Teorija aproksimacija

Kompresija slike talasićima

Student:
Dušan Bogojević
017/2018

Profesor:
Zorica Stanimirović
Asistent:
Kristina Kostić

07. januar 2021.

Sadržaj

1 Talasići, osnovni pojmovi

Primene talasića za manipulisanje podacima su raznolike i nasli su upotrebu u mnogim granama nauke i industrije. Od matematike, fizike, elektrotehnike, do astronomije, geologije, i molekularne biologije, aproksimacija talasićima se pokazala kao veoma efikasan alat za obradu informacija, pogotovu tamo gde su strukture ulaznih signala komplikovane i gde je potrebna višeslojna rezolucija.

U ovom radu, predstavljena je široko korišćena primena talasića kao alat za kompresiju informacija, preciznije slika. Najpre će biti izložene teorijske osnove za rad sa dvodimenzionalnim signalom (slikom) uz pomoć talasića, odnosno njegova dekompozicija i rekonstrukcija korišćenjem diskretne transformacije talasićima (engl. Discrete Wavelet Transform DWT), implementirane korišćenjem piramidalnog algoritma. Zatim će biti opisan algoritam korišćen za kompresiju i izneti rezultati i zapažanja.

1.1 Multirezolucijska analiza u 1D

Osnovna prednost talasića u obradi signala jeste njihova multirezolucijska priroda. Ona nam omogućava da različite komponente funkcije koju proučavamo predstavimo na različitim skalama, odnosno u različitoj rezoluciji. Multirezolucijska analiza je rastavljanje Hilbertovog prostora $L_2(\mathbb{R})$ na niz zatvorenih rezolucijskih potprostora $\{\mathcal{V}^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ takvih da je:

$$
\begin{aligned}
&\cdots \subset \mathcal{V}^2 \subset \mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^0 \subset \mathcal{V}^{-1} \subset \cdots \\
&\cap_{j\in\mathbb{Z}}\, \mathcal{V}^j = \emptyset, \quad \overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} \mathcal{V}^j} = L_2(\mathbb{R}) \\
&\forall f \in L_2(\mathbb{R}) \text{ i } \forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in \mathcal{V}^j \iff f(2x) \in \mathcal{V}^{j-1} \\
&\forall f \in L_2(\mathbb{R}) \text{ i } \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in \mathcal{V}^j \iff f(x-k) \in \mathcal{V}^j \\
&\exists \varphi \in \mathcal{V}^0 \text{ tako da je } \{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ Riesz-ov bazis prostora } \mathcal{V}^0
\end{aligned}
$$

Osim što postoji funkcija čiji skup tranlsacija čini Riesz-ov bazis prostora $\mathcal{V}^0$, φ se može izabrati tako da je pomenut bazis ortonormiran, što će se ispostaviti kao veoma korisno svojstvo. Iz prethodnih svojstava vidi se da svaki aproksimacioni prostor $\mathcal{V}^j$ predstavlja skaliranu verziju prostora $\mathcal{V}^0$, sa faktorom skaliranja 2^{-j}. Funkcija φ se naziva funkcija skaliranja. Njenom modifikacijom dobija se familija funkcija $\varphi_k^j(x) = 2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x - k), \; j,k \in \mathbb{Z}$. Njene podfamilije, dobijene fiksiranjem argumenta j, $\{\varphi_k^j(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ će predstavljati Riesz-ov bazis prostora $\mathcal{V}^j$.

Projektovanjem funkcije iz aproksimacionog prostora $\mathcal{V}^j$ u prostor $\mathcal{V}^{j+1}$, dolazi do gubljenja detalja kao posledica smanjenja rezolucije. Izgubljeni detalji će se nalaziti u ortogonalnom komplementu prostora $\mathcal{V}^{j+1}$ u odnosu na prostor $\mathcal{V}^j$, koji se obeležava sa $\mathcal{W}^{j+1}$, i naziva prostor talasića.

