Numeričke metode - MATLAB kolokvijum 21. maj 2016.

1) (7 poena) Napisati M-fajl $zad1.m$ sa funkcijom $zad1(X, f, f1)$ koja kao argumente prima podelu intervala X, funkciju f i vektor $f1$ koji sadrži vrednosti prvih izvoda funkcije f u krajnjim tačkama intervala ($f1 = [f'(X(1)), f'(X(n))]$). Na osnovu ovih podataka potrebno je odrediti splajn koji najbolje interpolira zadatu funkciju f: periodicni, prirodni ili splajn formiran kada su zadati prvi izvodi. Za formiranje splajnova dozvoljeno je korišćenje ugrađenih MATLAB funkcija. Grešku proceniti na diskretnom skupu od 1000 tačaka na intervalu $[X(1), X(n)]$ kao razliku vrednosti funkcije i vrednosti formiranog splajna. Funkcija štampa odgovarajuću poruku (pogledati test primer) i crta grafik greške za sva tri splajna.

2) (a) (7 poena) Napisati M-fajl $zad2a.m$ sa funkcijom $Q = zad2a(p, k)$ koja vraća koeficijente Q polinoma stepena k iz sistema ortogonalnih polinoma na $[-1, 1]$ u odnosu na skalarni proizvod $(f, g) = \int_{-1}^{1} p(x)f(x)g(x)dx$ sa težinskom funkcijom $p(x)$, izračunatog pomoću rekurentne formule

$$Q_0(x) = 1,$$

$$Q_{k+1} = \left(x - \frac{(xQ_k, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}\right) Q_k(x) - \frac{(Q_k, Q_k)}{(Q_{k-1}, Q_{k-1})} Q_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

gde je drugi sabirak jednak nuli za $k = 0$. Dozvoljeno je korišćenje ugradjene funkcije za računanje integrala.

(b) (7 poena) Napisati M-fajl $zad2b.m$ sa funkcijom $P = zad2b(f, p, n)$ koja određuje i kao rezultat vraća polinom P stepena n koji predstavlja srednjekvadratnu aproksimaciju funkcije f na $[-1, 1]$ u odnosu na težinsku funkciju p.

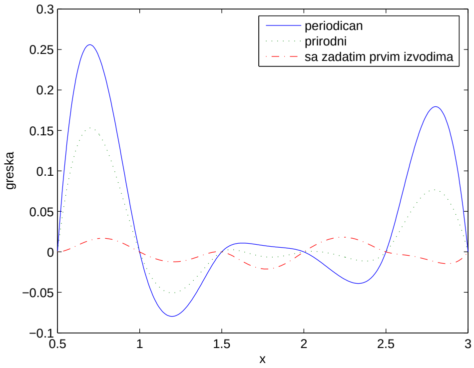
3) (9 poena) Problem nalaženja nula polinoma se može svesti na problem nalaženja sopstvenih vrednosti matrice: Moničan polinom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ ima nule koje odgovaraju sopstvenim vrednostima matrice

$$A = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napisati M-fajl $zad3.m$ sa funkcijom $nule = zad3(P, tol)$ koja sa tačnošću tol rešava zadati problem primenom QR metode za određivanje sopstvenih vrednosti. Dozvoljeno je korišćenje ugrađene MATLAB funkcije za rastavljanje matrice na proizvod unitarne i gornje-trougaone matrice.

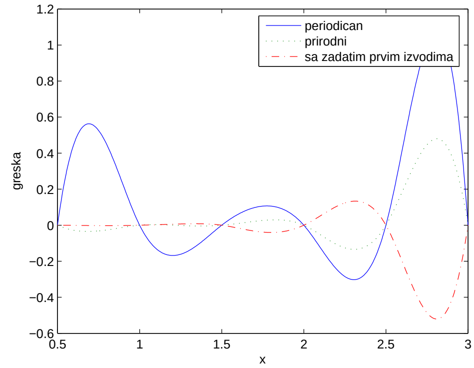
TEST PRIMER:

```
>> zad1([0.5:p/4:pi],@(x) sin(x)+sin(3*x), [1.0898,-4])
Funkciju najbolje aproksimira splajn sa zadatim prvim izvodima
Greska je
    0.0212
```




```
>> zad1([0.5:p/4:pi],@(x) exp(x).*sin(x), [2.2373,-23.1407])

Funkciju najbolje aproksimira prirodni splajn
Greska je
    0.4798
```




```
>> Q=zad2a(@(x) 1-x.^2,0)
Q =
     1
>> Q=zad2a(@(x) 1-x.^2,1)
Q =
    1.0000   -0.0000
>> Q=zad2a(@(x) 1-x.^2,2)
Q =
    1.0000   -0.0000   -0.2000

>> P=zad2b(@(x)cos(x).*exp(x),@(x)1-x.^2,2)
P =
   -0.1110    0.8494    1.0079

>>nule=zad3([2 -10.6 14.04 -5.04],1e-5)

nule =
    3.5000
    1.2000
    0.6000
```