UNIVERZITET U NOVOM SADU
TEHNOLOŠKI FAKULTET

Tatjana Došenović
Aleksandar Takači
Dušan Rakić
Mirjana Brdar

Zbirka zadataka iz Matematike I

- za studente Tehnološkog fakulteta -

Novi Sad, 2008.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
TEHNOLOŠKI FAKULTET

Tatjana Došenović　　Aleksandar Takači
Dušan Rakić　　Mirjana Brdar

Zbirka zadataka iz Matematike I

- za studente Tehnološkog fakulteta -

Novi Sad, 2008.

Naziv udžbenika: **Zbirka zadataka iz Matematike I -** za studente Tehnološkog fakulteta

Autori: Dr Tatjana Došenović, docent Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Aleksandar Takači, docent Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu
Mr Dušan Rakić, asistent Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu
Dipl. mat. Mirjana Brdar, asistent-pripravnik Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu

Recenzenti: Dr Ratomir Paunović, redovni profesor Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Mirjana Stojanović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Lektor i korektor: Aleksandra N. Kostić

Izdavač: Tehnološki fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad

Štampa: "Verzal", Petefi Šandora 63, Novi Sad

Tiraž: 500 primeraka

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Narodna biblioteka Srbije, Beograd

?????

DOŠENOVIĆ, Tatjana
Zbirka zadataka iz Matematike I / Tatjana Došenović, Aleksandar Takači, Dušan Rakić. - Novi Sad : Tehnološki fakultet, 2008 (Novi Sad : Verzal). - str. ; 24 cm

Tiraž 500. - Bibliografija: str. - Registar

ISBN 978-86-80995-67-0

1. Takači, Aleksandar
a) Matematika

Predgovor

Zbirka zadataka iz Matematike I namenjena je studentima prve godine Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu, ali i svim onim studentima koji u studijskom programu imaju predmet Matematika I. Zbirka obuhvata one oblasti klasične algebre i analize koje se izučavaju u okviru ovog kursa.

Svi autori zbirke već više godina izvode vežbe iz ovog predmeta, koji su vodili akademik prof. dr Olga Hadžić, prof. dr Vojislav Mudrinski i prof. dr Mirko Budinčević. Stečeno iskustvo poslužilo im je da sadržaj zbirke usklade sa nastavnim planom i programom predmeta Matematika I.

Zbirka sadrži 11 glava. Na početku svake glave dat je kratak teoretski uvod, potreban za razumevanje postupaka primenjenih u detaljno analiziranim primerima. Na kraju svake glave dat je veliki broj zadataka za samostalan rad, a uz njih kratka uputstva i rešenja koja pružaju korisniku mogućnost da proveri stečeno znanje. Izbor primera i zadataka od jednostavnijih ka složenijim omogućava lakše savladavanje gradiva.

Autori se iskreno zahvaljuju recenzentima dr Ratomiru Paunoviću, redovnom profesoru Tehnološkog fakulteta u Novom Sadu i dr Mirjani Stojanović, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na korisnim sugestijama i primedbama koje su nam uputili nakon pažljivog čitanja rukopisa.

Zahvaljujemo se našoj koleginici Jeleni Čolić koja je sredila i dopunila zadatke korišćene u zbirci.

Za lektorski deo posla zahvaljujemo se profesoru književnosti Aleksandri Kostić, koja je detaljno pregledala rukopis.

Reči zahvalnosti upućujemo našem profesoru dr Vojislavu Mudrinskom koji je dugo godina vodio predmete Matematika I i Matematika II, od koga smo sticali znanja iz ovih oblasti i posvećenost u radu sa studentima.

U Novom Sadu, Autori
oktobra 2008. godine

Sadržaj

Glava 1

Kompleksan broj

• **Algebarski oblik kompleksnog broja**

$$\boxed{z = a + bi,\ i^2 = -1, a, b \in \mathbb{R},}$$

a je **realni deo** kompleksnog broja z (oznaka $a = Re(z)$,) a b je **imaginarni deo** kompleksnog broja z (oznaka $b = Im(z)$).

• **Konjugovano kompleksan broj** kompleksnog broja $z = a + bi$ je

$$\boxed{\overline{z} = a - bi.}$$

• Kompleksni brojevi $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ su **jednaki** ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

• **Zbir** brojeva $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ je kompleksan broj

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

• **Razlika** brojeva $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ je kompleksan broj

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

• **Proizvod** brojeva $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ je kompleksan broj

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

• **Količnik** brojeva $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ je kompleksan broj

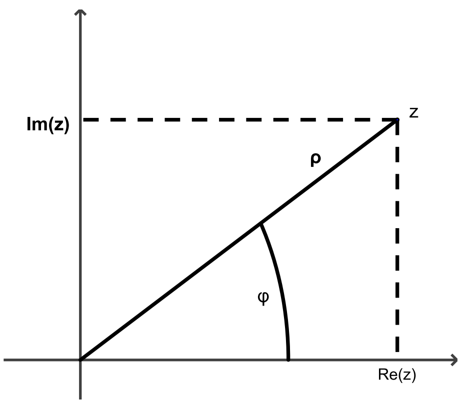
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i.$$

• **Moduo** (ρ) kompleksnog broja je

$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}.}$$

• **Argument** (φ) kompleksnog broja je

$$\boxed{tg\varphi = \frac{b}{a}.}$$



Slika 1.1. Moduo i argument kompleksnog broja

φ	tg φ
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$

φ	tg φ
$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

φ	tg φ
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$

φ	tg φ
$\frac{3\pi}{2}$	$-\infty$
$\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabela 1.1. Tangensi osnovnih uglova

• **Trigonometrijski i eksponencijalni oblik** kompleksnog broja dati su sa

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),} \qquad \boxed{z = \rho e^{i\varphi}.}$$

• Periodičnost trigonometrijskih i stepenih funkcija:

$$\sin\varphi = \sin(\varphi+2k\pi), \;\; \cos\varphi = \cos(\varphi+2k\pi), \;\; e^{(\varphi+2k\pi)i} = e^{\varphi i}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

• **Stepenovanje** kompleksnih brojeva

$$\boxed{z^n = (a+bi)^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho^n\, e^{n\varphi\pi i}.}$$

• Periodičnost stepena imaginarne jedinice $(k \in \mathbb{Z})$:

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$
$i^{4k+1} = i$	$i^{4k+2} = -1$	$i^{4k+3} = -i$	$i^{4k} = 1$

• Kružnica sa centrom u tački (a, b) i poluprečnikom r data je jednačinom

$$\boxed{|z-a-bi|^2 = r^2.}$$

• Kompleksan broj z_1, koji predstavlja **rotaciju** kompleksnog broja z oko koordinatnog početka, za ugao α, u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu, dat je sa

$$z_1 = z \cdot e^{\alpha i}.$$

• **Korenovanje.** Rešenja jednačine $z^n = a+bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho\, e^{\varphi i}$, $n \in \mathbb{N}$ dobijamo uz pomoć Moavrove formule:

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}) \;=\; \sqrt[n]{\rho}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i},\;\; k = 0,1,\ldots,n-1.}$$

Primeri

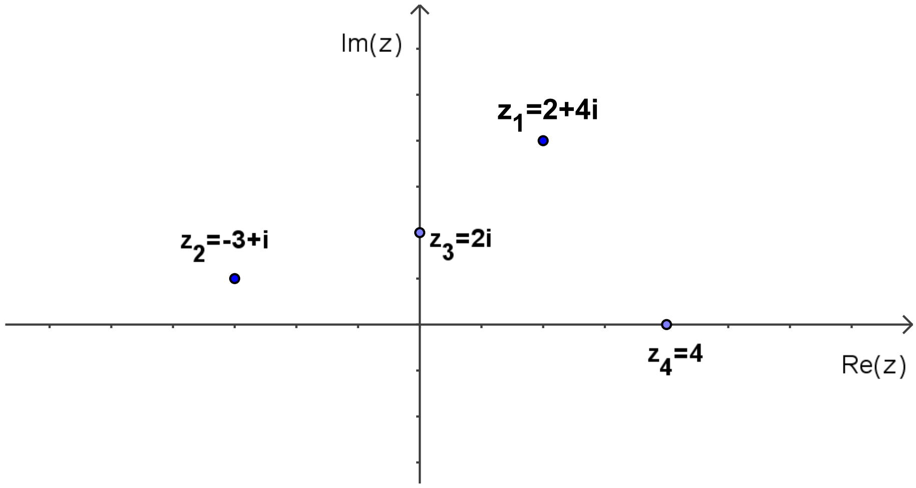
1. Odrediti realan i imaginaran deo sledećih kompleksnih brojeva: $z_1 = 2+4i$, $z_2 = -3+i$, $z_3 = -2i$ i $z_4 = 4$. Odrediti odgovarajuće konjugovano kompleksne brojeve.

   Rešenje:

   $Re(z_1) = 2,\ Im(z_1) = 4,\ Re(z_2) = -3,\ Im(z_2) = 1,\ Re(z_3) = 0,\ Im(z_3) = -2,\ Re(z_4) = 4,\ Im(z_4) = 0.$

   Konjugovano kompleksni brojevi su: $\overline{z_1} = 2-4i$, $\overline{z_2} = -3-i$, $\overline{z_3} = 2i$ i $\overline{z_4} = 4$.

   Pozicije brojeva u kompleksnoj ravni date su na *slici 1.2*.



Slika 1.2. Pozicija u kompleksnoj ravni brojeva datih u primeru 1

2. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 2$ i $z_2 = -4 + 5i$. Odrediti: $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \cdot z_2$ i $\frac{z_1}{z_2}$.

   Rešenje:

   $z_1 + z_2 = 2 - 2i + (-4 + 5i) = 2 - 2i - 4 + 5i = -2 + 3i,$

   $z_1 - z_2 = 2 - 2i - (-4 + 5i) = 2 - 2i + 4 - 5i = 6 - 7i,$

   $z_1 \cdot z_2 = (2 - 2i)(-4 + 5i) = -8 + 10i + 8i + 10 = 2 + 18i,$

   $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 2i}{-4 + 5i} \cdot \frac{-4 - 5i}{-4 - 5i} = \frac{-18 - 2i}{41} = -\frac{18}{41} - \frac{2}{41}i.$

3. Odrediti moduo i argument kompleksnih brojeva: $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, z_3 = -5, z_4 = 3i$ i $z_5 = -\sqrt{3} - i$.

   Rešenje:

   Za broj z_1 je

   $$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{i} \quad tg\varphi = \frac{1}{1} = 1.$$

   Iz tabele 1.1. vidimo da za vrednost argumenta konkurišu dva ugla $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, ali kako se broj z_1 nalazi u I kvadrantu kompleksne ravni odabiramo $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Uzmimo sada z_2 i za njega je

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{i} \quad tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}.$$

Tabela 1.1. nam daje dve mogućnosti za φ, i to: $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ i $\varphi = \frac{5\pi}{3}$, a kako je broj z_2 u II kvadrantu biramo $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Ako posmatramo z_3, tada je

$$\rho = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5 \quad \text{i} \quad tg\varphi = \frac{0}{-5} = 0,$$

pa φ može biti 0 ili π, a kako je -5 na negativnom delu realne ose, sledi da je $\varphi = \pi$.

Za kompleksan broj z_4 je

$$\rho = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3 \quad \text{i} \quad tg\varphi = \frac{3}{0} = +\infty,$$

pa iz pozicije broja z_4 u kompleksnoj ravni zaključujemo da je $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

U slučaju broja z_5 imamo da je

$$\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2 \quad \text{i} \quad tg\varphi = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

i izmedju kandidata $\varphi = \frac{\pi}{6}$ i $\varphi = \frac{7\pi}{6}$ biramo da je $\varphi = \frac{7\pi}{6}$.

4. Kompleksne brojeve iz prethodnog primera napisati u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku.

   Rešenje:

   $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \;=\; \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$

   $z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \;=\; 2\,(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}),$

   $z_3 = -5 = 5e^{\pi i} \;=\; 5\,(\cos\pi + i\sin\pi),$

   $z_4 = 3i = 3e^{\frac{\pi}{2}i} \;=\; 3\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}),$

   $z_5 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi}{6}i} \;=\; 2\,(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}).$

5. Odrediti i^{67} i i^{2006}.

   Rešenje:

   Kako 67 pri deljenju sa 4 daje ostatak 3, to je $i^{67} = i^3 = -i$, dok 2006 pri deljenju sa 4 daje ostatak 2, pa je $i^{2006} = i^2 = -1$.

6. Naći kompleksan broj z, takav da je $z = e^{83\pi i}$.

   Rešenje:

   Iz činjenice da je $83\pi = 82\pi + \pi$, zaključujemo:

$$z = e^{83\pi i} = e^{(82\pi+\pi)i} = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

7. Izračunati $(1+i)^{16}$ i $(1+\sqrt{3}i)^9$.

   Rešenje:

   I način. Kako je $(1+i)^2 = 2i$ i $(1+\sqrt{3}i)^3 = -8$, imamo da je

$$(1+i)^{16} = \left((1+i)^2\right)^8 = (2i)^8 = 2^8\, i^8 = 256,$$

$$(1+\sqrt{3}i)^9 = \left((1+\sqrt{3}i)^3\right)^3 = (-8)^3 = -512.$$

   II način. Iskoristimo li eksponencijalne oblike datih brojeva i periodičnost funkcije e^{xi}, dobijamo da je

$$(1+i)^{16} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{16} = (\sqrt{2})^{16}e^{4\pi i} = 2^8 = 256,$$

$$(1+\sqrt{3}i)^9 = \left(2e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^9 = 2^9e^{3\pi i} = 2^9e^{\pi i} = -512.$$

8. Gde se u kompleksnoj ravni nalaze kompleksni brojevi koji zadovoljavaju jednačine:

   (a) $|z+5|^2 = 4$; (b) $|z-3i| = 3$; (c) $|z+6-4i|^2 \leq 3$;
   (d) $Re(z) > 0$; (e) $|Re(z)| < 2$ i $|Im(z)| < 3$?