Rekurzivnom primenom $\mathcal{V}^{j+1} \oplus \mathcal{W}^{j+1} = \mathcal{V}^j$, se dolazi do:

$$\mathcal{V}^J \oplus \mathcal{W}^J \oplus \mathcal{W}^{J-1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}^j = \mathcal{V}^j, \quad J > j$$

Prostori talasića su međusobno ortogonalni, i važi:

$$L_2(\mathbb{R}) = \lim_{j \to -\infty} \mathcal{V}^j = \mathcal{V}^J + \sum_{k=-\infty}^{J} \mathcal{W}^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}^k$$

Kao kod prostora aproksimacija, prostor talasića $\mathcal{W}^j$ generisan je familijom funkcija $\{\psi_k^j(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ nastalih skaliranjem i translacijom funkcije $\psi(x)$, koja se naziva "majka talas", i čiji skup translacija generiše $\mathcal{W}^0$. Postoji više načina da se konstruiše multirezolucijska analiza. Jedan od njih jeste odredjivanjem funkcije $\varphi(x)$, koja se najčešće traži kao rešenje dilatacione jednačine:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k) \sqrt{2} \varphi(2x - k)$$

Ova jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, pa se dodatno nameće uslov:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$$

koji će povlačiti:

$$\sum_k c(k) = \sqrt{2}$$

Na sličan način se odredjuje i funkcija $\psi(x)$, kao rešenje jednačine talasića:

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \sqrt{2} \psi(2x - k)$$

Rešenja ovih jednačina očigledno zavise od izbora koeficjenata $c(k)$ i $d(k)$. Dobrim izborom ovih koeficijenata mogu se odrediti funkcije sa "lepim"svojstvima. Veliki doprinos teoriji talasića je doprinelo upravo uočavanje veze izmedju koeficijenata $c(k)$ i filtra koji se koriste u obradi signala. Ispostaviće se da su za ortonormiranost bazisa prostora aproksimacija i talasića i njihovu medjusobnu ortogonalnost potrebni i dovoljni sledeći uslovi:

$$\sum_k c(k) c(k - 2m) = \delta(m),$$
$$\sum_k d(k) d(k - 2m) = \delta(m),$$
$$\sum_k c(k) d(k - 2m) = 0,$$

što je moguće samo ako je:

$$d(k) = (-1)^k C(N-1-k),\ k = 0, 1, \cdots, N-1 \text{ , N parno}$$

1.2 Multirezolucijska analiza u 2D

Za razliku od jednodimenzionog slučaja gde pri dekompoziciji rastavljamo $\mathcal{V}^j$ na $\mathcal{V}^{j+1}$ i $\mathcal{W}^{j+1}$, i gde nam je bazis prostora aproksimacija sačinjen od funkcija jedne promenljive $\varphi_r^j(x)$, u slučaju dve dimenzije biće nam potrebne funkcije dve promenljive. Njih ćemo definisati sa:

$$\varphi_{r,l}^j(x,y) = \varphi_r^j(x) \cdot \varphi_l^j(y) = \varphi^j(x-r) \cdot \varphi^j(y-l),\ r, l \in \mathbb{Z}$$

dok ćemo za skalarni proizvod koristiti

$$[f,g] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot g(x,y)\ dxdy$$

Uvodimo novu notacjiu kako bi naglasili da se radi o novom skalarnom proizvodu.Prostor aproksimacija koji razapinje bazis $\{\varphi_{r,l}^j(x,y)\}_{r,l\in\mathbb{Z}}$ ćemo označiti sa $A^j = \mathcal{V}^j \cdot \mathcal{V}^j = (\mathcal{V}^{j+1} \oplus W^{j+1}) \cdot (\mathcal{V}^{j+1} \oplus W^{j+1})$, gde se podrazumeva

