

Комбинаторика

- **Пермутација** (без понављања) скупа A који има n елемената је сваки низ у коме се тачно по једанпут појављују сви елементи скупа A . Број пермутација n -точланог скупа је $n! = n(n-1) \cdots 1$

Пример: Колико се непарних петоцифрених бројева чије су све цифре различите може формирати од цифара $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

- Нека је дат скуп $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Сваки низ дужине $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ у коме се елемент a_1 појављује k_1 пута, \dots , a_m k_m пута назива се **пермутација са понављањем** скупа A типа (k_1, \dots, k_m) . Број оваквих пермутација је $\frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_m!}$.

Пример: Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова из речи - ИНФОРМАТИКА?

- **Варијација без понављања** k -те класе скупа A који има n елемената ($n \geq k$) је сваки низ од k међусобно различитих елемената тог скупа. Број варијација k -те класе скупа од n елемената је $n(n-1) \cdots (n-k+1)$.

Пример: На такмичењу у уметничком клизању учествује 20 жена. На колико начина се могу поделити медаље?

- **Варијација са понављањем** k -те класе скупа A од n елемената је сваки низ од k елемената скупа A при чему се елементи могу понављати. Број варијација са понављањем је n^k .

Пример: Гост у хотелу сваког дана бира један од 3 понуђена доручка. Колико има различитих избора ако у хотелу остаје 5 дана?

- **Комбинација** k -те класе скупа од n елемената ($n \geq k$) је сваки k -точлани подскуп тог скупа. Број комбинације је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Пример: На колико начина можемо изабрати 3 броја од 1 до 10 тако да они буду у растућем поретку?

- Ако се из n -точланог скупа A бира један по један, са враћањем, k елемената и ако није битан редослед већ само који елементи и колико пута су изабрани, онда се резултат избора назива **комбинација са понављањем** k -те класе скупа од n елемената. Број комбинација са понављањем је $\binom{n+k-1}{k}$.

Пример: На колико начина се може 8 идентичних куглица распоредити на 3 кутије тако да у свакој кутији буде бар једна куглица?

- Њутнова биномна формула

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Пример: Колико има подскупова скупа од $\{1, \dots, n\}$?

- Принцип укључења и искључења

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i A_j A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \dots A_n|$$

Примери и задаци:

1. Пет особа треба распоредити на 5 места која чине један ред, тако да особа A не седи на местима која су на крајевима реда, а особа B не седи на месту које је тачно у средини. На колико начина је то могуће урадити?
2. На колико начина се могу поређати у низ бројеви $1, 2, \dots, 3n$ тако да сваки број стоји на месту чији редни број при дељењу са 3 даје исти остатак као и сам тај број?
3. Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова из речи МАТЕМАТИКА тако да ААА није део речи?
4. Ако је $n \geq k + 2$, колико има пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ у којима је између бројева 1 и 2 тачно k других бројева?
5. Претпоставимо да од 20 људи треба изабрати 4 човека и распоредити их на 4 радна места M_1, M_2, M_3, M_4 . На колико начина се то може урадити?
6. Дато је по 10 белих и црних куглица које су означене бројевима $1, 2, \dots, 10$. На колико начина се може изабрати 6 куглица, тако да међу изабраним куглицама:
 - а) нема куглица означених истим бројем?
 - б) има тачно 2 пара куглица означених истим бројем?
7. На колико начина може осам људи сести на шест столица које су поређане у један ред?
8. Четири особе стоје у једном реду. На колико начина можемо да их разместимо тако да ниједна особа не остане на истом месту?
9. На колико начина се из комплета који садржи 32 различите карте (по 8 карата у 4 различите боје) може изабрати 6 карата тако да међу њима буде бар једна карта из сваке од 4 боје?
10. Шпил од 32 карте садржи 4 двојке. На колико начина се може изабрати 5 карата тако да међу њима буду тачно две двојке?
11. Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова из речи комбинаторика тако да никоја два једнака слова нису суседна?
12. Претпоставимо да хоћемо да направимо шифру која садржи само слова A, B, C тако да се свако слово јавља бар једном. Колико има таквих могућности за шифру која се састоји од 8 слова?