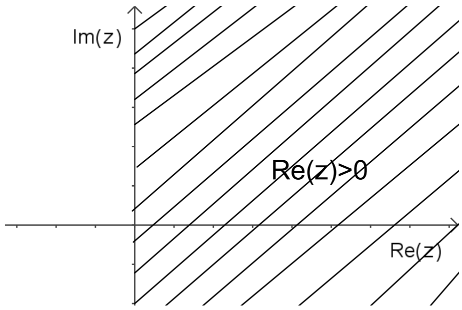
   Rešenje:

   (a) Kompleksni brojevi koji zadovoljavaju jednačinu $|z+5|^2 = 4$ leže na kružnici, poluprečnika 2, sa centrom u tački $(-5,0)$, čija je jednačina $(x+5)^2 + y^2 = 2^2$;

(b) Jednakost $|z-3i|=3$ predstavlja brojeve koji u kompleksnoj ravni grade kružnicu $x^2+(y-3)^2=3^2$;

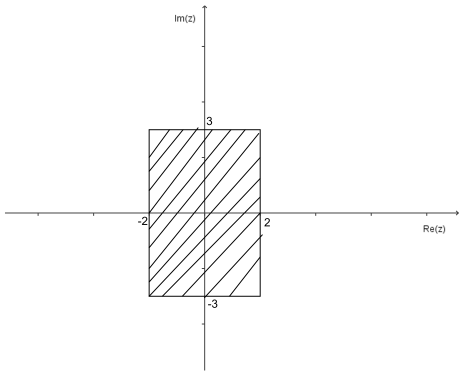
(c) Nejednačinu $|z+6-4i|^2 \leq 3$ zadovoljavaju kompleksni brojevi koji se nalaze na ili unutar kružnice sa centrom u tački $(-6,4)$ i poluprečnikom $\sqrt{3}$;

(d) $Re(z)>0$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi koji se nalaze u poluravni desno od imaginarne ose (videti *sliku 1.3*);



Slika 1.3. Kompleksni brojevi $Re(z)>0$

(e) Sada je $|Re(z)|<2 \Leftrightarrow -2<Re(z)<2$ i $|Im(z)|<3 \Leftrightarrow -3<Im(z)<3$, odnosno date nejednakosti zadovoljavaju svi kompleksni brojevi koji se nalaze unutar pravougaonika, čija je jedna stranica dužine 4 a druga dužine 6 (videti *sliku 1.4*).



Slika 1.4. Kompleksni brojevi za koje važi $|Re(z)|<2$ i $|Im(z)|<3$

9. Rotirati broj $z=1+i$ oko koordinatnog početka za ugao od 90 stepeni.

Rešenje:

Broj $z=1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ ćemo u eksponencijalnom obliku pomnožiti sa $e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Dobijamo da je

$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -1+i$$

rezultat tražene rotacije.

10. Rešiti jednačinu:

$$z^4 = -1+\sqrt{3}i.$$

Rešenje:

Prvo ćemo jednačinu napisati u eksponencijalnom obliku:

$$z^4 = -1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Ako obe strane jednačine dignemo na stepen $\frac{1}{4}$, dobijamo prvo rešenje:

$$z_0 = 2^{\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{6}i} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right).$$

Ova jednačina ima četiri rešenja i ona su ravnomerno rasporedjena na kružnici poluprečnika $\sqrt[4]{2}$. Dakle, na svakih $\frac{\pi}{2}$ imamo po jedno rešenje. Kako smo našli prvo, ostala tri rešenja lako dobijamo rotacijama za $\frac{\pi}{2}$:

$$z_1 = z_0e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

$$z_2 = z_1e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{7\pi}{6}i} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \text{ i}$$

$$z_3 = z_2e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{7\pi}{6}i}e^{\frac{\pi}{2}i} = \sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{3}i} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Datu jednačinu smo lakše mogli rešiti uz pomoć Moavrove formule. Imamo da je $n=4$, $\rho=2$ i $\varphi=\frac{2\pi}{3}$, pa za $k=0,1,2,3$ dobijamo rešenja:

$$z_0 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}i} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+0}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$= \sqrt[4]{2}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}i),$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}i} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$$= \sqrt[4]{2}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}i} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$
$$= \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i),$$
$$z_3 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}i} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$$
$$= \sqrt[4]{2}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

11. Odrediti kompleksan broj z za koji je

$$z^2 = 5 + 12i.$$

Rešenje:

Ovu jednačinu možemo rešiti na način izložen u prethodnom primeru, ali za argument ne dobijamo osnovni ugao (tabela 1.1.), čime je rad značajno otežan. Zato ćemo problem rešiti koristeći algebarski oblik kompleksnog broja z. Ako z zamenimo sa $a+bi$, imamo da je

$$\begin{aligned} (a+bi)^2 &= 5+12i \\ a^2+2abi-b^2 &= 5+12i, \end{aligned}$$

odakle dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= 5 \\ 2ab &= 12. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine je $b = \frac{6}{a}$ i imamo bikvadratnu jednačinu

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0,$$

čija rešenja su $a_1 = 3$ i $a_2 = -3$. Konačna rešenja su kompleksni brojevi $z_1 = 3+2i$ i $z_2 = -3-2i$.

Zadaci

1. Za brojeve $z_1 = 3+5i$ i $z_2 = 2+i$ izračunati:

$$\frac{\overline{z_1} - 3z_2}{z_1 - 4i} - \frac{1}{\overline{z_2}}.$$

2. Izračunati:

$$\frac{(3+2i)(2-i)}{(3+i)(1-i)} - \frac{(2-i)^3(5+i)}{1+2i}.$$

3. Za poznate brojeve $z_1 = 2-3i$ i $z_2 = 4i$ odrediti broj z, ako je:

$$z = \Big(\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{z_1 z_2}}\Big)^2.$$

4. Ako znamo da je $z_1 = 1+3i$, odrediti kompleksan broj z, tako da je:

$$\frac{\overline{z}(z_1-1)^3}{18} + (z-3)(z_1-2i)^2 + 2z_1 = -5.$$

5. Odrediti kompleksan broj z za koji je:

$$\frac{|z|^2+3z-\overline{z}}{4} = 2+3i.$$

6. Rešiti jednačinu:

$$|z-2|^2 + \overline{z}\cdot Re(2z) + z^2 - 4z = 12i.$$

7. Rešiti jednačinu:

$$|z|^2 - 3\overline{z} = 4+6i.$$

8. Naći kompleksan broj z ako za $z_1 = -2+i$ važi:

$$Im(\overline{z}(z_1+2i)) = 1 \quad \text{i} \quad Re\Big(\frac{3z+5}{2\overline{z_1}}\Big) = -\frac{8}{5}.$$

9. Za $z_1 = 2+5i$ odrediti z, ako je:

$$Re\Big(\frac{(z_1+3)\overline{z}}{5}\Big) = 9 \ \text{ i } \ Im\Big(\frac{z-3i}{\overline{z_1}}\Big) = \frac{33}{29}.$$

10. Naći kompleksan broj z, ako za $z_1 = 2-2i$ važi:

$$Im\Big(\frac{\overline{z}\cdot\overline{z_1}+2z-3z_1}{2}\Big) = 9 \ \text{ i } \ Im\Big(\frac{(z+z_1+2+i)^2+3(\overline{z}-2z_1)-2}{25}\Big) = -1.$$

11. Odrediti module i argumente sledećih kompleksnih brojeva:
$z_1 = -6-6i,\ z_2 = 1+\sqrt{3}i,\ z_3 = 2\sqrt{3}-2i,\ z_4 = 3$ i $z_5 = -i$.

12. Odrediti kompleksan broj z, tako da je $|z| = |z_1|$ i $\arg z = \arg(z_1-2)$, za $z_1 = 2i+4$.

13. Izračunati: (a) $(1-i)^7$, (b) $z = (1+i)^{39}$.

14. Pronaći broj z, ako znamo da je $z = (1+i\sqrt{3})^{27}$.

15. Naći kompleksan broj z, takav da je

$$z = i^{309} \cdot e^{\frac{89\pi}{2}i} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{216} \cdot \left(\cos\left(\frac{201\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{201\pi}{2}\right)\right)^{49}.$$

16. Odrediti kompleksne brojeve takve da je:
(a) $z = \dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$; (b) $z = (1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$;
(c) $z = (10-5i)^{35}(1+3i)^{35}$; (d) $z = (2+i\sqrt{12})^6$.

17. U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačine:
(a) $z^4 = \sqrt{3}+i$; (b) $z^5 = (3-i)(3i-1)$; (c) $z^3 = (2-2i)^8$.

18. Rešiti jednačinu u polju kompleksnih brojeva:

$$z^4 = z_1^5 + z_2^5,\ z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

19. Za koje vrednosti kompleksnog broja z je:
(a) $z^2 = -12-16i$; (b) $z^2 = 3-4i$; (c) $z^2 = -16+30i$?

20. Za koje kompleksne brojeve važi jednakost

$$z = \sqrt{(2+i)^2 + 4(3+i)}\,?$$

21. Naći kompleksan broj z, ako je

$$z^2 = \frac{(2+3i)(34-12i)}{13}.$$

22. Rešiti jednačinu:

$$z^2 - (5+i)z + 12 + 5i = 0.$$

23. Odrediti kompleksne brojeve z dobijene rotacijom u odnosu na koordinatni početak brojeva:

    (a) $-1+i$ za 45 stepeni;
    (b) $4+4\sqrt{3}i$ za 90 stepeni;
    (c) $-2\sqrt{3}-2i$ za 60 stepeni.

24. Nacrtati kružnice odredjene jednačinama:
    (a) $|z|=2$; (b) $|z-3|=1$; (c) $|z+2+3i|=3$.

25. Na krivoj $|z-5|=3$ naći kompleksne brojeve z_1 i z_2, takve da im je imaginarni deo jednak 1. Kako bi se rešenje dobilo grafički?

26. Naći presek krivih $|z-2|=2$ i $|z|=2$. Rešenja prikazati u opštem i eksponencijalnom obliku. Odrediti presek grafički u kompleksnoj ravni.

27. Grafički prikazati za koje kompleksne brojeve z istovremeno važe uslovi:
$$|z-3|^2 \leq 25 \ \text{ i } \ |z+5+3i|^2 \leq 64.$$

28. Neka je $z_1=-3i$ jedno teme kvadrata $z_1z_2z_3z_4$. Odrediti ostala tri temena tako da je $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$.

29. Na kružnici $|z|=3$ naći temena jednakostraničnog trougla $z_1z_2z_3$ ako za teme z_1 važi $\arg(z_1)=\arg(1+i)$.

30. Odrediti temena pravilnog osmougla tako da je moduo kompleksnih brojeva koji odredjuju temena jednak modulu broja z, za koji je $z^2=7+24i$, i znamo da jedno teme osmougla ima argument kao i broj w, $w^2=2i$, $w\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$.

31. Odrediti kompleksan broj z, ako je:
    (a) $z=\sum\limits_{n=1}^{2006} i^n$; (b) $[\sum\limits_{k=1}^{2009}(i^k)^{2009}+1]^{2008}$.

Rešenja

1. $$\frac{\overline{z_1}-3z_2}{z_1-4i}-\frac{1}{\overline{z_2}}=\frac{3-5i-3(2+i)}{3+5i-4i}-\frac{1}{2-i}=\frac{-3-8i}{3+i}-\frac{1}{2-i}=\frac{-3-8i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}$$
$$-\frac{1}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}=\frac{-17-21i}{10}-\frac{2+i}{5}=-\frac{21}{10}-\frac{23}{10}i.$$

2. $\dfrac{37}{2}+20i.$

3. $z=\dfrac{63}{2704}+\dfrac{1}{169}i.$

4. Uvrstimo li $z=a+bi$ i $z_1=1+3i$ u datu jednakost dobijamo:

$$\frac{(a-bi)(1+3i-1)^3}{18}+(a+bi-3)(1+3i-2i)^2+2(1+3i)=-5.$$

Na levoj strani izvršimo elementarne operacije sa kompleksnim brojevima i dolazimo do jednakosti

$$-7b+ai=-14,$$

iz koje, ako primenimo pravilo za jednakost kompleksnih brojeva, dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} -7b &= -14 \\ a &= 0, \end{aligned}$$

odakle je $a=0$ i $b=2$, a traženi kompleksan broj $z=2i$.

5. Zamenimo li z u navedenoj jednakosti sa $a+bi$ imamo

$$\frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2+3(a+bi)-(a-bi)}{4}=2+3i,$$

odnosno $a^2+b^2+2a+4bi=8+12i$. Dalje dolazimo do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+2a &= 8 \\ 4b &= 12, \end{aligned}$$

čija rešenja su $b=3$, $a=-1$ i konačno $z=-1+3i$.

6. Transformacijom date jednakosti dolazimo do izraza

$$4a^2-8a+4-4bi=12i,$$

iz kojeg dobijamo da je $z=1-3i$.

7. $z=2i$ i $z=3+2i$.

8. Predstavimo z u algebarskom obliku $z = a + bi$. Tada je
$$\overline{z}(z_1 + 2i) = (a - bi)(-2 + i + 2i) = -2a + 3b + (3a + 2b)i$$
i iz uslova zadatka imamo da je $Im(\overline{z}(z_1 + 2i)) = 3a + 2b = 1$. Takodje je
$$\frac{3z+5}{2\overline{z_1}} = \frac{3a+3bi+5}{-4-2i} \cdot \frac{-4+2i}{-4+2i} = \frac{-12a-6b-20}{20} + \frac{6a-12b+10}{20}i,$$
pa ako iskoristimo uslov zadatka tada je $Re\left(\frac{3z+5}{2\overline{z_1}}\right) = \frac{-6a-3b-10}{10} = -\frac{8}{5}$. Sada smo dobili sistem jednačina:
$$3a + 2b = 1$$
$$6a + 3b = 6,$$
sa rešenjima $a = 3$, $b = -4$, pa je traženi broj $z = 3 - 4i$.

9. Izračunamo li izraze u zagradama dolazimo do sistema jednačina $a + b = 9$, $5a + 2b = 39$, a zatim i do traženog broja $z = 7 + 2i$.

10. $z = 6 - i$.

11. $|z_1| = 6\sqrt{2},\ \arg(z_1) = \frac{5\pi}{4}$; $|z_2| = 2,\ \arg(z_2) = \frac{\pi}{3}$; $|z_3| = 4,\ \arg(z_3) = \frac{11\pi}{6}$; $|z_4| = 3,\ \arg(z_4) = 0$; $|z_5| = 1,\ \arg(z_5) = \frac{3\pi}{2}$.

12. Moduo broja z_1 je $2\sqrt{5}$, a argument od $z_1 - 2$ je $\frac{\pi}{4}$, pa je $z = 2\sqrt{5}e^{\frac{\pi}{4}i}$.

13. (a) $(1-i)^7 = ((1-i)^2)^3(1-i) = (-2i)^3(1-i) = 8i(1-i) = 8 + 8i$;

    (b) $z = (\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})^{39} = (\sqrt{2})^{39}e^{\frac{39\pi}{4}} = 2^{19}\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}} = 2^{19}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$
    $= 2^{19}(1-i)$.

14. Zadatak možemo uraditi na dva načina, i to: ako broj $1 + i\sqrt{3}$ predstavimo u eksponencijalnom obliku $2e^{\frac{\pi}{3}i}$ ili ako iskoristimo da je $(1 + i\sqrt{3})^3 = -8$. Traženi broj je $z = -2^{27}$.

15. Navodimo prvo vrednosti činilaca:
$$i^{309} = i,\ e^{\frac{89\pi}{2}i} = i,\ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{216} = 1,\ \left(\cos\left(\frac{201\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{201\pi}{2}\right)\right)^{49} = i$$
i konačno $z = -i$.