$$X \cdot Y = \{f(x) \cdot g(y) | f \in X, g \in Y\}.$$

Može se naslutiti da će dvodimenzionalna dekompozicija podrazumevati projektovanje aproksimacije f^j u četiri međusobno ortogonalna potprostora: $A^{j+1} = (\mathcal{V}^{j+1} \cdot \mathcal{V}^{j+1})$, $H^{j+1} = (\mathcal{V}^{j+1} \cdot \mathcal{W}^{j+1})$, $V^{j+1} = (\mathcal{W}^{j+1} \cdot \mathcal{V}^{j+1})$ i $K^{j+1} = (\mathcal{W}^{j+1} \cdot \mathcal{W}^{j+1})$, koje ćemo u buduće zvati prostor aproksimacije, horizontalnih, vertikalnih i kosih detalja. Sada ćemo pokazati da zaista važi: $A^{j+1} \oplus H^{j+1} \oplus V^{j+1} \oplus K^{j+1} = A^j$.

Lema 1.1. *Za prethodno definisane prostore važi:*

$$A^j \subseteq A^{j+1} + H^{j+1} + V^{j+1} + K^{j+1}.$$

Dokaz. Kako je $\mathcal{V}^j = \mathcal{V}^{j+1} \oplus \mathcal{W}^{j+1}$, postoje $f_{1,2}$ i $g_{1,2}$ takve da:

$$\varphi_{k,l}^j(x,y) = \varphi_k^j(x) \cdot \varphi_l^j(y) = (f_1^{j+1} + g_1^{j+1}) \cdot (f_2^{j+1} + g_2^{j+1}) =$$

$$f_1^{j+1} f_2^{j+1} + f_1^{j+1} g_2^{j+1} + g_1^{j+1} f_2^{j+1} + g_1^{j+1} g_2^{j+1}$$

pa su sabirci poslednje sume upravo redom iz prostora:A^{j+1}, H^{j+1}, V^{j+1} i K^{j+1}. Kako je $A^j = \mathcal{L}\{\varphi_{r,l}^j\}$, ovaj smer inkluzije je pokazan. Dokaz drugog smera sledi iz činjenice da se φ^{j+1} i ψ^{j+1} mogu izraziti preko φ^j. Nije ga teško pokazati pa će zbog sličnosti biti izostavljen.

Lema 1.2. *Prostori A^j, H^j, V^j i K^j su međusobno ortogonalni.*

Dokaz. Ovde je kao primer navedena ortogonalnost prostora A^j i H^j, jer se ostali slučajevi dokazuju analogno. Kao dokaz ortogonalnosti ovih prostora, slično kao pre, dovoljno je pokazati ortogonalnost njihovih bazisa.

$$A^j = \mathcal{L}\{\varphi_r^j(x) \cdot \varphi_l^j(y) : k, l \in \mathbb{Z}\}, \quad H^j = \mathcal{L}\{\varphi_p^j(x) \cdot \psi_q^j(y) : p, q \in \mathbb{Z}\}$$

$$(\forall r, l, p, q \in \mathbb{Z}) \quad \left[\varphi_r^j(x)\varphi_l^j(y), \varphi_p^j(x)\psi_q^j(y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l^j \psi_q^j \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r^j \varphi_p^j dx\right) dy =$$

Primenom skalarnog proizvoda na bazne funkcije dobija se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_l^j(y)\psi_q^j(y)dy \ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r^j(x)\varphi_p^j(x)dx = 0$$

Gde poslednja jednakost sledi kao posledica ortogonalnosti funkcija φ^j i ψ^j u 1D.

Uočimo da se pored svih dosad navedenih svojstava, prenetih iz jednodimenzionog slučaja, takođe može preneti i ortonormiranost bazisa prostora aproksimacije i detalja, pod uslovom da su ortonormirani u 1D. Naime, ako posmatramo na primer $V^j = \mathcal{L}\{\psi_{r,l}^j(x) \cdot \varphi_{p,q}^j(y) : r, l, p, q \in \mathbb{Z}\}$, vidimo da:

$$\left[\psi_{r_1}^j(x) \cdot \varphi_{l_1}^j(y)\, , \psi_{r_2}^j(x) \cdot \varphi_{l_2}^j(y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{l_1}^j(y)\varphi_{l_2}^j(y)dy \ \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{r_1}^j(x)\psi_{r_2}^j(x)dx$$

$$= \delta_{l_1,l_2} \cdot \delta_{r_1,r_2} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & l_1 = l_2,\ r_1 = r_2 \\ 0, & \text{inače} \end{array} \right\}$$

Naravno, slično se dobija i posmatranjem ostalih prostora.

