РЕШЕЊА ПРВОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 04.12.2021.

Група 1

1. (6 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n^2}$.

2. (6 поена) Израчунати $\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^x$.

3. (6 поена) Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y=5x-\ln(5x)$.

4. (6 поена) Одредити асимптоте функције $y=x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

5. (6 поена) Израчунати $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n=\left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n^2}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n+1}\right)^{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1+5}{3n+1}\right)^{4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{3n+1}\right)^{\frac{3n+1}{5}\cdot\frac{5}{3n+1}\cdot 4n}\\
&= \lim_{n\to\infty}e^{\frac{20n}{3n+1}}\\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{20n}{3n+1}}\\
&= e^{\frac{20}{3}}>1,
\end{aligned}$$

па ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^x &= \lim_{x\to 0} e^{\ln((\mathrm{ctg}x)^x)} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{x\ln(\mathrm{ctg}x)} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\mathrm{ctg}x)}{\frac{1}{x}}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{ctg}x)}{\frac{1}{x}}} \\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{\sin^2 x\mathrm{ctg}x}}{\frac{-1}{x^2}}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x\cdot\mathrm{ctg}x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{ctg}x}} \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Домен функције $y = 5x - \ln(5x)$ је $\mathcal{D}_y = (0, +\infty)$, а њени први извод је

$$y' = 5 - \frac{5}{5x} = 5 - \frac{1}{x} = \frac{5x-1}{x}.$$

Како је $x > 0$ на целом домену, то на знак првог извода утиче једино $5x - 1$.

		0		$\frac{1}{5}$	
$5x - 1$	//////		$-$		$+$
y'	//////		$-$		$+$

Закључијемо да функција опада на $(0, \frac{1}{5})$, расте на $(\frac{1}{5}, +\infty)$ и тачка $x = \frac{1}{5}$ је тачка локалног минимума.

4. Потребно је да прво одредимо домен дате функције. Услови су да је $x + 2 \neq 0$, тј. $x \neq -2$, као и $\frac{x+1}{x+2} \geq 0$. Када решимо систем ове две неједначине, добијамо да је домен $\mathcal{D}_y = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$.

Вертикалне асимптоте: Кандидати за вертикалну асимптоту су $x = -2$ и $x = -1$. Како функција није дефинисана на интервалу $(-2, -1)$, то не постоји десни лимес у -2 и леви у -1, па само тражимо леви лимес у -2 и десни у -1.

$$\lim_{x\to -2-} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 0,$$

па права $x = -2$ јесте једина вертикална асимптота дате функције.

Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to \infty} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.

Косе асимптоте:

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \\
&= 1, \\
n &= \lim_{x\to\infty} \left(x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1\cdot x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L.P.}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}(x+2)^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} \cdot \frac{-x^2}{2(x+2)^2} \\
&= 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Дакле, права $y = x - \frac{1}{2}$ је коса асимптота дате функције.

5.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2+2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\frac{(x+2)^2}{2}+1\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{x+2}{\sqrt{2}} \\ \mathrm{d}x = \sqrt{2}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg} t + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}
$$

Група 2

1. **(6 поена)** Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n^2}$.

2. **(6 поена)** Израчунати $\lim_{x\to 0}(\mathrm{tg}x)^x$.

3. **(6 поена)** Испитати монотоност и наћи екстремне вредности функције $y = 7x - \ln(6x)$.

4. **(6 поена)** Одредити асимптоте функције $y = x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}}$.

5. **(6 поена)** Израчунати $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+14}$.

РЕШЕЊА

1. Означимо $a_n = \left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12n+4}{12n+2}\right)^{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{12n+2+2}{12n+2}\right)^{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{12n+2}\right)^{\frac{12n+2}{2}\cdot\frac{2}{12n+2}\cdot 2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{4n}{12n+2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{12n+2}} \\
&= e^{\frac{1}{3}} > 1,
\end{aligned}$$

па ред дивергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\mathrm{tg}x)^x &= \lim_{x\to 0} e^{\ln((\mathrm{tg}x)^x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{x\ln(\mathrm{tg}x)}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\frac{1}{x}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{tg}x)}{\frac{1}{x}}}\\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x\,\mathrm{tg}x}}{\frac{-1}{x^2}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{\mathrm{tg}x}}\\
&\overset{L.P.}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{\frac{1}{\cos^2 x}}}\\
&= e^0\\
&= 1
\end{aligned}
$$

3. Домен функције $y = 7x - \ln(6x)$ је $\mathcal{D}_y = (0, +\infty)$, а њени први извод је

$$y' = 7 - \frac{6}{6x} = 7 - \frac{1}{x} = \frac{7x-1}{x}.$$

Како је $x > 0$ на целом домену, то на знак првог извода утиче једино $7x - 1$.

		0		$\frac{1}{7}$	
$7x - 1$	//////		$-$		$+$
y'	//////		$-$		$+$

Закључијемо да функција опада на $(0, \frac{1}{7})$, расте на $(\frac{1}{7}, +\infty)$ и тачка $x = \frac{1}{7}$ је тачка локалног минимума.

4. Потребно је да прво одредимо домен дате функције. Услови су да је $x + 7 \neq 0$, тј. $x \neq -7$, као и $\frac{x+4}{x+7} \geq 0$. Када решимо систем ове две неједначине, добијамо да је домен $\mathcal{D}_y = (-\infty, -7) \cup [-4, +\infty)$.

Вертикалне асимптоте: Кандидати за вертикалну асимптоту су $x = -7$ и $x = -4$. Како функција није дефинисана на интервалу $(-7, -4)$, то не постоји десни лимес у -7 и леви у -4, па само тражимо леви лимес у -7 и десни у -4.

$$\lim_{x\to -7-} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -4+} x\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 0,$$

па права $x = -7$ јесте једина вертикална асимптота дате функције.

Хоризонталне асимптоте:

$$\lim_{x\to \infty} x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} = \infty,$$

па функција нема хоризонталних асимптота.
Косе асимптоте:

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}}}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+4}{x+7}} \\
&= 1, \\
n &= \lim_{x\to\infty} \left(x\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} - 1\cdot x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+4}{x+7}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\underset{\frac{0}{0}}{\overset{L.P.}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{2\sqrt{\frac{x+4}{x+7}}(x+7)^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+7}{x+4}} \cdot \frac{-3x^2}{2(x+7)^2} \\
&= 1 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Дакле, права $y = x - \frac{3}{2}$ је коса асимптота дате функције.

5.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+14} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2+5} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{5\left(\frac{(x+3)^2}{5}+1\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{5\left(\left(\frac{x+3}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)} \\
&= \begin{bmatrix} t = \frac{x+3}{\sqrt{5}} \\ \mathrm{d}x = \sqrt{5}\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}t + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{5}}\right) + c
\end{aligned}
$$