Završni ispit iz Teorije aproksimacija

23. septembar 2022.

Zadatak 1. Neka je X linearan normiran prostor, $g_1, g_2, .., g_n \in X$ dati linearno nezavisni elementi prostora X i $f \in X$ proizvoljna funkcija.

a) Definisati element i grešku najbolje aproksimacije funkcije f u potprostoru prostora X koji je određen sa $g_1, g_2, .., g_n \in X$.

b) Formulisati i dokazati teoremu o jedinstvenosti elementa najbolje aproksimacije.

c) Definisati svojstvo stroge normiranosti prostora, a zatim ispitati da li je prostor $\mathcal{L}_1[a, b]$ sa normom $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ strogo normiran.

Zadatak 2.

a) Dokazati da Furijeov red proizvoljne funkcije $f \in X$ po potpunom ortonormiranom sistemu iz Hilbertovog prostora X konvergira upravo funkciji f.

b) Odrediti Furijeov razvoj funkcije $f(x) = x - x^2$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, a potom izračunati sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Zadatak 3.

a) Definisati tačke Čebiševljeve alternanse. Formulisati Čebiševljevu teoremu, a zatim dokazati dovoljan uslov za egzistenciju polinoma najbolje ravnomerne aproksimacije neprekidne funkcije $f(x)$ na segmentu $[a, b]$.

b) Naći najbolju ravnomernu aproksimaciju funkcije $f(x) = x^3$ polinomom drugog stepena na segmentu $[0, 1]$.

Zadatak 4.

a) Definisati pojam multirezolucije i funkcije skaliranja. Uvesti prostore talasića i napisati jednačinu talasića.

b) Ako talasić $\psi(x)$ ima jediničnu normu, pokazati da funkcija $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ takođe ima jediničnu normu.

Zadatak 5. Piramidalnim algoritmom sinteze rekonstruisati signal x koristeći aproksimaciju na poslednjem nivou $a_2 = 2(13)$ i detalje na svim nivoima od poslednjeg do prvog $b_2 = 2(-2)$, $b_1 = \sqrt{2}\binom{2}{12}$. Za definisanje matrica C i D koristiti boks funkciju i Haarov talasić.