16. (a) $z=-64$; (b) $z=\frac{1}{4}$;

(c) Svedemo desnu stranu na isti stepen:

$$(10-5i)^{35}(1+3i)^{35}=((10-5i)(1+3i))^{35}=(25+25i)^{35}$$

i dobijamo rešenje: $z=25^{35}2^{17}(-1+i)$;

(d) Primetimo li da je $2+i\sqrt{12}=2(1+\sqrt{3}i)$ dobijamo da je $z=2^{12}$.

17. (a) Desna strana u eksponencijalnom obliku je $2e^{\frac{\pi}{6}i}$ i rešenja su:

$$z_1=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\pi}{24}i},\ z_2=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{13\pi}{24}i},\ z_3=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{25\pi}{24}i}\ \text{ i }\ z_4=\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{37\pi}{24}i};$$

(b) Sredimo li desnu stranu dolazimo do jednačine $z^5=10i$ sa rešenjima:

$$z_1=\sqrt[5]{10}e^{\frac{\pi}{10}i},z_2=\sqrt[5]{10}i,z_3=\sqrt[5]{10}e^{\frac{9\pi}{10}i},z_4=\sqrt[5]{10}e^{\frac{13\pi}{10}i},z_5=\sqrt[5]{10}e^{\frac{17\pi}{10}i};$$

(c) Nakon stepenovanja desne strane dobijamo jednačinu $z^3=2^{12}$ čija rešenja su:

$$z_1=-8+8\sqrt{3}\,i,\ z_2=-8-8\sqrt{3}\,i\ \text{ i }\ z_3=16.$$

18. Sredimo li desnu stranu dobijamo jednačinu:

$$z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-1$$

i četiri rešenja : $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$,
$z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

19. (a) Kako broj $-12-16i$ nema za argument neki od osnovnih uglova, u datoj jednačini zamenimo z sa $a+ib$ i dolazimo do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} a^2-b^2 &= -12\\ 2ab &= -16, \end{aligned}$$

koji nas dovodi do dva rešenja: $z=2-4i$ i $z=-2+4i$;

(b) $z_1=2-i$, $z_2=-2+i$; (c) $z_1=3+5i$, $z_2=-3-5i$.

20. Ako sredimo izraz pod korenom, dolazimo do jednačine $z = \sqrt{15+8i}$, tj.
$$z^2 = 15+8i.$$
Rešenja su: $z_1 = 4+i$ i $z_2 = -4-i$.

21. Polazna jednačina se svodi na jednačinu
$$z^2 = 8+6i,$$
čija su rešenja: $z = 3+i$ i $z = -3-i$.

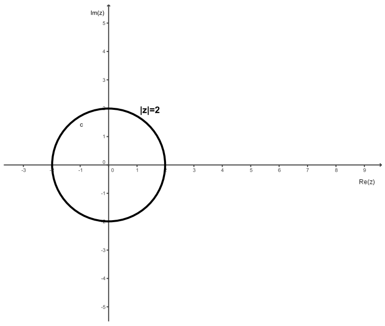
22. Ako primenimo formulu za traženje rešenja kvadratne jednačine, imamo da je:
$$z_{1,2} = \frac{5+i \pm \sqrt{-24-10i}}{2} = \frac{5+i \pm \sqrt{(1-5i)^2}}{2},$$
što nas dovodi do rešenja: $z_1 = 3-2i$ i $z_2 = 2+3i$.

23. (a) $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}e^{\pi i} = -\sqrt{2}$;

(b) $8e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = 8e^{\frac{5\pi}{6}i} = 8\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big) = -4\sqrt{3}+4i$;

(c) $4e^{\frac{7\pi}{6}i} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = 4e^{\frac{3\pi}{2}i} = -4i$.

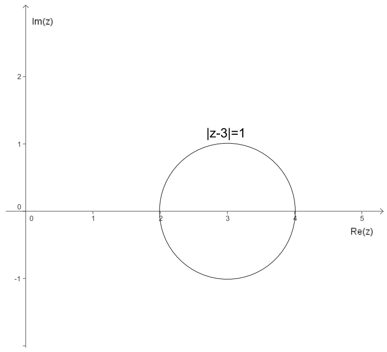
24. Videti *slike 1.5, 1.6, 1.7.*



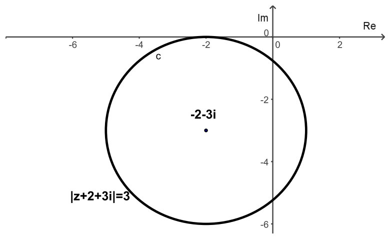
Slika 1.5. Kružnica $|z| = 2$

25. Iz jednakosti $|a+i-5| = 3$ lako dolazimo do rešenja: $z_1 = 5+2\sqrt{2}+i$, $z_2 = 5-2\sqrt{2}+i$. Grafički rešenje dobijamo u preseku kružnice $(x-5)^2+y^2 = 3^2$ i prave $y = 1$.

26. Imamo da je je $z_1 = 1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, $z_2 = 1-i\sqrt{3} = 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$. Grafički rešenje dobijamo u preseku kružnica $(x-2)^2+y^2 = 2^2$ i $x^2+y^2 = 2^2$.



Slika 1.6. Kružnica $|z-3|=1$



Slika 1.7. Kružnica $|z+2+3i|=3$

27. Traženi brojevi nalaze se u preseku krugova koje odredjuju kružnice $(a-3)^2+b^2=5^2$ i $(a+5)^2+(b+3)^2=8^2$.

28. Pošto su moduli kompleksnih brojeva koji predstavljaju temena kvadrata jednaki, zaključujemo da temena leže na istoj kružnici, pa svako sledeće teme možemo dobiti rotacijom za $\dfrac{\pi}{2}$ prethodno nadjenog temena. U eksponencijalnom obliku teme $z_1=3e^{\frac{3\pi}{2}i}$, pa imamo da je:
$$z_2=z_1e^{\frac{\pi}{2}i}=3,\ \ z_3=z_2e^{\frac{\pi}{2}i}=3i\ \text{ i }\ z_4=z_3e^{\frac{\pi}{2}i}=-3.$$

29. Nadjemo prvo teme z_1 (moduo mu je 3, a argument jednak broju $1+i$) i ono je $z_1=3e^{\frac{\pi}{4}i}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$. Kako treba pravilno rasporediti tri temena na kružnici $|z|=3$, ostala temena dobijamo rotacijama za $\dfrac{2\pi}{3}$ i ona su:
$$z_2=z_1e^{\frac{2\pi}{3}i}=3e^{\frac{11\pi}{12}i}\ \text{ i }\ z_3=z_2e^{\frac{2\pi}{3}i}=3e^{\frac{19\pi}{12}i}.$$

30. Na ranije opisan način nalazimo brojeve za koje je $z^2=7+24i$. To su $z_1=4+3i$ i $z_2=-4-3i$ i oni imaju isti moduo $|z|=5$, što je ujedno i moduo

brojeva koji čine temena osmougla. Dalje, jednačina $w^2 = 2i$ ima rešenja $w_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ i $w_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$, pa iz uslova zadatka sledi da je jedno teme osmougla $z_1 = 5e^{\frac{5\pi}{4}i}$. Ostala temena dobijamo rotacijama za $\frac{\pi}{4}$ i ona su :

$$z_2 = 5e^{\frac{3\pi}{2}i},\ z_3 = 5e^{\frac{7\pi}{4}i},\ z_4 = 5e^{2\pi i},\ z_5 = 5e^{\frac{\pi}{4}i},\ z_6 = 5e^{\frac{\pi}{2}i},\ z_7 = 5e^{\frac{3\pi}{4}i},\ z_8 = 5e^{\pi i}.$$

31. (a) Broj z je zbir 2006 sabiraka :

$$z = i + i^2 + i^3 + i^4 + \cdots + i^{2001} + i^{2002} + i^{2003} + i^{2004} + i^{2005} + i^{2006}$$

$$= \underbrace{(i-1-i+1) + \cdots + (i-1-i+1)}_{501\ puta} + i - 1 = i - 1;$$

(b) Kao u prvom delu zadatka dobijamo da je $\sum_{k=1}^{2009} i^k = i$, pa imamo

$$\Big(\big(\sum_{k=1}^{2009} i^k\big)^{2009} + 1\Big)^{2008} = (i^{2009} + 1)^{2008} = (1+i)^{2008} = 2^{1004}.$$

Glava 2

Polinomi i racionalne funkcije

• **Polinom** stepena $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je funkcija $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika

$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.}$$

Realni brojevi $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ su **koeficijenti** polinoma, gde je $a_n \neq 0$ **vodeći koeficijent**, a a_0 **slobodan član** polinoma. Polinom kod kojeg je $a_n = 1$ naziva se **normiran** polinom. Polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nuli je **nula** polinom.
• Dva polinoma $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ su **jednaka**, ako su istog stepena $(n = m)$ i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene od x jednaki.
• Dva polinoma $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ se **sabiraju (oduzimaju)** tako što se sabiraju (oduzimaju) koeficijenti uz odgovarajuće stepene od x.
• **Proizvod** polinoma $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ je polinom $R_{n+m}(x)$.
• **Deljenje.** Za svaka dva polinoma P_n i Q_m, $Q_m \neq 0$, $n \geq m$ postoje jedinstveni polinomi S_p i R_k, takvi da je

$$P_n = Q_m \cdot S_p + R_k, \text{ tj. } \frac{P_n}{Q_m} = S_p + \frac{R_k}{Q_m},$$

gde je $p = n - m$, $k < m$. Polinom S_p se naziva **količnik**, a polinom R_k **ostatak** deljenja. Ako je ostatak jednak nuli, tada je polinom P_n **deljiv** polinomom Q_m.
• Pri deljenju polinoma $P_n(x)$ binomom $x - c$ koristimo **Hornerovu šemu**:

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
x^n & x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots & x^1 & x^0 & \text{c} & \text{r} \\ \hline
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 & & \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 & &
\end{array},$$

gde se koeficijenti b_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ i ostatak r računaju na sledeći način:
$b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}, \ldots$, $b_0 = cb_1 + a_1$, $r = cb_0 + a_0$.

• **Bezuov stav.** Ostatak pri deljenju polinoma $P_n(x)$ sa $x-c$ je $P_n(c)$.
• **Nula (koren)** polinoma $P_n(x)$ je ona vrednost promenljive x za koju je vrednost polinoma jednaka nuli, odnosno

$$P_n(x) = 0.$$

• Ako je kompleksan broj $a+bi$ nula nekog polinoma, tada je i njemu konjugovano kompleksan broj $a-bi$, takodje, nula datog polinoma.
• Ako je polinom $P_n(x)$ deljiv sa $(x-c)^p$, kažemo da je $x=c$ **nula reda** p (koren višestrukosti p) polinoma $P_n(x)$.
• Svaki polinom stepena n se na jedinstven način može faktorisati u skupu $\mathbb{C}$ na sledeći način:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_p)^{k_p},$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{C}$ nule datog polinoma, a $k_1, k_2, \ldots, k_p$ redom njihove višestrukosti $(k_1+k_2+\cdots+k_p = n)$.
• U slučaju da polinom ima nule koje nisu realni brojevi, tada njegova faktorizacija u skupu $\mathbb{R}$ izgleda ovako:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}\cdot(x^2+b_1x+c_1)^{j_1}\cdots(x^2+b_sx+c_s)^{j_s},$$

gde je $k_1+\cdots+k_r+2(j_1+\cdots+j_s) = n$.
• Neka je dat polinom:

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,\ a_n, a_0 \neq 0.$$

Racionalan broj $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ je moguća nula polinoma $P_n(x)$ ako p deli slobodan član, a q deli koeficijent uz najviši stepen od x, u oznaci $p|a_0$ i $q|a_n$.

Racionalne funkcije

• Funkcija $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisana sa

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

gde su P_n i Q_m $(Q_m \neq 0)$ polinomi nad poljem realnih brojeva, naziva se **racionalna funkcija**. **Prava racionalna funkcija** je racionalna funkcija kod koje je $n < m$.
• Rastavljanje prave racionalne funkcije oblika $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne sabirke zavisi od faktora polinoma $Q(x)$:

1. Svaki faktor oblika $(x-a)^n$ daje tačno n parcijalnih sabiraka:

$$\frac{A_1}{(x-a)}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}, \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

pa je

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

2. Svaki faktor oblika $(x^2+px+q)^n$ daje n parcijalnih sabiraka oblika:

$$\frac{K_1x+L_1}{(x^2+px+q)}, \dots, \frac{K_nx+L_n}{(x^2+px+q)^n},$$

pa je

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n} = \frac{K_1x+L_1}{(x^2+px+q)} + \cdots + \frac{K_nx+L_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Stepen polinoma $P(x)$ je manji od $2n$.

• Ako je racionalna funkcija **neprava**, tada pri deljenju brojioca sa imeniocem dobijamo polinom i pravu razlomljenu funkciju, koju dalje rastavljamo na zbir parcijalnih razlomaka.

Primeri

1. Napisati proizvoljan polinom stepena nula, jedan i dva. Napisati jedan normiran polinom stepena pet i jedan polinom stepena tri koji nije normiran.

   Rešenje:

   Sa $P_0(x) = a_0$ je dat polinom nultog stepena. Na primer, $P_0(x) = 3$ i $Q_0(x) = -2$ su polinomi nultog stepena. Dalje, $P_1(x) = a_1x + a_0$ je polinom stepena jedan:

   $P_1(x) = 3x+5,\ Q_1(x) = x, \dots$

   Zatim, $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ je polinom stepena dva:

   $P_2(x) = 2x^2+3x-5$, $Q_2(x) = 7x^2$, $R_2(x) = x^2-6x$, $S_2(x) = 4x^2-1$, $T_2(x) = x(3x+5), \dots$

   Polinom $P_5(x) = x^5-3x^3+6$ je normiran polinom, dok $Q_3(x) = 2x^3+1$ to nije.

2. Odrediti koeficijente A,B,C i D tako da polinomi $P_3(x) = (A-B)x^3 + (A+B)x^2 + Cx + D$ i $Q_3(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ budu jednaki.

   Rešenje:

   Iz jednakosti datih polinoma sledi da je

   $$A-B=1, A+B=5, C=-3 \text{ i } D=4,$$

   odakle dobijamo da je $A=3, B=2, C=-3$ i $D=4$.

3. Sabrati polinome $P_5(x) = 2x^5 + 3x^3 + 2x + 1$ i $Q_3(x) = 4x^3 - 2x^2 - 7x + 6$.

   Rešenje:

   $$\begin{aligned} R_5(x) = P_5(x) + Q_3(x) &= 2x^5 + 3x^3 + 2x + 1 + 4x^3 - 2x^2 - 7x + 6 \\ &= 2x^5 + 7x^3 - 2x^2 - 5x + 7. \end{aligned}$$

4. Oduzeti polinome $P_4(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ i $Q_4(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2$.