2 Piramidalni algoritam

Piramidalni algoritam služi za realizaciju diskretne transformacije talasićima čija je prednost već pomenuta multirezolucijska priroda. Ona nam omogućava da početnu aproksimaciju signala, izraženu u prostoru $\mathcal{V}^j$, $j \in \mathbb{Z}$ predstavimo kao direktnu sumu njenih projekcija na prostor $\mathcal{V}^J$, $J > j$, i prostore talasića: $\mathcal{W}^J, \mathcal{W}^{J-1}, ...\mathcal{W}^{j-1}$. U radu sa slikama ćemo videti da se na ovaj način signal rastavlja na aproksimaciju višeg nivoa (manje vremenske rezolucije), koja u sebi čuva smisao slike, i na detalje sa različitih rezolucijskih nivoa.

2.1 Piramidalni algoritam za 1D signale

Piramidalni algoritam se sastoji iz dekompozicije i rekonstrukcije signala. Oba se realizuju rekurzivno, pa je dovoljno posmatrati njegovu realizaciju na dva susedna rezolucijska nivoa, $\mathcal{V}^j$ i $\mathcal{V}^{j+1}$.

Neka je: $f^j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^j \varphi_k^j(x)$, posmatrana aproksimacija iz prostora $\mathcal{V}^j$. Dekompozicija podrazumeva pronalaženje koeficijenata a_k^{j+1} i b_k^{j+1}, takvih da je

$$f^j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{j+1} \varphi_k^{j+1}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{j+1} \psi_k^{j+1}(x)$$

Izražavanjem $\varphi_k^{j+1}(x)$ i $\psi_k^{j+1}(x)$ preko:

$$\begin{aligned} \varphi_k^{j+1}(x) &= \varphi^{j+1}(x-k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n-2k)\varphi_n^j(x) \\ \psi_k^{j+1}(x) &= \psi^{j+1}(x-k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d(n-2k)\varphi_n^j(x) \end{aligned} \tag{1}$$

i potom primenom skalarnog proizvoda, dobija se:

$$(f^j, \varphi_k^{j+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f^j(x)\varphi^{j+1}(x-k)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n-2k) \int_{-\infty}^{\infty} f^j(x)\varphi_k^j(x) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n-2k)(f^j, \varphi_n^j)$$

i slično:

$$(f^j, \psi_k^{j+1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d(n-2k)(f^j, \varphi_n^j)$$

Sa pretpostavkom da su bazisi ortonormirani, u odnosu na ovako definisan skalarni proizvod, važi: $(f^j, \varphi_k^{j+1}) = a_k^{j+1}$, i $(f^j, \varphi_k^j) = a_k^j$, iz čega sledi tražena veza:

$$\begin{aligned} a_k^{j+1} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n-2k)a_n^j \\ b_k^{j+1} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} d(n-2k)a_n^j \end{aligned} \tag{2}$$

Do formula rekonstrukcije se dolazi na sledeći način. Kada (1) zamenimo u

$$f^j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{j+1} \varphi_k^{j+1}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{j+1} \psi_k^{j+1}(x)$$

dobijamo:

$$f^j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^{j+1} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n-2k)\varphi_n^j(x) \right) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{j+1} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} d(n-2k)\varphi_n^j(x) \right)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (c(n-2k)a_k^{j+1} + d(n-2k)b_k^{j+1}) \right) \varphi_n^j(x)$$

Još jednom, pod uslovom da su bazisi ortonormirani, računajući skalarni proizvod (f^j, φ_m^j) nalazimo potrebnu vezu:

$$a_m^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (c(m-2k)a_k^{j+1} + d(m-2k)b_k^{j+1}) \tag{3}$$

