Вероватноћа и статистик Б
Задаци са вежби 2017/2018. (Р смер)

1. Одредити карактеристичну функцију случајне величине:
   а) X_1 која има $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ расподелу;
   б) X_2 која има биномну $\mathcal{B}(n,p)$ расподелу;
   в) X_3 која има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу и доказати да ако X_3 има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу, а X_4 има Пуасонову $\mathcal{P}(\mu)$ расподелу и независне су, онда њихов збир $X_3 + X_4$ има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ расподелу;
   г) X_5 која има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу;
   д) X_6 која има гама $\gamma(\alpha,\beta)$ расподелу;
   ђ) X_7 чија густина расподеле је $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$, а затим израчунати очекивање EX_5 и дисперзију DX_5.
2. Доказати да линеарна комбинација n независних случајних величина са нормалном расподелом има нормалну расподелу.
3. Одредити расподелу случајне величине за чију карактеристичну функцију $\varphi(t)$ важи да је:
   а) $\varphi(t) = \frac{3+\cos t}{4}$;
   б) $\varphi(t) = (1-\beta)(1+\alpha)^{-1}(1+\alpha e^{-it})(1-\beta e^{it})^{-1}, 0 < \alpha < \beta < 1$;
   в) $\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$.
4. Ако су Y и Z независне случајне величине такве да је $X = Y + Z$, где X има $\mathcal{U}(0, n+1)$, а Y има $\mathcal{U}(0,1)$ распореду, одредити расподелу случајне величине Z.
5. За низ случајних величина (X_n) важи да је $EX_n = n$, а $DX_n = 1$. Ако је c фиксиран број који припада интервалу $(0,1)$, израчунати вероватноћу да ће бесконачно много пута бити $X_n < cn$ кад $n \in N$.
6. Нека је $\Omega = \{\omega_k | k \in N\}$ скуп елементарних исхода неког експеримента и $P\{\omega_k\} = \frac{6}{\pi^2 k^2}$. За сваки природан број n нека је $X_n(\omega_k) = \begin{cases} n, k = n; \\ 0, k \neq n. \end{cases}$, а $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}$. Испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (X_n), односно низа случајних величина (Y_n).
7. За сваки природан број n случајна величина X_n има униформну $U[0, \frac{1}{n}]$ расподелу, а независна од ње случајна величина Y_n има закон расподеле $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ако је $Z_n = X_n + Y_n$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Z_n).
8. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има униформну $U[0,n]$ расподелу. Ако је $Y_n = \min\{1, X_n\}$, испитати све четири врсте конвергенције низа случајних величина (Y_n).
9. Ако низ случајних величина (X_n) конвергира у средње квадратном ка случајној величини X, онда $EX_n \to EX$ и $DX_n \to DX$ кад $n \to \infty$. Доказати.
10. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2^n} & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ расподелу и нека је $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Доказати да низ случајних величина (S_n) конвергира у расподели ка случајној величини S_∞, где S_∞ има униформну $U[-1,1]$ расподели.
11. Испитати да ли закон великих бројева важи за низ независних случајних величина чији општи члан X_n има:

а) закон расподеле $\begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

б) густину расподеле $f_{X_n}(x) = ne^{-nx}, x \geq 0$;

в) закон расподеле $\begin{pmatrix} -2^n & 2^n \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

12. Дат је низ независних случајних величина чији општи члан X_n има густину расподеле $f_{X_n}(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, x > 0$. Испитати да ли за овај низ важи закон великих бројева.

13. Нека је низ случајних величина (X_n) такав да за сваки природан број n важи да је $EX_n = 0$ и $DX_n \leq C$ где је C константа која је већа од 0, и било који члан X_n зависи само од претходног X_{n-1} и следећег X_{n+1}, а независан је од осталих чланова низа. Доказати да за овај низ важи слаби закон великих бројева.

14. Рачунар у процесу сабирања бројева врши заокруживање на најближи цео број. Претпоставља се да су грешке настале заокруживањем независне и униформно расподељене на сегменту $[-0.5, 0.5]$.

    а) Ако се сабира 1500 бројева , израчунати вероватноћу да апсолутна вредност укупне грешке буде већа од 15.

    б) Колико се највише бројева може сабрати, па да са вероватноћом 0.9 вредност укупне грешке буде мања од 10?

15. Доказати да је $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = \frac{1}{2}$.

16. Обележје X посматране популације има нормалну $\mathcal{N}(m, m)$ расподелу. За оцену непознатог параметра m предложене су две статистике: узорачка средина $\bar{X}_n$ и поправљена узорачка дисперзија $\tilde{S}_n^2$. Испитати непристрасност и постојаност тих оцена. Испитати која је оцена боља у средње квадратном смислу.

17. Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ узорка из $\mathcal{N}(m, 1), m \in (0, 1)$ расподеле. Показати да је оцена $T_n = \bar{X}_n I\{0 \leq \bar{X}_n \leq 1\} + I\{\bar{X}_n > 1\}$ ефикаснија од оцене $\bar{X}_n$ и испитати њену непристрасност.

18. Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ узорка из $\mathcal{U}[0, \theta]$ расподеле. Испитати да ли је оцена $2\bar{X}_n$ ефикаснија од оцене $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ параметра θ.

19. Обележје X има густину расподеле $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, x \in (0, 1], \theta > 0$. За оцену непознатог параметра θ предложена је статистика $V = \frac{n-1}{-\sum_{k=1}^{n} \ln X_k}$. Испитати да ли је та оцена ефикасна.

20. Нека је $X_1, X_2, \ldots, X_n$ узорка из $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподеле. Одредити константу c тако да $c \sum_{i=1}^{n} |X_i|$ буде непристрасна оцена σ и одредити њену ефикасност.

21. Наћи оцене методом момената за параметре следећих расподела:

    а) биномне $\mathcal{B}(10, p)$;

    б) униформне $\mathcal{U}[-\theta, \theta]$;

    в) гама $\gamma(\alpha, \beta)$.

22. Наћи оцену методом момената за параметре померене експоненцијалне $\mathcal{E}(\lambda, \theta)$ расподеле.

23. Нака X има фамилију расподела $p(x; \theta) = \frac{1}{1-e^{-\theta}} \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, x \in \{1, 2, ...\}, \theta > 0$. Наћи оцену методом момената за θ.

24. Обележје X има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра λ, а затим испитати непристрасност и ефикасност тако добијене оцене.

25. Обележје X има густину расподеле $f(x; \theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, x \geq 0, \theta > 0$. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра θ.

26. Нека обележје X има расподелу $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1 - \frac{2\theta}{3} \end{pmatrix}$.

а) Наћи оцену методом момената за параметар θ.

б) Наћи оцену методом максималне веродостојности за параметар θ.

в) Испитати релативну ефикасност ове две оцене. Да ли је нека од њих ефикаснија?

27. Вероватноћа да се догађај A оствари при неком експерименту је p, $0 < p < 1$. Експерименти се независно понављају или до прве појаве догађаја A или до $N-$тог покушаја, где је $N \geq 1$ и унапред познат број. Број експеримената до краја серије се бележи. На основу регистрованих n бројева, тј. на основу n серија, методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра p.

28. Методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра θ на основу узорка обима n из популације чије обележје X има:

а) униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta > 0$, расподелу;

б) униформну $\mathcal{U}[-\theta,\theta], \theta > 0$, расподелу;

в) униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta \geq 1$, расподелу;

г) униформну $\mathcal{U}[0,\theta], \theta \in N$, расподелу. У овом случају испитати непристрасност и постојаност тако добијене оцене.

29. Обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где је λ непознати параметар. На основу узорка (2.3, 3.4, 1.2, 2.5, 0.6) методом максималне веродостојности одредити оцену за вероватноћу $P\{X \geq 1\}$.

30. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_2} e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, x \geq \theta_1, \theta_1 > 0, \theta_2 > 0$. На основу узорка обима n методом максималне веродостојности одредити оцене непознатих параметара θ_1 и θ_2.

31. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ расподелу извучен је узорак обима 10, чија је узорачка средина $\bar{x}_{10} = 5.5$, а узорачка дисперзија $\bar{s}_{10}^2 = 36$.

а) Одредити 90% интервала поверења за непознати параметар m.

б) Одредити 90% једнострани (доњи, горњи) интервал поверења за непознати параметар σ^2, као и за непознати параметар σ.

32. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m,16)$ расподелу извучен је узорак обима 64, чија је узорачка средина $\bar{x}_{64} = 5$. Константовано је да је $\beta\%$ интервал поверења за m једнак (4,6). Израчунати β.

33. Обележје X има униформну $\mathcal{U}[0,1+\theta], \theta > 0$, расподелу, где је θ непознати параметар. Узет је узорак обима 200 и констатовано је да је у узорку 150 елемената који су мањи од 1.

а) Одредити 95% интервал поверења за вероватноћу p, где је $p = \{X < 1\}$.

б) На основу резултата под (а) одредити 95% интервал поверења за θ.

34. Из популације чије обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу извучен је узорак:

I_k	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	$[6,\infty)$
n_k	493	378	298	211	171	45	4

Одредити 98% интервал поверења за непознати параметар λ.

35. У кутији је 10 куглица, црвених и белих. Тестира се (нулта) хипотеза H_0(у кутији су 2 црвене и 8 белих куглица) против (алтернативне) хипотезе H_1(у кутији су више од 2 црвене куглице), тако што се из кутије извлаче две црвене куглице једна за другом, без враћања, па ако су обе извучене куглице црвене, хипотеза H_0 се одбацује, иначе се не одбацује. Израчунати праг (ниво) значајности и функцију моћи тог теста.

36. Нека је хипотеза H_0(обележје X има густину расподеле $f_0(x) = 1,\ 0 \leq x \leq 1$), а хипотеза H_1(обележје X има густину расподеле $f_0(x) = 2x,\ 0 \leq x \leq 1$). На основу узорка (X_1, X_2) треба се определити за једну од ове две хипотезе. Предложена су два теста чије су критичне области $W_1 = \{(x_1,x_2) | x_1 \geq k_1, x_2 \geq k_1\}$, односно $W_2 = \{(x_1,x_2) | x_1 + x_2 \geq k_2\}$, оба са истим прагом значајности α, где је $\alpha = \frac{1}{8}$. Испитати који је тест бољи. Подразумева се да је познато да обележје X узима вредности из сегмента $[0,1]$.

