

1.

а)(3 поена) Доказати идентитет: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 = (n+1)n2^{n-2}$.

б)(1.5 поена) На колико начина се може формирати ниска од 20 слова помоћу слова из скупа $\{a, b, c, d\}$ тако да се слово a појављује паран број пута?

в)(1.5 поена) На колико начина се може формирати ниска од 20 слова помоћу слова из скупа $\{a, b, c, d\}$ тако да се слова a и b појављују k пута укупно?

г)(1.5 поена) Одредити 18. пермутацију по реду у лексикографском уређењу пермутација скупа $\{A, C, K, U\}$. Образложити одговор.

2.(7.5 поена) Решити систем рекурентних једначина:

$$x_{n+1} = 6x_n + y_n, \quad x_0 = 0$$

$$y_{n+1} = 4y_n + 8x_n, \quad y_0 = 6.$$

3.(7.5 поена) Дијкстриним алгоритмом одредити дужину најкраћег пута од чвора A до свих осталих чворова и наћи најкраћи пут од чвора A до чвора D у графу датом матрицом инциденције:

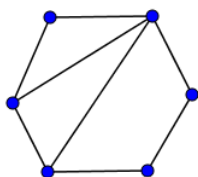
| | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | -1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| F | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| тежине | 2 | 3 | 5 | 2 | 8 | 4 | 5 | 10 | 8 | 2 | 6 | 10 | 5 | 3 |

4.

а)(2.5 поена) Нека је T стабло са n чворова. Ако је са p_k означен број чворова степена k , доказати да важи:

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \dots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

б)(3 поена) Одредити хроматски број графа на слици. Да ли граф садржи Ојлеров циклус? Да ли садржи Ојлеров пут?



в)(2 поена) Четири породице у селу су изградиле путеве од својих кућа до дома културе. Ове четири породице користе три бунара и желе да изграде и путеве од сваке куће до сваког бунара. Да ли могу то да ураде тако да се никоја два пута не секу? Образложити одговор.

1.

а)(3 поена) Доказати идентитет: $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 4^n$.

б)(1.5 поена) На колико начина се може формирати ниска од 20 слова помоћу слова из скупа $\{a, b, c, d\}$ тако да се слово a појављује непаран број пута?

в)(1.5 поена) На колико начина се може формирати ниска од 20 слова помоћу слова из скупа $\{a, b, c, d\}$ тако да се слова a и b појављују k пута укупно?

г)(1.5 поена) Одредити 22. пермутацију по реду у лексикографском уређењу пермутација скупа $\{A, E, K, Z\}$. Образложити одговор.

2.(7.5 поена) Решити систем рекурентних једначина:

$$x_{n+1} = 3x_n + y_n, \quad x_0 = 0$$

$$y_{n+1} = -7y_n - 9x_n, \quad y_0 = -8.$$

3.(7.5 поена) Дијкстриним алгоритмом одредити дужину најкраћег пута од чвора A до свих осталих чворова и наћи најкраћи пут од чвора A до чвора D у графу датом матрицом инциденције :

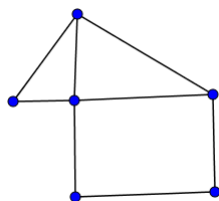
| | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| B | -1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| E | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| F | 0 | 0 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| G | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| H | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| тежине | 3 | 2 | 4 | 4 | 7 | 6 | 3 | 5 | 8 | 2 | 4 | 8 | 4 | 3 |

4.

а)(2.5 поена) Нека је T стабло са n чворова. Ако је са p_k означен број чворова степена k , доказати да важи:

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \dots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

б)(3 поена) Одредити хроматски број графа на слици. Да ли граф садржи Ојлеров циклус? Да ли садржи Ојлеров пут?



в)(2 поена) Четири школе су стазама повезане са парком. Ученици из те четири школе за велики одмор иду у три оближње пекаре. Власници пекара су се договорили да изграде стазе од сваке пекаре до сваке школе. Да ли то могу да ураде тако да се никоје две стазе не секу? Образложити одговор.