   Rešenje:

   $$\begin{aligned} R_3(x) = P_4(x) - Q_4(x) &= 2x^4 + 3x^2 + 1 - (2x^4 - x^3 + 2x^2) \\ &= x^3 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

5. Pomnožiti polinome $P_2(x) = x^2 - 2$ i $Q_4(x) = 2x^4 + 6x^2$.

   Rešenje:

   $$\begin{aligned} R_6(x) = P_2(x) \cdot Q_4(x) &= (x^2 - 2) \cdot (2x^4 + 6x^2) \\ &= 2x^6 + 2x^4 - 12x^2. \end{aligned}$$

6. Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ sa $Q_2(x) = x^2 + 1$.

   Rešenje:

   $$\begin{array}{rlllll} P_3(x) : Q_2(x) = & (2x^3 & +3x^2 & & +1) : (x^2+1) = 2x+3 \\ & \underline{-(2x^3} & & \underline{+2x)} & \\ & & 3x^2 & -2x & +1 \\ & & \underline{-(3x^2} & & \underline{+3)} \\ & & & -2x & -2 \end{array} .$$

Dakle, $2x^3+3x^2+1=(x^2+1)\cdot(2x+3)-2x-2$, odnosno
$$\frac{2x^3+3x^2+1}{x^2+1}=2x+3+\frac{-2x-2}{x^2+1}.$$

7. Koristeći Hornerovu šemu odrediti:

   (a) Količnik i ostatak pri deljenju polinoma $P_4(x)=15x^4-13x^3+2x-1$ sa polinomom $Q_1(x)=x-2$;

   (b) Vrednost polinoma $P_4(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$ za $x=4$.

Rešenje:

(a) Kako je

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	2	r
15	-13	0	2	-1		
	15	$15\cdot2-13$	$17\cdot2+0$	$34\cdot2+2$		$70\cdot2-1$
	15	17	34	70		139

zaključujemo da je
$15x^4-13x^3+2x-1=(15x^3+17x^2+34x+70)(x-2)+139$,
tj. količnik pri deljenju je $S_3(x)=15x^3+17x^2+34x+70$, a ostatak je $r=139$.
Ostatak smo mogli odrediti i koristeći Bezuov stav:
$$P_4(2)=15\cdot2^4-13\cdot2^3+2\cdot2-1=139.$$
Takodje, zadatak smo mogli rešiti i direktnim deljenjem:
$$\begin{array}{lllll}
(15x^4 & -13x^3 & & +2x & -1):(x-2)=15x^3+17x^2+34x+70\\
\underline{-(15x^4-30x^3)} & & & & \\
 & 17x^3 & & +2x & -1\\
 & \underline{-(17x^3-34x^2)} & & & \\
 & & 34x^2 & +2x & -1\\
 & & \underline{-(34x^2-68x)} & & \\
 & & & 70x & -1\\
 & & & \underline{-(70x-140)} & \\
 & & & & 139
\end{array};$$

(b) Iz

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	$c=4$	r
1	-3	6	-10	16		
	1	$1\cdot 4-3$	$1\cdot 4+6$	$10\cdot 4-10$		$30\cdot 4+16$
	1	1	10	30		136

sledi da je

$$P_4(x) = (x^3+x^2+10x+30)(x-4)+136,$$

pa je $P_4(4)=136$.
Vrednost polinoma za $x=4$ mogli smo odrediti i direktno

$$P_4(4) = 4^4 - 3\cdot 4^3 + 6\cdot 4^2 - 10\cdot 4 + 16 = 136.$$

8. (a) Formirati polinom stepena 6, kojem je koeficijent uz najviši stepen od x jednak -6, a $x=0$ je dvostruka nula, $x=5$ je jednostruka nula i $x=-2$ je trostruka nula traženog polinoma;
   (b) Sastaviti normirani polinom kojem je $x=3$ dvostruka nula, $x=1-2i$ jednostruka nula, $x=1+2i$ jednostruka nula i $x=-1$ trostruka nula.

Rešenje:

(a) Iskoristimo li faktorisan oblik polinoma, imamo da je

$$\begin{aligned} P_6(x) &= -6x^2(x-5)(x+2)^3 \\ &= -6x^6-6x^5+108x^4+312x^3+240x^2; \end{aligned}$$

(b) Vidimo da se radi o polinomu sedmog stepena i da je koeficijent $a_7=1$, jer je polinom normiran. Dati polinom ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} P_7(x) &= (x-3)^2(x-(1-2i))(x-(1+2i))(x+1)^3 \\ &= (x-3)^2(x^2-2x+5)(x+1)^3 \\ &= x^7-5x^6+5x^5+7x^4-29x^3+17x^2+87x+45. \end{aligned}$$

9. Odrediti racionalne nule i faktorisati sledeće polinome nad poljem realnih brojeva:

   (a) $P_3(x) = x^3+3x^2-10x-24$;
   (b) $P_3(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{7}{3}x^2+\frac{4}{3}x-4$;

(c) $P_5(x) = 4x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 14x^2 - 8x - 8$;

(d) $P_4(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x - 8$.

Rešenje:

(a) Pretpostavimo da polinom $P_3(x)$ ima bar jednu racionalnu nulu oblika $\frac{p}{q}$. Tada $p|-24$ pa $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}$, a $q|1$ pa je $q = 1$. Dakle, sve racionalne nule polinoma, ukoliko postoje, pripadaju skupu:

$$\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24\}.$$

Primenom Hornerove šeme:

x^3	x^2	x^1	x^0	c	r
1	3	-10	-24	3	0
	1	6	8		

dobijamo da je $x_1 = 3$ jedna nula datog polinoma. Dakle, polinom $P_3(x)$ se može faktorisati kao $P_3(x) = (x-3)(x^2+6x+8)$, pa preostale nule lako nalazimo kao rešenja kvadratne jednačine $x^2 + 6x + 8 = 0$ i one su $x_2 = -2$ i $x_3 = -4$. Polinom rastavljen na činioce ima sledeći oblik:

$$P_3(x) = (x-3)(x+2)(x+4);$$

(b) Polinom $P_3(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 7x^2 + 4x - 12)$ ima iste nule kao i polinom $Q_3(x) = 3P_3(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$. Racionalne nule polinoma $Q_3(x)$, ukoliko postoje, pripadaju skupu

$$\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}.$$

Hornerovom šemom:

x^3	x^2	x^1	x^0	c	r
1	7	4	-12	1	0
	1	8	12		

dobijamo da je $x_1 = 1$ jedna nula polinoma $Q_3(x)$. Preostale dve nule su $x_2 = -2$ i $x_3 = -6$, pa je

$$P_3(x) = \frac{1}{3}(x-1)(x+2)(x+6);$$

(c) Polinomi $P_5(x)$ i $Q_5(x) = \dfrac{P_5(x)}{2} = 2x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 7x^2 - 4x - 4$ imaju iste nule. Moguće racionalne nule polinoma $Q_5(x)$ su $\dfrac{p}{q} \in \{\pm\dfrac{1}{2}, \pm1, \pm2, \pm4\}$. Uzastopnom primenom Hornerove šeme:

x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	c	r
2	2	-7	-7	-4	-4	-1	0
	2	0	-7	0	-4	2	0
		2	4	1	2	-2	0
			2	0	1		

dobijamo da su tri nule polinoma $x_1 = -1, x_2 = 2$ i $x_3 = -2$. Tada je $P_5(x) = 2(x+1)(x-2)(x+2)(2x^2+1)$. Kako nad skupom realnih brojeva jednačina $2x^2 + 1 = 0$ nema rešenja, polinom $P_5(x)$ ne možemo dalje rastavljati na činioce;

(d) Iz $p| - 8$ sledi da $p \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$, a iz $q|2$ da $q \in \{1, 2\}$. Tada $\dfrac{p}{q} \in \{\pm\dfrac{1}{2}, \pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$. Hornerovom šemom:

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	c	r
2	-11	18	-4	-8	2	0
	2	-7	4	4	2	0
		2	-3	-2	2	0
			2	1		

zaključujemo da je $x = 2$ trostruka nula datog polinoma, a $x = -\dfrac{1}{2}$ jednostruka nula. Faktorisani polinom ima sledeći oblik:

$$P_4(x) = 2(x-2)^3(x + \frac{1}{2}).$$

10. Naći racionalne nule i faktorisati nad poljem kompleksnih brojeva polinome:
    (a) $P_4(z) = z^4 - z^3 - z^2 - z - 2$; (b) $P_4(z) = z^4 + 7z^2 + 10$.

Rešenje:

(a) Iz $p|2$ sledi da $p \in \{\pm1, \pm2\}$, a iz $q|1$ da je $q = 1$, pa moguće racionalne nule pripadaju skupu $\dfrac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2\}$. Hornerovom šemom:

z^4	z^3	z^2	z^1	z^0	c	r
1	-1	-1	-1	-2	-1	0
	1	-2	1	-2	2	0
		1	0	1		

zaključujemo da su $z_1 = -1$ i $z_2 = 2$ dve nule datog polinoma. U skupu $\mathbb{R}$ faktorisan polinom je oblika $P_4(z) = (z+1)(z-2)(z^2+1)$, dok je u skupu $\mathbb{C}$ oblika

$$P_4(z) = (z+1)(z-2)(z+i)(z-i);$$

(b) Traženje nula polinoma $P_4(z)$ se svodi na rešavanje bikvadratne jednačine $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$, koju rešavamo smenom $z^2 = t$. Rešenja jednačine $t^2 + 7t + 10 = 0$ su $t_1 = -5$ i $t_2 = -2$. Kako se faktorizacija vrši nad poljem kompleksnih brojeva, jednačina $z^2 = -5$ ima rešenja $z_1 = \sqrt{5}i$ i $z_2 = -\sqrt{5}i$, a jednačina $z^2 = -2$ ima rešenja $z_3 = \sqrt{2}i$ i $z_4 = -\sqrt{2}i$. Znači, faktorisani polinom $P_4(z)$, nad poljem kompleksnih brojeva, ima sledeći oblik:

$$P_4(z) = (z - \sqrt{5}i)(z + \sqrt{5}i)(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i).$$

11. Funkciju:

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x}$$

rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka.

Rešenje:

Stepen polinoma u brojiocu je veći od stepena polinoma u imeniocu pa je reč o pravoj racionalnoj funkciji. Prvo treba da nadjemo nule polinoma u imeniocu (tj. imenilac treba da rastavimo na linearne faktore). Iz $x^3 - 4x = 0$ zaključujemo da su $x_1 = 0, x_2 = 2$ i $x_3 = -2$ tražene nule pa funkciju $R(x)$ možemo da prikažemo u sledećem obliku:

$$R(x) = \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)}.$$

Sada prelazimo na rastavljanje razlomka u parcijalne razlomke. U ovom slučaju važi:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{(A+B+C)x^2 + (2B-2C)x - 4A}{x(x-2)(x+2)}.$$

Dva polinoma su jednaka ukoliko su im jednaki koeficijenti uz odgovarajuće stepene od x, odakle dobijamo sledeće tri jednačine:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ 2B-2C &= 4 \\ -4A &= -2, \end{aligned}$$

čija su rešenja $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{4}$ i $C = -\frac{3}{4}$, pa je

$$R(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

12. Funkciju:

$$R(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2}$$

rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka.

Rešenje:

Nule polinoma u imeniocu su $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = x_5 = 2$. Dakle, $x = 0$ je nula višestrukosti tri, dok je $x = 2$ nula višestrukosti dva, pa faktor x^3 daje tri parcijalna razlomka, a faktor $(x-2)^2$ daje dva parcijalna razlomka:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{(x-2)^2} =$$

$$\frac{(A+D)x^4 + (-4A+B-2D+E)x^3 + (4A-4B+C)x^2 + (4B-4C)x + 4C}{x^3(x-2)^2}.$$

Iz uslova jednakosti polinoma u brojiocu dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} A+D &= 0 \\ -4A+B-2D+E &= 1 \\ 4A-4B+C &= -2 \\ 4B-4C &= 0 \\ 4C &= 4, \end{aligned}$$

čije je rešenje $A = \frac{1}{4}, B = 1, C = 1, D = -\frac{1}{4}$ i $E = \frac{1}{2}$, pa je

$$R(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}.$$

13. Funkciju:

$$R(x) = \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}$$

rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka.

Rešenje:

Ponovo je reč o pravoj razlomljenoj funkciji. Faktorizovan imenilac je

$$x^4+x = x(x^3+1) = x(x+1)(x^2-x+1).$$

Tražimo nule imenioca i one su: $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_4 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tada je

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

odakle dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ -B+C+D &= 4 \\ B+D &= -2 \\ A &= 1, \end{aligned}$$

čija su rešenja $A = 1, B = -2, C = 2$ i $D = 0$, pa je

$$R(x) = \frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}.$$

14. Funkciju:

$$R(x) = \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka.

Rešenje:

Nule polinoma u imeniocu su: $x_1 = -1, x_2 = x_3 = i, x_4 = x_5 = -i$. Dalje, imamo da je

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Iz jednakosti polinoma

$$x^3+3 = A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)$$

sledi da je $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{3}{2}, D=-2$ i $E=1$, pa je

$$R(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-x+3}{x^2+1}+\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

15. Funkciju:

$$R(x)=\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$$

rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka.

Rešenje:

Data funkcija je neprava razlomljena racionalna funkcija jer je stepen polinoma u brojiocu veći od stepena polinoma u imeniocu pa prvo moramo da delimo:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4(x^2+4x-2)}{x^3-4x}.$$

Funkcija $R_1(x)=\dfrac{x^2+4x-2}{x^3-4x}$ je prava racionalna funkcija i rastavljena je u zbir parcijalnih razlomaka u prvom primeru. Konačno rešenje je:

$$R(x)=x^2+x+4+4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)=x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}$$
$$-\frac{3}{x+2}.$$

Zadaci

1. Podeliti polinome:

   $P_4(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ i $Q_2(x)=x^2-3x+1$.

2. Dati su polinomi $P_4(x)=x^4+x^2+1, Q_3(x)=2x^3-x^2+3x+5, R_2(x)=x^2-2x+5, S_1(x)=3x-2$ i $T_0(x)=-4$. Izvršiti sledeće operacije:

   (a) $3P_4(x)+2xQ_3(x)+4R_2(x)-5x^3S_1(x)+T_0(x)$;

(b) $(P_4(x)+Q_3(x))\cdot(R_2(x)+S_1(x))$;

(c) $\dfrac{P_4(x)\cdot R_2(x)}{Q_3(x)-T_0(x)}$; (d) $(T_0(x)-2S_1(x))^3-Q_3(x)$.

