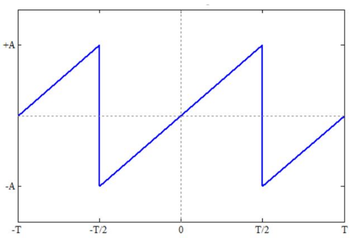
Završni ispit iz Teorije aproksimacija

29. avgust 2020.

Zadatak 1. Neka je R linearan normiran prostor i neka su $g_1, g_2 \ldots, g_n \in R$ dati linearno nezavisni elementi prostora R.

1. Definisati i dokazati teoremu o egzistenciji elementa najbolje aproksimacije za proizvoljnu funkciju $f \in R$ u potprostoru koji razapinju elementi $g_1, g_2 \ldots, g_n$.
2. Naći najbolju aproksimaciju vektora $y = [3\ 1\ 4\ 2]^{\mathrm{T}}$, $y \in \mathbb{R}^4$ vektorima $x_1 = [1\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ i $x_2 = [0\ 1\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ ako je rastojanje definisano uniformnom normom, $\|z\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le 4} |z_i|$, $\forall z \in \mathbb{R}^4$. Da li je dobijena najbolja aproksimacija jedinstvena? Obrazložiti odgovor.

Zadatak 2. Odrediti Furijeov razvoj funkcije $f(x)$ date sledećom slikom. Uzeti da je $A = 5$ i $T = 2$.



Zadatak 3. Odrediti pravu koja u srednjekvadratnom smislu najbolje aproksimira skup tačaka (x_i, y_i), $i = \overline{1,3}$ koje su zadate sledećom tabelom.

x_i	0	2	3
y_i	1	3	2

Zadatak 4. Definisati tačke Čebiševljeve alternanse. Formulisati i dokazati dovoljan uslov za egzistenciju polinoma najbolje ravnomerne aproksimacije neprekidne funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$.

Zadatak 5.

1. Definisati pojam multirezolucije i funkcije skaliranja.
2. Neka je $\varphi^0(x)$ boks funkcija $\varphi^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Ako je $c(0) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, $c(1) = \frac{2}{3\sqrt{2}}$, napisati analitički izraz i nacrtati funkcije $\varphi^1(x), \varphi^2(x)$ i $\varphi^3(x)$ dobijene kaskadnim algoritmom. Koje vrednosti uzima $\varphi^k(x)$?