2.2 Mallatov algoritam

Brza transformacija talasićima (engl. Fast Wavelet Transformation, FWT) se realizuje uz pomoć Mallatovog[1] algoritma, koji predstavlja matričnu verziju izvedenog piramidalnog algoritma. Osim što je praktičniji za zapis, ovaj način računanja koeficijenata je veoma brz, pa je za signal dužine n potrebno reda $O(n)$ računskih operacija. Ovo je još jedna prednost FWT-a u odnosu na FFT čija je složenost reda $O(n \, log \, n)$.
Nadalje će se podrazumevati sledeće pretpostavke:

- Funkcije φ i ψ imaju kompaktne nosače, odnosno broj nenula koeficijenata $c(k)$ je konačan, i $c(k) = 0$, $k < 0$.
- Polazna aproksimacija će biti označena sa $f^0 \in \mathcal{V}^0$. Ona će biti određena vektorom $a^0 = (a_0^0, a_1^0, ..., a_n^0)$, gde je $n = 2^s$, za $s \in \mathbb{N}$.

Prirodno je tražiti $a_k^0 = 0$, $k < 0$ kako bi funkcija "počinjala" u $x = 0$. Naravno, u praksi svaki signal ima ograničeno trajanje, pa je vektor a^0 konačan. Ako je vektor a^0 dužine $n = 2t - 1$, nakon dekompozicje će biti potrebno po t koeficijenata a^1 i b^1 kako bi se on rekonstruisao. To znači da bi za broj $2^{s-1} < n < 2^s$ nakon cele dekompozicije bilo potrebno 2^s koeficijenata, pa je praktičnije odmah uzeti $n = 2^s$.

Neka su matrice filtra C i D definisane sa:

$$C = \begin{bmatrix} c(0) & 0 & 0 & \cdots \\ c(1) & c(0) & 0 & \cdots \\ c(2) & c(1) & c(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d(0) & 0 & 0 & \cdots \\ d(1) & d(0) & 0 & \cdots \\ d(2) & d(1) & d(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Za matrično predstavljanje (2) potrebne su matrice A i B za koje važi:

$$A_{i,j} = c(j - 2i) \quad \text{, odnosno} \quad B_{i,j} = d(j - 2i).$$

Nakon uvođenja oznaka: $(\downarrow 2)M$ i $(\uparrow 2)M$ za matricu koja se dobija od matrice M izbacivanjem svake druge vrste, odnosno kolone, tražene matrice A i B se mogu zapisati kao:

$$A = (\downarrow 2)C^T \qquad B = (\downarrow 2)D^T.$$

[1] Stéphane Mallat, francuski matematičar

Odavde se (2) može kompaktno izraziti sa:

$$\begin{pmatrix} a^{j+1} \\ b^{j+1} \end{pmatrix} = (\downarrow 2)(C\ D)^T a^j. \tag{4}$$

Na sličan način se (3) može izraziti sa:

$$a^j = (\uparrow 2)C\, a^{j+1} + (\uparrow 2)D\, b^{j+1} \qquad .$$

ili kompaktnije sa:

$$a^j = (\uparrow 2)(C\ D) \begin{pmatrix} a^{j+1} \\ b^{j+1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Do istog se dolazi iz činjenice da su C i D ortogonalne, iz čega sledi i:

$$\left((\downarrow 2)(C\ D)^T\right)^{-1} = (\uparrow 2)(C\ D)$$

2.3 Piramidalni algoritam za 2D signale

Dok su u analizi 1D signala informacije o aproksimaciji čuvane u obliku vektora njenih koeficijenata: $a^j = (a_0^j, a_1^j, ...a_n^j)$, gde je a_r^j bio koeficijent uz $\varphi_r^j(x)$, kod 2D signala će u tu svrhu biti korišćene matrice, pa će se sa $a_{r,l}^j$, elementom iz r-te vrste i l-te kolone matrice A^j biti označen koeficijent koji stoji uz baznu funkciju $\varphi_{r,l}^j(x,y)$. Analogno važi za funkcije iz prostora detalja. Kao i kod piramidalnog algoritma za 1D signale, i ovde se posmatraju dva smera transformacije, odnosno dekompozicija signala i njegova rekonstrukcija.

