РЕШЕЊА ЈУЛСКОГ РОКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 10.07.2019.

ЗАДАЦИ

1. (8 п) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$.

2. (8 п) Израчунати $\lim_{x\to 0+} x^{\sin x}$.

3. (8 п) Израчунати површину фигуре у равни ограничене правама $x = 0$, $y = 0$ и параболом $y = (x+1)^2$.

4. (8 п) Наћи опште решење диференцијалне једначине $y'' + y' - 2y = \sin 2x$.

5. (8 п) Вилењак пакује пакетиће. На располагању има 5 чоколада, 3 медведића и 4 слагалице. Из складишта одједном бира три предмета. Одредити расподелу случајне променљиве X која представља број извучених медведића, као и $E(X)$ и $D(X)$.

6. (5 п) а) Нека је $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b). Који су кандидати за тачке x у којима $f(x)$ има апсолутне екстремуме на $[a, b]$?

(5 п) б) Наћи апсолутне екстремуме функције $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ на интервалу $[-1, 1]$.

7. (10 п) Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима. Опште решење.

РЕШЕЊА

1. Означимо са $a_n = \frac{e^n}{n!}$. Како је

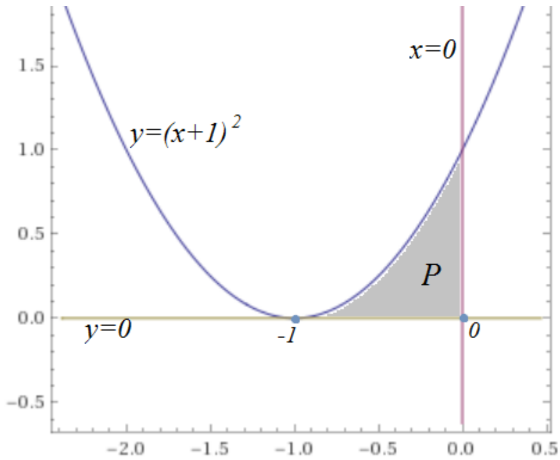
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{e^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} x^{\sin x} &= \lim_{x\to 0+} e^{\ln\left(x^{\sin x}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0+} e^{\sin x \cdot \ln x} \\
&= e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} \\
&\overset{L.P.}{=} e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{-x\cos x}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{-\cos x}} \\
&= e^{1\cdot \frac{0}{-1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Са слике



видимо да је тражена површина једнака

$$P = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}.$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + y' - 2y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ су $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, па је $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.
Партикуларно решење је облика $y_p = A \sin 2x + B \cos 2x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y_p' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x, \quad y_p'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$$

па је

$$-4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2A \cos 2x - 2B \sin 2x - 2(A \sin 2x + B \cos 2x) = \sin 2x$$

односно након сређивања

$$\sin 2x(-6A - 2B) + \cos 2x(2A - 6B) = \sin 2x$$

одакле изједначавањем коефицијената уз $\sin 2x$ и $\cos 2x$ добијамо систем две једначине са две непознате.

$$\begin{aligned} -6A - 2B &= 1 \\ 2A - 6B &= 0 \end{aligned}$$

Решење овог система је $A = -\frac{3}{20}$, $B = -\frac{1}{20}$, па добијамо да је партикуларно решење је $y_p = -\frac{3}{20} \sin 2x - \frac{1}{20} \cos 2x$.
Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - \frac{3}{20} \sin 2x - \frac{1}{20} \cos 2x, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Приметимо да је $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, па је потребно да одредимо наредне четири вероватноће.

$$P(X=0) = \binom{9}{3}\binom{12}{3} = \frac{21}{55}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{9}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{55}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{9}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{220}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$$

Заиста, нпр. кад смо рачунали $P(X = 2)$ то је вероватноћа да од 3 одабране играчке, две су медведићи, па повољних догађаја имамо $\binom{9}{1}\cdot\binom{3}{2}$ (бирамо од 9 играчака које нису медведићи једну и од три медведића бирамо два) а укупан број могућих догађаја је $\binom{12}{3}$ (од 12 играчака бирамо неке 3).
Дакле, расподела случајне величине X има следећи облик.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{21}{55} & \frac{27}{55} & \frac{27}{220} & \frac{1}{220} \end{pmatrix}$$

Математичко очекивање ове случајне променљиве је

$$E(X) = 0\cdot\frac{21}{55} + 1\cdot\frac{27}{55} + 2\cdot\frac{27}{220} + 3\cdot\frac{1}{220} = \frac{3}{4}.$$

За дисперзију биће нам потребна расподела случајне величине X^2 која изгледа овако

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{21}{55} & \frac{27}{55} & \frac{27}{220} & \frac{1}{220} \end{pmatrix},$$

па је

$$E(X^2) = 0\cdot\frac{21}{55} + 1\cdot\frac{27}{55} + 4\cdot\frac{27}{220} + 9\cdot\frac{1}{220} = \frac{45}{44}.$$

Коначно, дисперзија случајне променљиве X је

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{45}{44} - \frac{9}{16} = \frac{81}{176}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.
(б) Први извод функције f је

$$f'(x) = 6x^2 - 2x = 2x(3x-1),$$

па видимо да је први извод једнак нули за $x = 0$ и за $x = \frac{1}{3}$ па су то потенцијални екстремуми. Како је први извод позитиван на $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$, а негативан на $(0, \frac{1}{3})$, то функција f расте на $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$ и опада на $(0, \frac{1}{3})$ па закључујемо да је $x = 0$ локални максимум, а $x = \frac{1}{3}$ локални минимум. Када на то додамо крајеве интервала, добијамо да су $\left\{-1, 0, \frac{1}{3}, 1\right\}$ све тачке екстремума ове функције, па треба само да видимо који је највећи а који најмањи.

$$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -2$$
$$f(0) = 2\cdot 0^3 - 0^2 + 1 = 1$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = \frac{26}{27}$$
$$f(1) = 2\cdot 1^3 - 1^2 + 1 = 2$$

Коначно, закључујемо да је $x = -1$ апсолутни минимум, а $x = 1$ апсолутни максимум дате функције.
7. Видети у уџбенику.