3. Koristeći Hornerovu šemu naći ostatak pri deljenju polinoma $P_5(x)=x^5+x^4+x^3+2x^2-x+3$ sa polinomima:

   (a) $Q_1(x)=x-2$; (b) $R_1(x)=x+1$;

   (c) $S_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$; (d) $T_1(x)=x+i$.

4. Odrediti brojeve p i q tako da polinom $P(x)$ bude deljiv polinomom $Q(x)$, ako je:

   (a) $P(x)=x^4-3x^2+px+q$ i $Q(x)=x^2-2x+4$;

   (b) $P(x)=x^3+px^2+qx+1$ i $Q(x)=x^2-3x-4$.

5. Odrediti brojeve p i q tako da polinom $P_4(x)=6x^4-7x^3+px^2+3x+2$ bude deljiv polinomom $Q_2(x)=x^2-x+q$.

6. U polinomu $P_3(x)=2x^3-3x^2+ax+20$ odrediti parametar a, ako znamo da je $\dfrac{1}{2}$ jedna nula datog polinoma.

7. Za koje vrednosti $a,b,c\in\mathbb{R}$ je polinom $P_3(x)=x^3+ax^2+bx+c$ deljiv binomima $x-1, x+2$ i $x-3$?

8. Odrediti nepoznate parametre polinoma $P_3(x)=x^3+ax^2+bx+c$, ako je $P_3(-1)=0$ i $P_3(x)$ je deljiv sa $(x-4)^2$. Takodje, naći $P_3(x+1)$ i $P_3(2)$.

9. Odrediti polinom trećeg stepena koji zadovoljava uslov $P_3(1-i)=2+i$ i $P_3(i)=1-2i$.

10. Odrediti polinom najmanjeg stepena tako da broj 2 bude dvostruki, a brojevi 1 i $2-i$ jednostruki koreni tog polinoma.

11. Polinom $P(x)$ pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 3, a pri deljenju sa $x-2$ ostatak 4. Koliki je ostatak pri deljenju sa $Q(x)=(x-1)(x-2)$?

12. (a) Naći parametre a i b ako su 4 i -7 nule polinoma $P_3(x)=x^3+2x^2+ax+b$;

    (b) Za koje vrednosti $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ je polinom $P_4(x)=x^4-x^3+ax^2+bx+c$ deljiv binomima $x-1, x+2$ i $x-3$?

(c) Odrediti parametre a,b,c i d tako da polinom $P_4(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ bude deljiv sa $x+1, x-2, x+3$ i $x-1$.

13. (a) Naći normiran polinom trećeg stepena, ako su $-2,-1$ i 2 njegove nule;

    (b) Odrediti normiran polinom šestog stepena čije su nule $1,2,3,4,5$ i 6.

14. Dati su polinomi $P_3(x) = x^3+ax^2-4x+5$, $Q_3(y) = (2a-4)y^3-2y^2+7y-2$. Ako je $P_3(1) = Q_3(1)$, odrediti a.

15. Odrediti polinom najmanjeg stepena tako da broj -1 bude dvostruki, a brojevi 2 i $1-i$ jednostruki koreni tog polinoma.

16. Naći racionalne nule polinoma i faktorisati ih nad poljem realnih brojeva:

    (a) $P_3(x) = x^3-x^2-5x-3$;

    (b) $P_4(x) = 3x^4+9x^3-33x^2-9x+30$;

    (c) $P_4(x) = x^4-34x^2+225$;

    (d) $P_8(x) = x^8+2x^7+4x^6+6x^5+3x^4-4x^2-8x-4$;

    (e) $P_7(x) = 3x^7+3x^6-42x^5-78x^4+111x^3+399x^2+360x+108$.

17. Odrediti $a,b \in \mathbb{R}$ tako da polinom $P_6(x) = 2x^6+ax^5-4x^4-5x^3-bx^2+4x+3$ bude deljiv sa $x-1$ i $x+3$, a zatim za tako odredjene parametre faktorisati $P_6(x)$ nad poljem realnih brojeva.

18. Naći racionalne nule polinoma i faktorisati ih u polju kompleksnih brojeva:

    (a) $P_3(z) = z^3+2z^2+9z+18$; (b) $P_4(z) = z^4+z^2-12$.

19. Na zbir parcijalnih razlomaka rastaviti racionalne funkcije:

    (a) $R_1(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+x-6}$; (b) $R_2(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}$;

    (c) $R_3(x) = \dfrac{2x^2+x-13}{x^3+4x^2-x-4}$; (d) $R_4(x) = \dfrac{x^2+9x+26}{x^3+2x^2-4x-8}$;

    (e) $R_5(x) = \dfrac{2x^3-x^2+x-4}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$; (f) $R_6(x) = \dfrac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}$;

    (g) $R_7(x) = \dfrac{6x^2+7x+18}{x^3+2x-12}$; (h) $R_8(x) = \dfrac{2x^4-x^3-11x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$;

    (i) $R_9(x) = \dfrac{4x^2-2x+2}{x^4-2x^3+4x^2-6x+3}$.

Rešenja

1. $P_4(x) = Q_2(x)(2x^2+3x+11)+25x-5.$

2. (a) $-8x^4+8x^3+13x^2+2x+19;$
   (b) $x^6+3x^5+5x^4+9x^3+9x^2+15x+18;$
   (c) $\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{15}{8}x-\frac{19}{16}+\frac{\frac{95}{16}x^2-\frac{245}{16}x+\frac{251}{16}}{2x^3-x^2+3x+9};$
   (d) $-218x^3+x^2-3x-5.$

3. (a) $65;$ (b) $5;$ (c) $\frac{103}{32};$ (d) $2+i.$

4. (a) Podelimo polinome $P(x)$ i $Q(x)$:

$$
\begin{array}{llllll}
(x^4 & & -3x^2 & +px & +q &) : (x^2-2x+4) = x^2+2x-3 \\
-(x^4 & -2x^3 & +4x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^3 & -7x^2 & +px & +q & \\
 & -(2x^3 & -4x^2 & +8x) & & \\
\hline
 & & -3x^2 & +(p-8)x & +q & \\
 & & -(3x^2 & +6x & -12) & \\
\hline
 & & & (p-14)x & +q & +12
\end{array}
$$

Na osnovu uslova da polinom $P(x)$ treba da bude deljiv polinomom $Q(x)$ sledi da ostatak treba da bude jednak nuli, tj.

$$(p-14)x+q+12=0 \Rightarrow p-14=0 \text{ i } q+12=0,$$

pa je $p=14$ i $q=-12$;

(b) Kako je $Q(x)=(x+1)(x-4)$ zadatak ćemo rešiti koristeći dva puta Hornerovu šemu.

x^3	x^2	x^1	x^0	c	r
1	p	q	1	-1	$p-q$
	1	$-1+p$	$1-p+q$	4	$13+3p+q$
		1	$3+p$		

Kako polinom $P(x)$ treba da bude deljiv polinomom $Q(x)$ sledi da oba ostatka treba da budu jednaka nuli, tj.

$$p-q=0 \text{ i } 13+3p+q=0 \Rightarrow p=q=-\frac{13}{4}.$$

5. $p_1=-7, q_1=-1$ i $p_2=-12, q_2=-2$.

6. Koristeći Bezuov stav znamo da je $P_3(\frac{1}{2})=0$, tj. $2\cdot(\frac{1}{2})^3-3\cdot(\frac{1}{2})^2+a\cdot\frac{1}{2}$ $+20=0$, tj. $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{a}{2}+20=0 \Rightarrow a=-39$.

7. Zadatak ćemo rešiti na tri načina:

   I način. Korišćenjem Bezuovog stava dobijamo $P_3(1)=0$, $P_3(-2)=0$ i $P_3(3)=0$, tj.

   $P_3(1)=0 \Rightarrow 1+a+b+c=0,$

   $P_3(-2)=0 \Rightarrow -8+4a-2b+c=0,$

   $P_3(3)=0 \Rightarrow 27+9a+3b+c=0.$

   Korišćenjem Gausovog postupka eliminacije dobijamo da je $a=-2$, $b=-5$ i $c=6$.

   II način. Koristićemo tri puta Hornerovu šemu i izjednačiti sva tri ostatka sa nulom.

x^3	x^2	x^1	x^0	c	r
1	a	b	c	1	$1+a+b+c$
	1	$1+a$	$1+a+b$	-2	$3-a+b$
		1	$-1+a$	3	$2+a$
			1		

   Kako su svi ostaci jednaki nuli imamo:

   $2+a=0,\ 3-a+b=0,\ 1+a+b+c=0 \Rightarrow a=-2, b=-5, c=6.$

   III način. Kako je $P_3(x)$ polinom stepena 3 a deljiv je binomima $x-1$, $x+2$ i $x-3$, to znači da je

$$P_3(x)=(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6,$$

   odakle direktno sledi da je $a=-2$, $b=-5$ i $c=6$.

8. *I način.* Iz $P_3(-1) = 0$ dobijamo prvu jednačinu $a - b + c = 1$. Kako je $x = 4$ dvostruka nula polinoma $P_3(x)$ najlakše je da preostale dve jednačine dobijemo tako što ćemo dva puta primeniti Hornerovu šemu, tj.

x^3	x^2	x^1	x^0	c	r
1	a	b	c	4	$64 + 16a + 4b + c$
	1	$4 + a$	$16 + 4a + b$	4	$48 + 8a + b$
		1	$8 + a$		

Oba ostatka su jednaka nuli pa dobijamo dve nove jednačine

$$64 + 16a + 4b + c = 0 \text{ i } 48 + 8a + b = 0$$

i rešavanjem sistema dobijamo da je $a = -7$, $b = 8$ i $c = 16$. Uvrštavajući a, b i c dobijamo da je $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$, odakle sledi da je

$P_3(x + 1) = (x + 1)^3 - 7(x + 1)^2 + 8(x + 1) + 16 = x^3 - 4x^2 - 3x + 18.$

Lako nalazimo da je $P_3(2) = 12$.

II način. $P_3(x) = (x + 1)(x - 4)^2 = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$, te je $a = -7, b = 8$ i $c = 16$.

9. Opšti oblik polinoma trećeg stepena je $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Kako je $P_3(1 - i) = 2 + i$ sledi da je $a(1 - i)^3 + b(1 - i)^2 + c(1 - i) + d = 2 + i$, tj. $-2a + c + d + i(-2a - 2b - c) = 2 + i$. Dva kompleksna broja su jednaka ako su im jednaki realni i imaginarni delovi, odakle dobijamo

$$-2a + c + d = 2 \text{ i } -2a - 2b - c = 1.$$

Iz $P_3(i) = 1 - 2i$ sledi da je $ai^3 + bi^2 + ci + d = 1 - 2i$, tj. $-b + d - i(a - c) = 1 - 2i$, odakle dobijamo druge dve jednačine

$$-b + d = 1 \text{ i } a - c = 2.$$

Sada sistem 4 jednačine sa 4 nepoznate rešavamo Gausovim postupkom eliminacije i dobijamo da je $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$ i $d = 3$. Znači polinom trećeg stepena koji se tražio je

$$P_3(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 3.$$

10. Ako je kompleksan broj $a+bi$ jedna nula polinoma onda i njemu konjugovano kompleksni broj mora biti nula istog polinoma. Znači, polinom koji zadovoljava uslove iz zadatka je stepena 5 i on je

$$P_5(x) = (x-2)^2(x-1)(x-(2-i))(x-(2+i))$$

$$= (x-2)^2(x-1)(x^2-4x+5) = x^5-9x^4+33x^3-61x^2+56x-20.$$

11. Znamo da za svaka dva polinoma P_n i Q_m postoje polinomi S_p i R_k takvi da je $P_n = Q_m \cdot S_p + R_k$, gde je $k < m$. Neka je S količnik pri deljenju polinoma P polinomom Q. Tada je

$$P(x) = S(x)\cdot(x-1)\cdot(x-2)+R(x),$$

pri čemu stepen ostatka mora biti manji od stepena polinoma Q. Ostatak je najviše polinom stepena jedan, tj. $R(x) = ax+b$. Znači $P(x) = S(x)\cdot(x-1)\cdot(x-2)+ax+b$. Na osnovu uslova zadatka polinom $P(x)$ pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 3, tj. $P(1) = 3$ odakle dobijamo prvu jednačinu $a+b=3$. Drugu jednačinu dobijamo na osnovu uslova da polinom pri deljenju sa $x-2$ daje ostatak 4, tj. $2a+b=4$. Dobili smo dve jednačine sa dve nepoznate odakle sledi da je $a=1$ i $b=2$. Dakle, ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $Q(x)$ je $R(x) = x+2$.

12.
    (a) $a=-31, b=28$; (b) $a=-7, b=1, c=6$;

    (c) $a=1, b=-7, c=-1, d=6$.

13. (a) $P_3(x) = x^3+x^2-4x-4$;

    (b) $P_6(x) = x^6-21x^5+175x^4-735x^3+1624x^2-1764x+720$.

14. $a=3$.

15. $P_5(x) = x^5-2x^4-x^3+4x^2-2x-4$.

16. (a) $P_3(x) = (x+1)^2(x-3)$;

    (b) $P_4(x) = 3(x-1)(x+1)(x-2)(x+5)$;

    (c) $P_4(x) = (x-5)(x+5)(x-3)(x+3)$;

    (d) $P_8(x) = (x+1)^3(x-1)(x^2+2)^2$;

    (e) $P_7(x) = 3(x+2)^2(x-3)^2(x+1)^3$.

17. Parametri su $a=b=5$. Rezultat faktorizacije je

$$P_6(x)=2(x+3)(x+\frac{1}{2})(x-1)^2(x^2+x+1).$$

18. (a) $P_3(z)=(z+2)(z+3i)(z-3i)$;
    (b) $P_4(z)=(z+2i)(z-2i)(z+\sqrt{3})(z-\sqrt{3})$.

19. (a) $R_1(x)=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{2}{x-2}$;
    (b) $R_2(x)=\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{9}{(x-1)^2}$;
    (c) $R_3(x)=-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x+4}$;
    (d) $R_4(x)=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{(x+2)^2}$;
    (e) $R_5(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x}{x^2+1}$;
    (f) $R_6(x)=\dfrac{5}{x^2-6x+13}+\dfrac{30x-77}{(x^2-6x+13)^2}$;
    (g) $R_7(x)=\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{2x+3}{x^2+2x+6}$;
    (h) $R_8(x)=2-\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{6}{(x+1)^2}-\dfrac{5}{x^2+1}$;
    (i) $R_9(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{-x+2}{x^2+3}$.

Glava 3

Determinante

• **Determinanta** reda n je broj dat u sledećem obliku:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Brojevi a_{ij}, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ su **elementi** determinante, broj i označava **vrstu** a j **kolonu** u kojoj se nalazi element a_{ij}.
• **Glavnu dijagonalu** čine elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, a **sporednu dijagonalu** elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$.
• Vrednost determinante reda 1 jednaka je vrednosti njenog jedinog elementa, tj.