Neka je naša polazna aproksimacija:

$$f_{A^0}(x,y) = \sum_{r,l\in\mathbb{Z}} a_{r,l}^0\, \varphi_{r,l}^0(x,y)$$

Ona je određena matricom A^0. Cilj dekompozicije jeste odrediti matrice A^1, H^1, V^1 i K^1, takve da za funkcije f_{A^1}, f_{H^1}, f_{V^1}, f_{K^1}, koje one određuju, u odgovarajućim prostorima detalja, važi:

$$f_{A^1} + f_{H^1} + f_{V^1} + f_{K^1} = f_{A^0}$$

Kao primer navodi se dolaženje do koeficijenata iz matrice H^1. Do ostalih se dolazi na veoma sličan način.

$$h_{r,l}^1 = \left[f_{A^0}(x,y), \varphi_r^1(x)\psi_l^1(y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{A^0}(x,y)\cdot\varphi_r^1(x)\psi_l^1(y)\,dxdy$$

što kada iskoristimo (1), pod uslovom da su baze ortonormirane postaje:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{A^0}(x,y)\cdot\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n-2r)\varphi_n^0(x)\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} d(m-2l)\varphi_m^0(y)\right) dxdy =$$

$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c(n-2r)d(m-2l)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{A^0}(x,y)\cdot\varphi_{n,m}^0(x,y)\; dxdy =$$
$$\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c(n-2r)d(m-2l)\left[f_{A^0},\varphi_{n,m}^0\right] = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c(n-2r)d(m-2l)a_{n,m}^0$$

Dakle, zaključujemo da su formule prelaska sledeće:

$$\begin{aligned}
a_{r,l}^1 &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c(n-2r)c(m-2l)a_{n,m}^0\\
h_{r,l}^1 &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} c(n-2r)d(m-2l)a_{n,m}^0\\
v_{r,l}^1 &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} d(n-2r)c(m-2l)a_{n,m}^0\\
k_{r,l}^1 &= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} d(n-2r)d(m-2l)a_{n,m}^0
\end{aligned} \tag{6}$$

Naravno, dalja dekompozicija se odvija rekurzivno.

Ni do formula rekonstrukcije nije teško doći nakon što se setimo da je $A^1 \oplus H^1 \oplus V^1 \oplus D^1 = A^0$. Odavde vidimo da se f_{A^0} može predstaviti na sledeći način:

$$f_{A^0} = \sum_{r,l} a_{k,l}^1\,\varphi_r^1(x)\varphi_l^1(y) + \sum_{r,l} h_{r,l}^1\,\varphi_r^1(x)\psi_l^1(y) + \sum_{r,l} v_{r,l}^1\,\psi_r^1(x)\varphi_l^1(y) + \sum_{r,l} k_{r,l}^1\,\psi_r^1(x)\psi_l^1(y)$$

Kada iskoristimo (1), dobijamo:

$$f_{A^0} = \sum_{r,l} a_{r,l}^1\left(\sum_{n,m} c(n-2r)c(m-2l)\varphi_{n,m}^0\right) + \sum_{r,l} h_{r,l}^1\left(\sum_{n,m} c(n-2r)d(m-2l)\varphi_{n,m}^0\right) +$$
$$\sum_{r,l} v_{r,l}^1\left(\sum_{n,m} d(n-2r)c(m-2l)\varphi_{n,m}^0\right) + \sum_{r,l} k_{r,l}^1\left(\sum_{n,m} d(n-2r)d(m-2l)\varphi_{n,m}^0\right)$$

Kako bismo izdoviji koeficijent uz $\varphi_{s,t}^0$, primenjujemo skalarni proizvod $[f_{A^0},\varphi_{s,t}^0]$ i stižemo do tražene veze:

$$\begin{aligned}
a_{s,t}^0 = \sum_{r,l} \big(&c(s-2r)c(t-2l)a_{r,l}^1 + c(s-2r)d(t-2l)h_{r,l}^1+\\
&d(s-2r)c(t-2l)v_{r,l}^1 + d(s-2r)d(t-2l)k_{r,l}^1\big)
\end{aligned} \tag{7}$$

2.4 Matrični zapis piramidalnog algoritma za 2D signale

Kako bi dobijene formule dekompozicije i rekonstrukcije 2D signala učinili lakšim za primenu, važno je da ih kao u 1D slučaju izrazimo korišćenjem matrica. U ovu svrhu, ponovo će se koristiti matrice C i D definisane u potpoglavlju 2.2.