37. Нека је хипотеза $H_0(X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix})$, а хипотеза $H_1(X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.01 & 0.42 & 0.01 & 0.01 & 0.5 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix})$. Са прагом значајности 0.03, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе H_0 против хипотезе H_1 на основу узорка обима 2. Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тако одабраног теста.

38. Обележје X има нормалну $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелу, где је σ^2 непознати параметар. Са прагом значајности 0.05, одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\sigma^2)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2 = 2)$ на основу узорка обима 10.

39. Из популације чије обележје X има експоненцијалну $\mathcal{E}(\frac{1}{\lambda})$ расподелу извучен је узорак обима n.

   а) Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda \neq 1)$ $(H_1(\lambda = \lambda_1), \lambda_1 \neq 1)$.

   б) Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији за тестирање хипотезе $H_0(\lambda = 1)$ против хипотезе $H_1(\lambda \neq 1)$.

   в) Израчунати вероватноћу грешке друге врсте тог теста ако је обим узорка 100, алтернативна хипотеза $H_1(\lambda = 2)$, а праг значајности 0.05.

40. Обележје X има густину расподеле $f(x;\theta) = \frac{1-\theta}{x^\theta}, x \in (0,1)$, где је θ непознати параметар такав да је $\theta \in [0,1)$.

   а) Одредити најбољу критичну област за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 0)$ против хипотезе $H_1(\theta = \theta_0), \theta_0 > 0$, на основу узорка обима n.

   б) Испитати да ли је тај тест униформно најмоћнији тест за тестирање хипотезе $H_0(\theta = 0)$ против хипотезе $H_1(\theta > 0)$.

   в) Одредити функцију моћи $M(\theta)$ тог теста ако је обим узорка 2, а праг значајности α.

41. На основу узорка обима n тестирати хипотезу H_0(обележје X има нормалну $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу) против хипотезе H_1(обележје X има густину расподеле $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$). Одредити најбољу критичну област ако је обим узорка 100, а праг значајности 0.05.

42. Из популације чије обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподелу извучен је узорак обима 20 и констатовано је да је узорачка средина $\bar{x}_{20} = 53.5$, а узорачка дисперзија $\bar{s}^2_{20} = 45.85$. Са прагом значајности 0.05 тестирати:

   а) хипотезу $H_0(m = 60)$;

   б) хипотезу $H_0(\sigma^2 = 50)$ против хипотезе $H_1(\sigma^2 < 50)$.

43. Из две популације чија су обележја X које има нормалну $\mathcal{N}(m_1, 6^2)$ расподелу и Y које има нормалну $\mathcal{N}(m_2, 5^2)$ расподелу извучени су независни узорци обима 12 и 10 и констатовано је да су узорачке средине $\bar{x}_{12} = 178$ и $\bar{y}_{10} = 176.6$. Са прагом значајности 0.04 тестирати хипотезу $H_0(m_1 = m_2)$ против хипотезе $H_1(m_1 > m_2)$.

44. Из две популације чија су обележја X које има нормалну $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ расподелу и Y које има нормалну $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ расподелу извучени су независни узорци обима 8 и 10 и констатовано је да су узорачке дисперзије $\bar{s}^2_8(X) = 46$ и $\bar{s}^2_{10}(Y) = 50$. Са прагом значајности 0.1 тестирати хипотезу $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$.

45. Мерен је систолни (горњи) притисак на узорку од 12 мушкараца и добијено је 130, 148, 122, 140, 132, 142, 124, 150, 170, 136, 146, 140, а на узорку од 13 жена добијене су следеће вредности 140, 150, 130, 132, 150, 138, 123, 124, 160, 138, 170, 144, 108. Сматра се да систолни притисак и код мушкараца и код жена има нормалну расподелу. Ако се претпостави да су дисперзије једнаке, са прагом значајности $\alpha = 0.1$ тестирати хипотезу да су средње вредности притисака мушкараца и жена једнаке против алтернативе да се разликују.

46. Један лек помаже у лечењу неке болести у 80% случајева. Нови лек за ту болест је помогао у 250 од 300 случајева. Са прагом значајности 0.03 тестирати хипотезу да је нови лек ефикаснији од старог.

47. Из популације чије је обележје X извучен је узорак:

X_k	1	2	3	4	5	≥ 6
M_k	45	30	15	6	2	2

Са прагом значајности 0.05 тестирати хипотезу да обележје X има закон расподеле $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, k \in N$.

48. Из популације чије је обележје X извучен је узорак:

X_k	[0,1]	[1.5,2.5]	(2.5,3.5]	(3.5,5]
M_k	52	35	9	4

Са прагом значајности 0.02 тестирати хипотезу да обележје X има експоненцијалну расподелу.