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

• Vrednost determinante reda 2 je jednaka razlici proizvoda elemenata na glavnoj i sporednoj dijagonali, odnosno

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

• **Sarusovo pravilo (važi samo za determinante reda 3):**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

• **Minor** elementa a_{ij}, u oznaci M_{ij}, je determinanta reda $n-1$ dobijena iz determinante reda n precrtavanjem $i-$ te vrste i $j-$ te kolone.
• **Kofaktor** elementa a_{ij}, u oznaci A_{ij}, je dat sa

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

• Vrednost svake determinante reda n možemo odrediti **razvijanjem po vrsti (koloni)**. Po $i-$ toj vrsti determinantu razvijamo na sledeći način:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

a ako je razvijemo po $j-$ toj koloni dobijamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

• **Osobine determinanti:**

1. Ako dve vrste (ili kolone) zamene mesta, determinanta menja znak.

2. Determinanta se množi brojem tako što se elementi jedne vrste (ili kolone) pomnože tim brojem.

3. Vrednost determinante je jednaka nuli, ako su bilo koje dve vrste (ili kolone) jednake ili proporcionalne.

4. Ako se svaki element $k-$ te vrste prikaže kao $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tada važi:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \ldots & b_{kn}+c_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{k1} & c_{k2} & \ldots & c_{kn} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne njene vrste (ili kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (ili kolone), prethodno pomnožene nekim brojem.

6. Vrednost determinante čiji su elementi ispod ili iznad glavne dijagonale jednaki nuli, jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

Primeri

1. Odrediti vrednosti sledećih determinanti: $|5|$, $|-5|$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$.

   Rešenje:

   Vrednost determinante $|a_{11}| = a_{11}$, pa na osnovu toga zaključujemo da je:

   $|5| = 5,\ |-5| = -5,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 5 + 6 = 11.$

2. Data je determinanta: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Odrediti M_{13}, A_{13}, M_{32} i A_{32}.

   Rešenje:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3,\ A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6.$$

3. Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$:

   (a) razvijanjem po prvoj vrsti;

   (b) razvijanjem po drugoj koloni;

   (c) koristeći Sarusovo pravilo.

   Rešenje:

   (a) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$
   $$= 12 + 11 - 6 = 17;$$

   (b) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
   $$= 11 + 6 - 0 = 17;$$

   (c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{matrix} = 2 \cdot (-2) \cdot (-3)$$
   $$+1 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 4 \cdot (-3) = 17.$$

4. Izračunati vrednost determinante reda 4 razvijanjem po trećoj koloni (izabrana je jer ima nulu kao element):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

   Rešenje:

   Razvijanjem po trećoj koloni dobijamo:

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Problem izračunavanja vrednosti determinante reda 4 sveli smo na vidjen slučaj reda 3. Prvu determinantu nema potrebe da računamo jer je pomnožena sa nulom, a za ostale tri dobijamo vrednosti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Konačno, vrednost početne determinante je $(-1)\cdot(-9) = 9$.

5. Izračunati vrednost izraza:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rešenje:

Vrednost izraza dobijamo tako što ćemo izračunati vrednost svake determinante pojedinačno. Tako dobijamo rešenje: $7 + 3 \cdot 10 \cdot (-2) = -53$.

6. Koristeći osobinu 4. razložiti datu determinantu na zbir dve determinante i izračunati njenu vrednost $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Rešenje:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ n & n & n \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dobijene determinante imaju po dve proporcionalne vrste te su po osobini 3. njihove vrednosti jednake 0, pa je i vrednost početne determinante jednaka 0.

7. Izračunati vrednost determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Rešenje:

Svi elementi ispod glavne dijagonale su jednaki nuli, pa njenu vrednost dobijamo na osnovu osobine 6. množenjem elemenata na glavnoj dijagonali:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 5 = -30.$$

8. Izračunati vrednost determinante razvijanjem po drugoj koloni i koristeći osobinu 5. :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Rešenje:

Vrednost determinante smo već odredili razvijajući je po drugoj koloni. Sada ćemo množenjem prve vrste sa 2 i dodavanjem na drugu vrstu napraviti još jednu nulu u drugoj koloni i time dodatno olakšati razvijanje po ovoj koloni:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 17.$$

9. Dokazati da je

$$\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3.$$

Rešenje:

Koristeći osobinu 5. vrednost determinante se ne menja ako elemente druge i treće kolone pomnožimo sa 1 i dodamo odgovarajućim elementima prve kolone. Tada je

$$\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x+2y+2z & y & z \\ 2x+2y+2z & x+2y+z & z \\ 2x+2y+2z & y & x+y+2z \end{vmatrix}.$$

Sada, koristeći osobinu 2. dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 2x+2y+2z & y & z \\ 2x+2y+2z & x+2y+z & z \\ 2x+2y+2z & y & x+y+2z \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x+2y+z & z \\ 1 & y & x+y+2z \end{vmatrix}.$$

Ponovo, koristeći osobinu 5. vrednost determinante se ne menja, ako elemente prve vrste pomnožimo sa (-1) i dodamo odgovarajućim elementima druge i treće vrste

$$2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x+2y+z & z \\ 1 & y & x+y+2z \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & x+y+z & 0 \\ 0 & 0 & x+y+z \end{vmatrix}.$$

Konačno, koristeći osobinu 6. imamo da je

$$\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & x+y+z & 0 \\ 0 & 0 & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z)^2,$$

pa je vrednost početne determinante jednaka $2(x+y+z)^3$.

Zadaci

1. Odrediti brojne vrednosti determinanti:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} 198 & 450 & 352 \\ 185 & 451 & 364 \\ 195 & 451 & 354 \end{vmatrix}$.

2. Izračunati:

$$A = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Odrediti vrednosti determinanti (i je imaginarna jedinica):

(a) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} -i & 1 & i \\ 0 & -i & -1 \\ i & 1 & -i \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x \\ 1 & x^2 & x \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$; (g) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(h) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$; (i) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(j) $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2a & 1-a & -1 \\ a-2 & 3 & -a \end{vmatrix}$.

4. Naći racionalne nule polinoma i rastaviti ga na činioce:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix} - 2(4x-1).$$

5. Rešiti jednačine:

(a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; (b) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 6-x^2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6-x^2 \end{vmatrix} = 0$; (d) $\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 1 \\ a+5 & 3 & 1 \\ a+3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = a^2+1$;

(e) $\begin{vmatrix} x-6 & 1 & -3 & x-4 & 2x-1 \\ 7 & 2x+3 & 4 & x+6 & 3 \\ 2x-3 & 3 & x-3 & x-3 & x \\ 5 & x+1 & 4 & x+6 & 1 \\ -5 & 1 & -3 & x-4 & x \end{vmatrix} = 0.$

6. Rešiti jednačine u polju kompleksnih brojeva:

(a) $\begin{vmatrix} z & z^2 & z \\ 1 & z & 0 \\ 2z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = 27$; (b) $\begin{vmatrix} -z^2+3+i & 1 & z^2-3-i \\ z^2-z+2i+9 & 4 & z-i-8 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$

7. Za koje vrednosti promenljive x je zadovoljena sledeća jednakost:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x \\ 2x & 2x+6 & 2x+3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & a \\ 3 & a+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & x+1 & 3x+2 \end{vmatrix}$$

$$-(\sqrt{2}i)^2\begin{vmatrix} x+1 & a & 1 \\ 2x+3 & 1+2a & 3 \\ x+2 & a & 2 \end{vmatrix} - \ln^3 e^2 = 0?$$

8. Dokazati:

(a) $\begin{vmatrix} x+y+z & 1 & 2 \\ x+y & 2 & 1 \\ x & 3 & 1 \end{vmatrix} = x+4y-z;$

(b) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3;$

(c) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

Rešenja

1. (a) -21; (b) -29; (c) 0; (d) -33; (e) -10000.

2. $A=-6$.

3. (a) Množenjem druge vrste sa $-i$ i dodavanjem prvoj vrsti data determinanta postaje

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+i)\begin{vmatrix} -i & 1 \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} = (1+i)\cdot(-(1-i)) = -2;$$

(b) $-2i$; (c) $2a^2(a+x)$; (d) $-x(1-x)^2$; (e) a^3; (f) $(1-a)^2(a+2)$;

(g) $(a+b+c)(-a^2-b^2-c^2+ac+ab+bc)$; (h) -2;

(i) Množenjem prve vrste sa -1 i dodavanjem drugoj i trećoj data determinanta postaje

$$D = \begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ -(\sin\alpha+\cos\alpha) & \cos\alpha-\sin\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -(\sin\alpha+\cos\alpha) & \cos\alpha-\sin\alpha \\ -\cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1;$$

(j) Množenjem druge vrste sa -1 i dodavanjem trećoj dobijamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2a & 1-a & -1 \\ -a-2 & a+2 & 1-a \end{vmatrix}.$$

Sada prvu kolonu dodamo drugoj koloni i imamo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ 2a & a+1 & -1 \\ -a-2 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & -1 \\ -a-2 & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= (a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2a-1 & 0 & -3 \\ -a-2 & 0 & 1-a \end{vmatrix} = (a+1)(2a^2+7).$$

4. Naći ćemo prvo vrednost determinante. Množenjem druge kolone sa -1 i dodavanjem trećoj dobijamo

$$D = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 1 & 1-x & x \\ 2 & 2 & -x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 3 & 3-x & 0 \end{vmatrix} = -x\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} = -x(x^2-4x-3).$$

Sada je

$P(x) = -x^3+4x^2+3x-8x+2 = -x^3+4x^2-5x+2 = -(x-2)(x-1)^2.$

5. (a) $x_1 = 2, x_2 = 3$; (b) $x_1 = 2,\ x_2 = -10$; (c) $x_{1,2} = 0, x_3 = 2, x_4 = -2$;

(d) $a_1 = -1, a_2 = 2$;

(e) Množenjem prve vrste sa -1 i dodavanjem petoj, i množenjem druge vrste sa -1 i dodavanjem četvrtoj vrsti, dobijamo

$$\begin{vmatrix} x-6 & 1 & -3 & x-4 & 2x-1 \\ 7 & 2x+3 & 4 & x+6 & 3 \\ 2x-3 & 3 & x-3 & x-3 & x \\ -2 & -x-2 & 0 & 0 & -2 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-6 & 1 & -3 & x-4 & x+5 \\ 7 & 2x+3 & 4 & x+6 & -4 \\ 2x-3 & 3 & x-3 & x-3 & 3-x \\ -2 & -x-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(x+2)(x-3) \begin{vmatrix} -3 & x-4 & x+5 \\ 4 & x+6 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x+2)(x-3)(x+2)(x+2).$$

Treba nam takvo x za koje je $(x-1)(x+2)^3(x-3)=0$, a to je za $x_1 = 1$, $x_{2,3,4} = -2$ i $x_5 = 3$.

6. (a) Data jednačina se svede na korenovanje kompleksnog broja $z^3 = -27 = 27e^{\pi i}$ i rešenja su: $z_0 = 3e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_1 = 3e^{\frac{3\pi}{3}i} = -3$ i $z_2 = 3e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$;

   (b) Data jednačina je ekvivalentna jednačini $z^4 = 2i$ i njena rešenja su: $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{8}i}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{8}i}$, $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{9\pi}{8}i}$ i $z_4 = \sqrt[4]{2}e^{\frac{13\pi}{8}i}$.

7. Ako izračunamo vrednosti determinanti dobijamo jednačinu $x^3+5x^2+2x-8=0$, čija su rešenja: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ i $x_3 = -4$.

Glava 4

Matrice

• Matrica tipa $m \times n$ je pravougaona šema brojeva koja ima m-vrsta i n-kolona i zapisuje se u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n},$$

ili skraćeno $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.
• **Kvadratne matrice** su matrice kod kojih je $m = n$.
• **Jedinična matrica:**

$$I_n = E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

• Matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ su **jednake**, ako je $m = p$ i $n = q$ i ako su elementi jedne matrice jednaki odgovarajućim elementima druge matrice.
• **Sabiranje (oduzimanje) matrica:** $\boxed{[a_{ij}]_{m\times n} \pm [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}.}$
• **Množenje matrice skalarom:** $\boxed{\alpha \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}.}$
• **Proizvod matrica** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ je matrica $C = A \cdot B = [c_{ij}]_{m\times p}$, čije

elemente računamo na sledeći način:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.}$$

U opštem slučaju množenje matrica nije komutativno, tj. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

• **Transponovana matrica** matrice $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ je $\boxed{A^T = [a_{ji}]_{n\times m},}$ odnosno

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

• **Adjungovana matrica** matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ je

$$\boxed{adjA = A^* = [A_{ji}]_{n\times n},}$$

gde su A_{ji} odgovarajući kofaktori transponovane matrice, odnosno

$$A^T = A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

• **Inverzna matrica** A^{-1} za matricu $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ je:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA} A^*.}$$

• Neka je $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Tada važi:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n.}$$

• Za matricu za koju ne postoji inverzna matrica kažemo da je **singularna matrica**.
• Ako za matricu A postoji inverzna matrica, tada kažemo da je ona **regularna**.
• Matrica A je regularna ako i samo ako je $detA \neq 0$.
• Neka je data matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. **Kvadratna podmatrica** matrice A, reda manjeg ili jednakog od $\min(m,n)$, je matrica do koje se dolazi izbacivanjem odredjenog broja vrsta i kolona matrice A.
• **Rang matrice** A, u oznaci $r(A)$ ili $rang(A)$, je red njene regularne kvadratne podmatrice takve da su sve podmatrice većeg reda, ako postoje, singularne.
• **Elementarne transformacije matrice** A su sledeće transformacije:

1. zamena bilo koje dve vrste (kolone) matrice A;
2. množenje bilo koje vrste (kolone) brojem različitim od nule;
3. množenje jedne vrste (kolone) nekim brojem različitim od nule i dodavanje nekoj drugoj vrsti (koloni) matrice A.

• Matrice A i B su **slične**, u oznaci $A \sim B$, ako se jedna od njih može dobiti primenom elementarnih transformacija na drugu matricu. Slične matrice imaju isti rang.
• Svaka matrica $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ koja je različita od nula matrice može se elementarnim transformacijama svesti na matricu $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n},$$

gde je $b_{ii} \neq 0$, za svako $i = 1, 2, \dots r$.
• **Matrična jednačina** oblika $AX = B$ i $XA = B$ imaju rešenja $\boxed{X = A^{-1}B,}$ odnosno $\boxed{X = BA^{-1}.}$

Primeri

1. Proveriti jednakost matrica:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times 3}$.

Rešenje:

Matrice pod (a) imaju iste elemente, ali su različitog formata pa nisu jednake, dok matrice pod (b) nisu jednake, zbog različitog elementa na prvoj poziciji u trećoj vrsti.

2. Sabrati matrice:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ i $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$.

