Remezov algoritam

Remezov algoritam (Evgenij Jakovlevič Remez, ruski matematičar, 1934.) predstavlja iterativni postupak za određivanje najbolje ravnomerne aproksimacije neprekidne funkcije $f(x)$ polinomom stepena n na intervalu $[a, b]$.

Korak 0 Izabrati $n+2$ različite tačke $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ sa intervala $[a, b]$. Obično se za x_i uzimaju nule Čebiševljevog polinoma.

Korak 1 Rešiti sistem linearnih jednačina

$$b_0 + b_1 x_i + \cdots + b_n x_i^n + (-1)^i E = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n+1$$

po nepoznatim $b_0, b_1, \ldots, b_n$ i E. Može se dokazati da rešenje ovog sistema uvek postoji i da je jedinstveno.

Korak 2 Formirati polinom $p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$.

Korak 3 U tačkama x_i funkcija $p(x) - f(x)$ menja znak, pa postoji bar $n+1$ nula ove funkcije koje dele $[a, b]$ na $n+2$ intervala. Tačke x_i zameniti novim tačkama $\bar{x}_i$ u kojima se dostiže lokalni maksimum funkcije $|p(x) - f(x)|$ u intervalu kome pripada x_i. Ukoliko je $p(x_i) - f(x_i) = +|E|$, treba naći lokalni maksimum funkcije $p(x) - f(x)$ u okolini x_i, a ukoliko je $p(x_i) - f(x_i) = -|E|$, naći lokalni minimum. Pošto je algoritam iterativan, ove ekstreme nije potrebno tačno izračunati, dovoljno je npr. par iteracija kvadratnog fitovanja. Tačku $\bar{x}_0$ očekujemo da je u okolini a, tačku $\bar{x}_{n+1}$ u okolini b, a preostale $\bar{x}_i$ u okolini tačaka x_i. Označimo $z_i = p(\bar{x}_i) - f(\bar{x}_i)$. Po konstrukciji je $|z_i| \geq |E|$, pa je $\min_i |z_i| \geq |E|$ prema teoremi De La Valeé Pousinna nova donja granica optimalne greške aproksimacije.

Korak 4 Ažurirati tačke x_i novodobijenim tačkama $\bar{x}_i$. Pošto je $\max_i |z_i|$ gornja granica optimalne greške (dostiže se na polinomu $p(x)$), za kriterijum zaustavljanja se može koristiti dovoljno mala razlika $\min_i |z_i|$ i $\max_i |z_i|$. Ukoliko tačnost nije zadovoljena, ići na Korak 1.

Za rešavanje sistema iz Koraka 1 nekom opštom metodom je potrebno $O(n^3)$ aritmetičkih operacija. Do polinoma $p(x)$ se može doći i sa $O(n^2)$ operacija na sledeći način. Neka je $p_1(x)$ interpolacioni polinom funkcije $f(x)$ u prvih $n+1$ tačaka, a $p_2(x)$ interpolacioni polinom sa vrednostima funkcije $(-1)^i$

$$p_1(x_i) = f(x_i), \quad p_2(x_i) = (-1)^i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Koristeći Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama, za ovo je dovoljno $O(n^2)$ operacija. Linearna kombinacija $p(x) = p_1(x) - p_2(x)E$ je isto polinom stepena n i važi

$$p(x_i) = p_1(x_i) - p_2(x_i)E = f(x_i) - (-1)^i E, \quad i = 0, \ldots, n.$$

što predstavlja jednačine iz sistema u Koraku 1 za $i \leq n$. Da bi i poslednja jednačina bila zadovoljena, mora biti

$$p(x_{n+1}) = p_1(x_{n+1}) - p_2(x_{n+1})E = f(x_{n+1}) - (-1)^{n+1} E$$

odakle je

$$E = \frac{p_1(x_{n+1}) - f(x_{n+1})}{p_2(x_{n+1}) + (-1)^n}\,.$$

Polinom $p_2(x)$ ima i-tu nulu između x_{i-1} i x_i, pa nema nula desno od x_n. Zato su $p_2(x_n)$ i $p_2(x_{n+1})$ istog znaka $(-1)^n$ pa imenilac u dobijenom razlomku ne može biti nula. Na ovaj način smo dobili rešenje sistema, a i konstruktivno dokazali da sistem ima rešenje.