вертикална асимптота ове функције.
<u>Хоризонталне асимптоте:</u>

$$\lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{x}{x-6}} = \lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{6}{x}}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

па нема хоризонталних асимптота.
<u>Косе асимптоте:</u>

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x}{x-6}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x}{x-6}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1-\frac{6}{x}}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} \left(x\sqrt{\frac{x}{x-6}} - 1\cdot x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-6}} - \frac{x\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-6}} \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-6})}{\sqrt{x-6}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-6}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-(x-6))}{\sqrt{x-6}(\sqrt{x}+\sqrt{x-6})} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2-6x}+x-6} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1-\frac{6}{x}}+1-\frac{6}{x}} \\
&= \frac{6}{2} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Дакле, коса асимптота дате функције је права $y = x + 3$.

3.

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) \mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\frac{8}{x^3+4x}\mathrm{d}x & v = x \end{bmatrix} \\
&= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + \int \frac{8x}{x^3+4x}\mathrm{d}x \\
&= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 8\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Одредимо посебно интеграл функције $\frac{1}{x^2+4}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}\mathrm{d}x\\ &= \begin{bmatrix} t=\frac{x}{2}\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x=2\mathrm{d}t\end{bmatrix}\\ &= \int \frac{2}{4(t^2+1)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+c_1\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c_1\end{aligned}$$

Вратимо се сада на почетни интеграл.

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)+8\int\frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}x\\ &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)+8\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c_1\right)\\ &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)+4\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+c.\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y''-4y=0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2-4=0$ су $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-2$, па је $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p=Axe^{-2x}$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$y_p'=Ae^{-2x}-2Axe^{-2x}=(A-2Ax)e^{-2x},\ \ y_p''=-2Ae^{-2x}-2Ae^{-2x}+4Axe^{-2x}=(-4A+4Ax)e^{-2x}$

па је

$$(-4A+4Ax)e^{-2x}-4Axe^{-2x}=e^{-2x}$$

односно након сређивања

$$-4A=1,$$

одакле је $A=-\frac{1}{4}$ па добијамо да је партикуларно решење је $y_p=-\frac{1}{4}xe^{2x}$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y=y_h+y_p=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-\frac{1}{4}xe^{-2x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

5. Означимо са A догађај да је Пера освојио медаљу, а са B догађај да је Мика освојио медаљу. Дато је да је $P(A)=0,5$ и $P(B)=0,7$. Догађај да је бар једна медаља освојена је $A\cup B$ и његова вероватноћа је

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0,5+0,7-0,5\cdot 0,7=0,85.$

Користили смо да је $P(AB)=P(A)P(B)$. Ово генерално не важи увек, али како су догађаји A или B међусобно независни, ова формула ће важити.
Ако је медаља освојена, вероватноћа да ју је освојио Пера је

$$P(A|(A\cup B))=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0,5}{0,85}\approx 0,588$$

Овде смо користили да је $A \cap (A \cup B) = A$. Заиста ово важи јер догађај A каже да је Пера освојио медаљу, а $A \cup B$ да је било ко освојио медаљу, па пошто тражимо пресек ова два догађаја, ми желимо да ти догађаји буду истовремено остварени, тј. треба да важи и да је Пера освојио медаљу и да је било ко освојио медаљу, а то је управо догађај да је Пера освојио медаљу, тј. догађај A.

6. (а) Видети у уџбенику.
(б)
7. Видети у уџбенику.