Rešenje:

Matrice pod (a) se ne mogu sabrati jer nisu istog formata, dok je pod (b) zbir matrica $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ dobijena sabiranjem elemenata na istim pozicijama datih matrica.

3. Pomnožiti matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ sa -2.

   Rešenje:

   Pri množenju matrice A sa brojem -2 dobijamo novu matricu D, gde je

$$D = -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -14 & -10 & -6 \\ -8 & -14 & -16 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

4. Neka su date kvadratne matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

   Izračunati $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

   Rešenje:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot(-2) \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2};$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 3\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & -1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

   Iz priloženog vidimo da $A \cdot B \neq B \cdot A$, tj. da za operaciju množenja matrica ne važi zakon komutativnosti.

5. Neka su date matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pomožiti, ako je to moguće, AB, AC, BA, BC, CA, CB.

Rešenje:

Množenja AB i CA nisu moguća, jer broj kolona prvih matrica nije jednak sa brojem vrsta drugih matrica u proizvodu. Moguća su sledeća množenja:

$$A\cdot C=\begin{bmatrix}1&4&5\\7&-2&6\\2&0&-1\end{bmatrix}_{3\times3}\cdot\begin{bmatrix}-2&0&1&-3\\2&1&0&1\\-2&1&1&2\end{bmatrix}_{3\times4}$$

$$=\begin{bmatrix}-4&9&6&11\\-30&4&13&-11\\-2&-1&1&-8\end{bmatrix}_{3\times4};$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&3&2\\5&2&3\\5&4&4\end{bmatrix}_{4\times3}\cdot\begin{bmatrix}1&4&5\\7&-2&6\\2&0&-1\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}25&2&27\\26&-2&21\\25&16&34\\41&12&45\end{bmatrix}_{4\times3};$$

$$B\cdot C=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&3&2\\5&2&3\\5&4&4\end{bmatrix}_{4\times3}\cdot\begin{bmatrix}-2&0&1&-3\\2&1&0&1\\-2&1&1&2\end{bmatrix}_{3\times4}$$

$$=\begin{bmatrix}0&4&3&-1\\0&5&3&4\\-12&5&8&-7\\-10&8&9&-3\end{bmatrix}_{4\times4};$$

$$C\cdot B=\begin{bmatrix}-2&0&1&-3\\2&1&0&1\\-2&1&1&2\end{bmatrix}_{3\times4}\cdot\begin{bmatrix}2&3&1\\1&3&2\\5&2&3\\5&4&4\end{bmatrix}_{4\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}-14&-16&-11\\10&13&8\\12&7&11\end{bmatrix}_{3\times3}.$$

6. Data je matrica $C=\begin{bmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}$. Izračunati C^2 i C^3.

Rešenje:

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -5 \\ 8 & 1 & 3 \\ 15 & 16 & 9 \end{bmatrix}.$$

7. Odrediti transponovanu i adjungovanu matricu za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Transponovanu matricu možemo efektno pronaći tako što u vrste upisujemo elemente kolona i obrnuto. Za matricu A njena transponovana je:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elemenat adjungovane matrice A^*, a^*_{ij} pronalazimo tako što iz transponovane matrice izračunamo odgovarajuće kofaktore, koji se dobijaju precrtavanjem i-te vrste i j-te kolone, a zatim se pomnože sa $(-1)^{i+j}$. Za matricu A dobijamo da je njena adjungovana matrica:

$$A^* = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ odrediti A^{-1}.

Rešenje:

Kako je $detA = 5 \neq 0$, znamo da postoji inverzna matrica za matricu A. U prethodnom primeru smo izračunali A^* i koristeći prethodnu formulu imamo:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^* = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

9. Neka su date matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešiti matričnu jednačinu $AX = B$.

Rešenje:

Kako je $X = A^{-1}B$ i

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

imamo da je

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

10. Rešiti matričnu jednačinu $2AX + I = BX + C$, gde su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Datu jednačinu možemo zapisati kao $(2A - B)X = C - I$. Neka je $D = 2A - B$ i $F = C - I$, tada imamo $DX = F$, što posle množenja sa D^{-1} sa leve strane daje $X = D^{-1}F$. Sada možemo naći nepoznatu matricu X jer je:

$$D = 2A - C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \ F = C - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

pa je

$$X = D^{-1}B = \frac{1}{detD}D^*F$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Odrediti kvadratne podmatrice reda 2 i 3 za matricu A :

$$A = \begin{bmatrix} 41 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Ova matrica ima četiri podmatrice reda 3, koje se dobijaju precrtavanjem po jedne od vrsta matrice. Na primer, kada precrtamo drugu vrstu dobijamo:

$$\begin{bmatrix} 41 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podmatrice reda 2 dobijaju se precrtavanjem jedne kolone i dve vrste, i ima ih 18. Na primer, kada precrtamo treću kolonu i drugu i treću vrstu matrice A dobijamo:

$$\begin{bmatrix} 41 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

12. Odredimo rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Najveća kvadratna podmatrica matrice A je reda 3, tj. sama matrica A, a kako je $\det A = -3 \neq 0$, sledi da je $r(A) = 3$.

13. Odredimo rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Determinanta matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

je 0, pa tražimo kvadratne podmatrice reda 2. Matrica B ima 9 kvadratnih podmatrica reda 2 i to su:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Da bi rang matrice B bio 2 dovoljno je naći bar jednu od ovih 9 podmatrica, čija je determinanta različita od 0 i to je ispunjeno već za prvu navedenu podmatricu, pa je $r(B) = 2$.

14. Odrediti rang matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Dobijamo da je $\det C = 0$. Medju njenih 9 kvadratnih podmatrica reda 2 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ne nalazimo ni jednu regularnu matricu, pa posmatramo kvadratne podmatrice reda 1 :

$$[1], [2], \dots, [9]$$

i kako je $|1| = 1 \neq 0$, zaključujemo da je $r(C) = 1$.

15. Odrediti rang pravougaone matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Ako u matrici A izostavimo treću kolonu, tada imamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je ova matrica singularna, jer su u drugoj koloni svi elementi jednaki 0. Takodje, svaka druga podmatrica reda 3 matrice A je singularna. Kada precrtamo prvu i drugu kolonu i drugu vrstu, dobijamo kvadratnu matricu reda 2 koja je regularna, jer je

$$det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

iz čega zaključujemo da je $r(A) = 2$.

16. Primenom elementarnih transformacija odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle po jednoj od osobina determinanti vidimo da je $\det A = -3 \neq 0$, pa je $r(A) = 3$.

17. Primenom elementarnih transformacija odrediti rang matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Kako je

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vidimo da je $\det B = 0$, ali nalazimo kvadratnu podmatricu reda 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

čija determinanta ima vrednost $-3 \neq 0$, pa je $r(B) = 2$.

18. Primenom elementarnih transformacija odrediti rang matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Iz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

uočavamo da je $\det C = 0$, ali i da su sve kvadratne podmatrice reda 2 singularne, pa je $r(C) = 1$.

19. Primenom elementarnih transformacija odrediti rang matrice

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 14 & 2 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 23 & -4 & 23 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Nakon primenjenih elementarnih transformacija

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 14 & 2 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 23 & -4 & 23 & 2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 9 & 1 & 4 \\ 0 & 20 & -2 & 18 & 2 & 8 \\ 0 & 20 & -2 & 18 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -1 & 9 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vidimo da je $r(D) = 2$.

Zadaci

1. Ako je moguće, izvršiti sledeće operacije sa matricama:

   (a) $\begin{bmatrix} 41 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

   (b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

   (c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -8 & 4 & 12 \\ -6 & -4 & 4 \\ -26 & -14 & 34 \end{bmatrix} - 10\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{10} \\ -\frac{3}{10} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ -2 & -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

2. Za matrice:

   $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$

   $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{7}{6} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{6} \\ -2 & -1 & \frac{5}{6} \end{bmatrix},$

   $F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   izvršiti sledeće operacije, ako je to moguće:

   (a) AB; (b) BA; (c) CD; (d) DC;
   (e) $AD+2D$; (f) $2CB$; (g) $2F^2$; (h) DB;
   (i) $6E(A+B)$; (j) $6E(B+A)$; (k) $(A+B)^3$; (l) $FEAB$.

3. Izračunati $(A+3I)(3A-B)+2I^5A^2-2AB$, ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Da li navedene matrice imaju inverznu matricu?

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Odrediti inverznu matricu za matrice:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

6. Rešiti jednačinu $XA = B$, gde je:

A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

7. Rešiti jednačinu $A^2X = D$, gde je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Koristeći matrice iz zadatka 2, rešiti sledeće matrične jednačine:

(a) $AX = B$; (b) $XA = B$; (c) $AX = D$;

(d) $XA = C$; (e) $(A + A^2)X = 2B + I$.

9. Rešiti matrične jednačine:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$;

(b) $X \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -6 & 7 & -13 \\ -20 & 10 & -28 \\ -7 & -6 & -7 \end{bmatrix} = 3X - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Naći rang sledećih matrica:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & 11 & 6 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}$;

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$; (e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $F = \begin{bmatrix} 2001 & 2002 & 2003 \\ 2004 & 2005 & 2006 \\ 4005 & 4007 & 4009 \end{bmatrix}$; (g) $G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$;

(h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; (i) $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(j) $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\frac{5162}{2876} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (k) $L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 10 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$;

(l) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 33 & 11 & 22 & 0 \end{bmatrix}$; (m) $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 10 & \cos 0 \\ 8 & 9 & 11 & 23 & 16 \end{bmatrix}$;

(n) $P = \begin{bmatrix} 5 & -25 & 125 & 625 & 10 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 12 & -44 & 260 & 1264 & 38 & 52 \\ 18 & -66 & 490 & 1896 & 57 & 78 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & -48 & 250 & 1252 & 20 & 22 \end{bmatrix}$;

(o) $R = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & 11 & 6 & 2 \end{bmatrix}$;(p) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 12 & 12 & 15 & 16 & 17 \\ 6 & 14 & 12 & 16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$.

Rešenja

1. (a) $\begin{bmatrix} 39 & 1 & 3 \\ -1 & 6 & 6 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & -8 \\ -1 & -8 & 6 \\ 7 & -12 & 4 \\ 7 & 3 & 15 \end{bmatrix}$.

   Pod (b) i (d) nije moguće izvršiti sabiranje.

2.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 4 & 1 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ -6 & -1 & -5 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 5 & 6 & -6 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 20 & -6 & -6 \\ -8 & 0 & -10 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 8 & 14 & -4 & 6 \\ 4 & 10 & 0 & -8 \\ 12 & -44 & 28 & -14 \\ 2 & -22 & 28 & -8 \end{bmatrix}$; (h) ne može;

(i) $\begin{bmatrix} -12 & -23 & -4 \\ 8 & -8 & -4 \\ 20 & -25 & 0 \\ 68 & -43 & 18 \end{bmatrix}$; (j) $\begin{bmatrix} -12 & -23 & -4 \\ 8 & -8 & -4 \\ 20 & -25 & 0 \\ 68 & -43 & 18 \end{bmatrix}$;

(k) $\begin{bmatrix} -48 & 48 & 5 \\ 16 & -16 & 5 \\ 44 & -69 & 0 \end{bmatrix}$; (l) $\begin{bmatrix} -27 & \frac{49}{6} & \frac{133}{6} \\ 10 & -12 & -\frac{38}{3} \\ 9 & -\frac{47}{2} & -\frac{37}{6} \\ -21 & \frac{215}{6} & \frac{91}{6} \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 53 & -1 & 58 \\ 3 & 19 & -25 \\ 45 & -13 & 70 \end{bmatrix}$.

4. (a) Ima; (b) nema; (c) ima; (d) nema.

5. (a) $A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -10 & 1 \\ -23 & -18 & 47 & -20 \\ 6 & 1 & -13 & 3 \\ 9 & 10 & -28 & 13 \end{bmatrix}$;

(b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$; (c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

6.

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{\det A}BA^* = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 8 & -8 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & -12 & 18 \\ 12 & -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

7. Neka je $C = A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 15 & 0 \\ 3 & 12 & 15 & 1 \\ 4 & 9 & 10 & 4 \\ 8 & 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$. Tada je $CX = D \Rightarrow X = C^{-1}D$

$$= \frac{1}{\det C}C^*D = \frac{1}{441}\begin{bmatrix} -136 & 131 & -24 & 35 \\ -358 & 494 & -141 & -70 \\ 301 & -371 & 105 & 49 \\ 189 & -315 & 189 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{441}\begin{bmatrix} 155 \\ 635 \\ -476 \\ -504 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{155}{441} \\ \frac{635}{441} \\ -\frac{68}{63} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix}.$$

8. (a) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & 16 & -4 \\ 0 & -10 & -4 \end{bmatrix}$; (b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; (c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -8 & 8 & -12 \\ 11 & -3 & 13 \end{bmatrix}$; (e) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -21 & -5 \\ 8 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$.

9. (a) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$; (b) $X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$; (c) $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

10.

(a) rang(A) $= 4$; (b) rang(B) $= 1$; (c) rang(C) $= 2$; (d) rang(D) $= 2$;
(e) rang(E) $= 3$; (f) rang(F) $= 2$; (g) rang(G) $= 1$; (h) rang(H) $= 2$;
(i) rang(J) $= 3$; (j) rang(K) $= 1$; (k) rang(L) $= 2$; (l) rang(M) $= 2$;
(m) rang(N) $= 4$; (n) rang(P) $= 5$; (o) rang(R) $= 4$; (p) rang(Q) $= 3$.

Glava 5

Sistemi linearnih jednačina

• **Sistem** od m **linearnih jednačina** sa n nepoznatih dat je sa:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **nepoznate** sistema, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$ **koeficijenti** sistema, a $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ **slobodni članovi** sistema.
• Sistem je **homogen** ako je $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.
• Sistem je **nehomogen** ako je $b_i \neq 0$ za bar jedno $i = 1, 2, \ldots, m$.
• **Rešenje sistema** je uredjena $n-$ torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ realnih brojeva takvih da zadovoljavaju svih m jednačina sistema.
• Sistem linearnih jednačina može biti:

1. **Saglasan** (moguć, rešiv) - ako ima bar jedno rešenje. Takve sisteme delimo na:

   (a) sisteme koji imaju jedinstveno rešenje,

   (b) sisteme koji imaju beskonačno mnogo rešenja. Broj promenljivih koje slobodno biramo naziva se **broj stepeni slobode** sistema linearnih jednačina;

2. **Nesaglasan** (nemoguć, protivrečan) - ako nema nijedno rešenje.