U slučaju dekompozicije, može se primetiti da se prva jednačina iz (6) može napisati i kao:

$$a_{k,l}^1 = \begin{pmatrix} c(0-2k) & c(1-2k) & \cdots \end{pmatrix} A^0 \begin{pmatrix} c(0-2l) \\ c(1-2l) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Kako je vektor vrste iz poslednje jednačine u stvari k-ta vrsta matrice $(\downarrow 2)C^T$, a vektor kolone l-ta kolona matrice $(\uparrow 2)C$, zaključujemo da se A^1 može prikazati kao:

$$A^1 = (\downarrow 2)C^T \cdot A^0 \cdot (\uparrow 2)C$$

Sličnim postupkom dolazimo i do:

$$\begin{aligned} H^1 &= (\downarrow 2)C^T \cdot A^0 \cdot (\uparrow 2)D \\ V^1 &= (\downarrow 2)D^T \cdot A^0 \cdot (\uparrow 2)C \\ K^1 &= (\downarrow 2)C^T \cdot A^0 \cdot (\uparrow 2)D \end{aligned}$$

Prethodne četiri jednačine se mogu objediniti u:

$$\begin{pmatrix} A^1 & H^1 \\ V^1 & K1 \end{pmatrix} = (\downarrow 2)(C\ D)^T \cdot A^0 \cdot (\uparrow 2)(C\ D) \tag{8}$$

Da bismo došli do matričnog oblika rekonstrukcije, iskoristićemo (8) i činjenicu da je matrica $(\downarrow 2)(C\ D)^T = W$ ortogonalna, odnosno da je:

$$W^{-1} = W^T = (\uparrow 2)(C\ D)$$

Odavde sledi:

$$A^0 = (\uparrow 2)(C\ D) \cdot \begin{pmatrix} A^1 & H^1 \\ V^1 & K1 \end{pmatrix} \cdot (\downarrow 2)(C\ D)^T \tag{9}$$

3 Primena piramidalnog algoritma na kompresiju slike

Primena prethodno opisanog će biti realizovana u MATLAB-u na sledeći način:

- Algoritam će biti implementiran unutar funkcije Talasici.m koja će za ulazne argumente uzimati datoteku sa slikom, koeficijente niskofrekvencijskog filtra $c(k)$, broj nivoa analize J i realan broj p, koji će predstavljati procenat imformacija sačuvanih prilikom kompresije detalja.
- Za prosledjenu sliku se očekuje da je veličine $2^s \times 2^2, s \in \mathbb{N}$ piksela, a za $c(k)$ da je parne dužine, kako bi bila moguća konstrukcija odgovarajućeg visokofrekvencijskog filtra d(k).
- Funkcija će prvo rekurzivno izvršiti J dekompozicija. Svaka dekompozicije se sastoji iz kreiranja potrebne matrice $W = (\downarrow 2)(C\ D)^T$, primene formule (8) i izdvajanja tako dobijenih matrica A,H,V I K. Nakon toga će se izvršiti dve rekonstrukcije, pre i posle kompresije detalja korišćenjem (9).
- Kako se kompresija ne primenjuje na matricu poslednjeg nivoa aproksimacije A^J, ukupan procenat sačuvanih informacija r će se određivati uz pomoć sledeće formule:

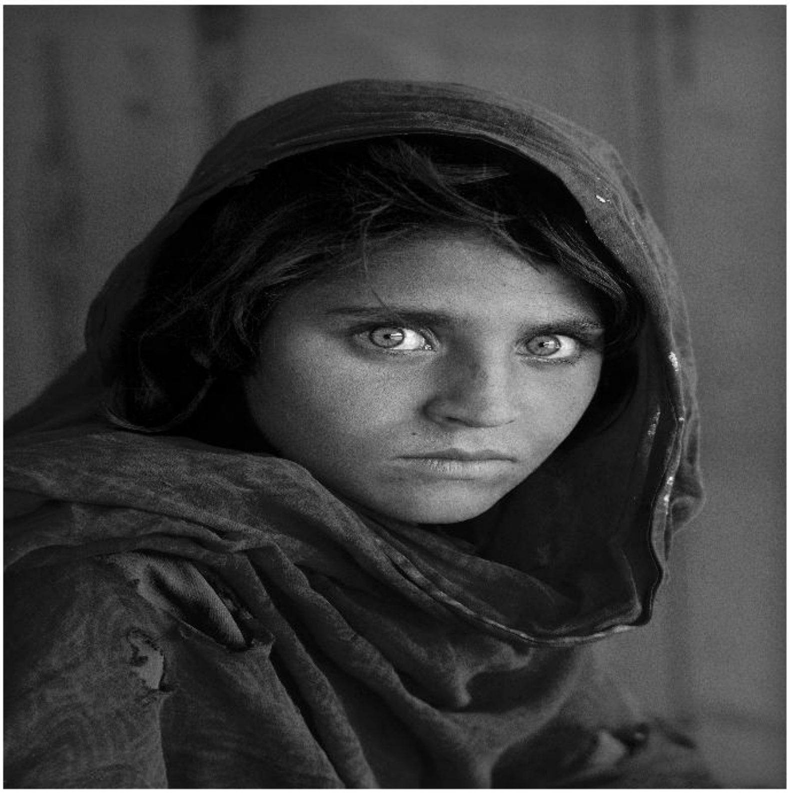
$$r = \frac{100}{2^J} + \frac{2^J - 1}{2^J} \cdot p$$

- Izlaz funkcije će podrazumevati:
  1. matricu koeficijenata dobijenu primenom FWT
  2. rekonstruisanu sliku, nastalu primenom IFWT
  3. matricu koeficijenata nakon izvršene kompresije
  4. rekonstruisanu, kompresovanu sliku

Na sledećim slikama su prikazani rezultati primene ove vrste kompresije, za $J = 3$, korišćenjem Haarovog[2]filtra i čuvanjem 1% informacije detalja. Uz pomoću prethodno navedene formule, ukupan procenat sačuvanih informacija iznosi: $\frac{100}{64} + \frac{63}{64} \cdot 1 = 2.547\%$.

[2]Alfréd Haar, mađarski matematičar

Originalna slika 1



Kompresovana slika 1

Originalna slika 2

Kompresovana slika 2

Originalna slika 3

Kompresovana slika 3

Kao što se može primetit, iako je odbačeno 97.45% informacija, slike su se dobro očuvale. Prva slika je pogotovo dobro očuvana, dok je kod druge i treće gubitak kvaliteta primetan. Kao što je za očekivati, kavalitet kompresovane slike zavisiće od njenog sadržaja. Ono što često pravi probleme jesu površine komplikovane teksture (visoke frekvencije), kao na primer dlaka. Ovaj problem se javlja zbog same prirode Haarovog talasića, koji nije pogodan za ovakve površi. Ovaj problem se može ublažiti korišćenjem drugih talasića, na primer Daubechies[3]talasića. I pored ovih nedostataka, kompresija slike talasićima je dokazala svoju superiornost kada je 2000. godine postala standard svojom implementacijom u JPEG format.

Literatura

[1] Desanka P. Radunović, Talasići (engl. Wavelets),2005. Beograd

[2] Desanka P. Radunović, Numeričke metode,2003. Beograd

[3] Tuck Meng Lui, Wavelet-based Multi-resolution Techniques for Two-dimensional Data Analysis, 1999.
URL:https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/80511/43313432-MIT.pdf;sequence=2

[3]Ingrid Daubechies, belgijska matematičarka