• Homogen sistem uvek ima **trivijalno** rešenje: $(0, 0, \ldots, 0)$.
• Ako se u sistemu izvrše sledeće transformacije:

1. medjusobna zamena bilo koje dve jednačine sistema,
2. množenje bilo koje jednačine brojem različitim od nule,
3. jedna jednačina se pomnoži nekim brojem i doda nekoj drugoj jednačini sistema,

tada dobijamo novi sistem jednačina čija rešenja su identična rešenjima polaznog sistema. Kažemo da su posmatrani sistemi ekvivalentni.
• **Gausov metod eliminacije** sastoji se u tome da se pomoću gore pomenutih transformacija izvrši eliminacija jedne po jedne promenjive iz jednačina sistema i tako se sistem svede na takozvani trougaoni oblik iz kojeg se lako dolazi do rešenja sistema.
• **Kramerova pravila.** Neka je dat sistem od n jednačina sa n nepoznatih. Formiramo determinantu sistema D_s, kao i determinante D_{x_i}, $i \in \{1,2,\dots,n\}$, na sledeći način:

$$D_s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, D_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

1. Ako je $D_s \neq 0$ tada sistem ima *jedinstveno rešenje* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i ono je:

$$\boxed{x_1 = \frac{D_{x_1}}{D_s},\ x_2 = \frac{D_{x_2}}{D_s}, \dots, x_n = \frac{D_{x_n}}{D_s}.}$$

2. Ako je $D_s = 0$ tada sistem ili *nema rešenja* ili ima *beskonačno mnogo rešenja*.
   (a) Ako je $D_s = 0$, i za bar jedno $i \in \{1,2,\dots,n\}$ je $D_{x_i} \neq 0$, tada sistem *nema rešenja*.
   (b) Ako je $D_s = 0$ i $D_{x_i} = 0$, za svako $i \in \{1,2,\dots,n\}$, tada sistem ili nema rešenja ili ima beskonačno mnogo rešenja, što možemo proveriti Gausovim metodom.

• Za homogene sisteme važi:

1. Ako je $D_S \neq 0$ sistem ima samo trivijalno rešenje.
2. Ako je $D_s = 0$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja.

• Neka je dat sistem od m jednačina sa n nepoznatih. Matricu sistema M_s i proširenu matricu sistema M_p formiramo na sledeći način:

$$M_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, M_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}.$$

• **Kroneker-Kapelijeva teorema.** Sistem linearnih jednačina je saglasan (ima rešenja) ako je rang matrice sistema M_s jednak rangu proširene matrice sistema M_p. Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. Ako je $r(M_s) < r(M_p)$ tada sistem nema rešenja.
2. Ako je $r(M_s) = r(M_s) = n$ tada sistem ima jedinstveno rešenje.
3. Ako je $r(M_s) = r(M_p) = k < n$ tada sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa $n-k$ stepeni slobode.

• **Rešavanje linearnog sistema jednačina preko matrica.** Sistem od n jednačina sa n nepoznatih možemo predstaviti kao matričnu jednačinu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Kraće zapisano, posmatramo matričnu jednačinu $A \cdot X = B$ čije rešenje je:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Primeri

1. Rešiti sisteme linearnih jednačina:

(a) $\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array};$ (b) $\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & + & y & = & 1 \end{array};$

(c) $\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ 2x & + & 2y & = & 6 \end{array}$; (d) $\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array}$.

Rešenje:

(a) Rešenje sistema je uredjen par $(2, 1)$, tj. vrednosti $x = 2$ i $y = 1$ zadovoljavaju obe jednačine (sistem je saglasan) i to je jedino rešenje sistema (sistem ima jedinstveno rešenje);

(b) Jednačine sistema su u kontradikciji i ne postoji ni jedan uredjen par (x,y) koji bi zadovoljio obe jednačine, pa ovaj sistem nema nijedno rešenje (nemoguć je);

(c) Ako u sistemu drugu jednačinu podelimo sa 2, vidimo da je ona ista sa prvom, tako da ovde zapravo imamo jednu jednačinu sa dve nepoznate, koja ima beskonačno rešenja oblika $(t, 3-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Na primer, $(1,2)$ je rešenje sistema, ali i $(7,-4), (0,3), (-2,5) \dots$ su rešenja sistema;

(d) Homogen sistem pored trivijalnog rešenja $(0,0)$ ima još beskonačno mnogo rešenja oblika $(t,-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Rešiti sisteme Gausovim metodom eliminacije:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & 2y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 11 \end{array}$;

(b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & - & 3y & - & z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 10 \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ x & & & - & z & = & 5 \\ -2x & - & 6y & + & 4z & = & -4 \end{array}$;

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 6 \end{array}.$$

Rešenje:

(a) Eliminisaćemo nepoznatu x iz druge i treće jednačine tako što ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa -1 i dodati drugoj, a zatim prvu jednačinu pomnožiti sa -2 i dodati trećoj jednačini. Dobijamo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & - & 3y & + & z & = & -1 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 3 \end{array}.$$

Sledeću ćemo eliminisati promenljivu y u trećoj jednačini, tako što drugu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo trećoj:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ & - & 3y & + & z & = & -1 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}.$$

Dobili smo trougaoni oblik sistema jer u trećoj jednačini imamo jednu nepoznatu, u drugoj dve i u prvoj tri nepoznate. Iz ovakvog oblika se lako očitava rešenje sistema tako što iz treće jednačine izračunamo nepoznatu z, zatim zamenom vrednosti ove nepoznate u drugoj jednačini izračunamo nepoznatu y, a potom zamenom nepoznatih y i z u prvoj jednačini izračunamo nepoznatu x. Primenjujući ovaj postupak dobijamo da je $(1, 1, 2)$ jedinstveno rešenje sistema;

(b) Ovaj sistem se transformiše u sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ & & 5y & + & 5z & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 3 \end{array}.$$

Treća jednačina je protivrečna i samim tim je i sistem protivrečan, tj. sistem nema rešenja;

(c) Ako prvu jednačinu pomnožimo sa 2 i dodamo trećoj dobijamo:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 2 \\ x & & & - & z & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}.$$

Treća jednačina je trivijalni identitet čime se naš sistem sveo na dve jednačine sa tri nepoznate i imaćemo beskonačno mnogo rešenja. Tada jednu promenjivu, recimo z, možemo birati proizvoljno (imamo jedan stepen slobode) i rešenja sistema će biti $(t+5, \frac{t}{3}-1, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

(d) Kada pokušamo da elimišemo neku od promenjivih iz druge i treće jednačine dobijamo:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}.$$

Ovo je sistem sa dva stepena slobode, jer je ovo u suštini bila jedna jednačina zapisana tri puta. Sada možemo proizvoljno birati dve promenjive, recimo x i y, dok treća zavisi od njih $(t, s, 3-t-s)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

3. Gausovim metodom eliminacije rešiti sisteme jednačina:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 8 \\ -x & & & - & z & = & -2 \\ 5x & + & 4y & + & 5z & = & 14 \end{array};$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & + & 3z & = & 8 \\ -x & & & - & z & = & -2 \\ 5x & + & 4y & + & 5z & = & 13 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & + & y & + & 3z & = & 8 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & 2 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 4 \\ 4x & + & 2y & - & 6z & = & 8 \end{array}.$$

Rešenje:

(a) Dati sistem je pravougaoni sistem pet jednačina sa tri nepoznate. Ako eliminišemo x iz druge, treće, četvrte i pete jednačine datog sistema, dobijamo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & - & y & & & = & -1 \\ & - & y & & & = & -1 \\ & & y & & & = & 1 \\ & - & y & & & = & -1 \end{array}.$$

Znači, sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa jednim stepenom slobode $(2-t,1,t)$, $t \in \mathbb{R}$;

(b) Sistem je nemoguć;

(c) Sistem ima jedinstveno rešenje $(1,1,1)$;

(d) Naredna dva sistema su pravougaona, pri čemu je broj jednačina manji od broja nepoznatih. U takvim slučajevima sistem ne može da ima jedinstveno rešenje. Pomnožićemo prvu jednačinu sa -2 i dodati drugoj da bi eliminisali x iz druge jednačine. Tako dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & & 3y & + & z & = & -4 \end{array},$$

odakle zaključujemo da sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(7+2t,t,-4-3t)$, $t \in \mathbb{R}$;

(e) Koeficijenti druge jednačine su proporcionalni odgovarajućim koeficijentima prve jednačine, pa u ovom slučaju imamo samo jednu jednačinu sa tri nepoznate i sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa dva stepena slobode oblika $(t,4-2t+3s,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$.

4. Koristeći Kramerova pravila, rešiti sisteme jednačina:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 13 \end{array};$$ (b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 3 \end{array};$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & + & 4z & = & 6 \end{array}; \qquad \text{(d)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 4y & + & 4z & = & 4 \end{array}.$$

Rešenje:

(a) Formiramo i odredimo vrednosti determinanti D_s, D_x, D_y i D_z :

$$D_s = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 13 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 13 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 13 \end{vmatrix} = -32.$$

Sistem ima jedinstveno rešenje, i to:

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{-8}{-8} = 1, \; y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{-8}{-8} = 1, \; z = \frac{D_z}{D_s} = \frac{-32}{-8} = 4;$$

(b) Imamo da je

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

odakle sledi da sistem nema rešenja, jer je $D_s = 0$, a $D_x \neq 0$;

(c) Sada je $D_s = D_x = D_y = D_z = 0$. Kramerovo pravilo nam ne daje rešenje. Gausovim metodom dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 2, \end{array}$$

koji nema rešenja;

(d) Kao i u prethodnom primeru $D_s = D_x = D_y = D_z = 0$, ali sada Gausovim metodom odredjujemo da sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(t, 1-t-s, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$.

5. U zavisnosti od parametra a diskutovati sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & ay & + & z & = & -1 \\ ax & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & az & = & 1 \end{array}.$$

Rešenje:

Odredimo prvo determinantu sistema:

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & -3 & 1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a-2)(a+1)^2.$$

Takodje, izračunamo i

$$D_x = (1+a)^2,\ D_y = (1+a)^2,\ D_z = (1+a)^2.$$

1) Vidimo da je $D_s \neq 0$, za $a \neq 2$ i $a \neq -1$, i tada sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{1}{a-2},\ y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{1}{a-2},\ z = \frac{D_z}{D_s} = \frac{1}{a-2}.$$

Na primer, za $a = 5$ imamo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 5y & + & z & = & -1 \\ 5x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array},$$

sa rešenjem $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

2) Kada je $a = 2$ i $a = -1$ tada sistem ili nema rešenja ili ima beskonačno mnogo rešenja. Ove slučajeve ispitaćemo Gausovim postupkom.

Za $a = 2$ imamo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array},$$

koji ekvivalentnim transformacijama možemo svesti na sistem koji nema rešenja:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 3 \\ & & & & 0 & = & 3 \end{array}.$$

Za $a=-1$ imamo sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -1 \\ -x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ -x & - & y & - & z & = & 1 \end{array},$$

koji svodimo na sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -1 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array},$$

koji ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(-2t-1,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

6. Za koje vrednosti parametra a sistem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}$$

ima i netrivijalna rešenja?

Rešenje:

Pošto je $D_s=(a+2)(a-1)^2$, tada imamo da za $a=1$ i $a=-2$ je $D_s=0$ i sistem pored trivijalnog ima i beskonačno mnogo netrivijalnih rešenja. Za $a=1$ broj stepeni slobode je 2 i rešenja su oblika $(-(t+s),t,s)$, $t,s\in\mathbb{R}$. Za $a=-2$ broj stepeni slobode je 1 i rešenja su oblika (t,t,t), $t\in\mathbb{R}$.

7. Diskutovati i odrediti rešenja sistema jednačina koristeći Kroneker-Kapelijevu teoremu:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 3z & = & -9 \\ -4x & + & 2y & & & = & 10 \end{array}$; (b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ 4x & - & 7y & + & 7z & = & 10 \end{array}$; (d) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 3 \end{array}$.

Rešenje:

(a) Formiramo matricu i proširenu matricu sistema, i izvršimo elementarne transformacije na vrstama (videti poglavlje **Matrice**):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -9 \\ -4 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & -16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Kako je $r(M_s) = r(M_p) = 3$, sistem ima jedinstveno rešenje i ono glasi $z = -2, -y + 2z = -5 \Rightarrow y = 1, x + y - z = 1 \Rightarrow x = -2$;

(b) Matrica i proširena matrica sistema su:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right].$$

Dobijamo da je $r(M_s) = 2$ i $r(M_p) = 3$ pa zaključujemo da sistem nema rešenja. Gledajući matricu dobili bi sistem $x - 2y + z = 3, y - z = -5, 0 = -7$, koji je protivrečan;

(c) Iz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dobijamo da je $r(M_s) = r(M_p) = 2$ i zaključujemo da sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa jednim stepenom slobode $(n = 3, k = 2)$. Rešenja su oblika $(-1, t - 2, t)$, $t \in \mathbb{R}$;

(d) Dobijamo da je $r(M_s) = r(M_p) = 1$, što znači da sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa dva stepena slobode $(n = 3, k = 1)$, oblika $(t, s, 1 - t - s), t, s \in \mathbb{R}$.

8. Kroneker-Kapelijevom teoremom diskutovati sisteme jednačina:

(a) $\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 1 \\ 3x-y+z & = & 3 \end{array}$; (b) $\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 1 \\ 2x+2y+4z & = & 2 \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 1 \\ 2x+2y+4z & = & -2 \end{array}$; (d) $\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ 2x+3y & = & 2 \\ -x+2y & = & 1 \end{array}$;

(e) $\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ 2x+3y & = & 2 \\ x+2y & = & 0 \end{array}$; (f) $\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ 2x+2y & = & 4 \\ 3x+3y & = & 6 \end{array}$.

Rešenje:

(a) Iz $r(M_s) = r(M_p) = 2$ sledi da sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa jednim stepenom slobode $(k = 2, n = 3)$;

(b) Sada je $r(M_s) = r(M_p) = 1$ i sistem je neodredjen sa dva stepena slobode $(k = 1, n = 3)$;

(c) Sistem nema rešenja, jer je $r(M_s) = 1$ i $r(M_p) = 2$;

(d) Sistem nema rešenja, jer je $r(M_s) = 2$, $r(M_p) = 3$;

(e) Sistem ima jedinstveno rešenje: $r(M_s) = r(M_p) = 2 = n$;

(f) Dobijamo da je $r(M_s) = r(M_p) = 1$, tako da sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa jednim stepenom slobode $(n = 2, k = 1)$.

9. Koristeći matričnu jednačinu rešiti sisteme jednačina:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ -2x & & & + & z & = & -2 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}$; (b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ 8x & - & 7y & + & 7z & = & 9 \end{array}$.

Rešenje:

(a) Dati sistem se transformiše u matričnu jednačinu

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

čije rešenje je

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dakle, rešenje sistema je $(3, 2, 4)$;

(b) Imamo da je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 8 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

pa ovaj sistem ne možemo rešiti preko matrica. Dati sistem se može rešiti jednom od prethodno navedenih metoda.

Zadaci

1. Koristeći se Gausovim metodom rešiti sisteme jednačina:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 9 \\ 3x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 4x & - & 7y & + & z & = & 5 \end{array}$; (b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 3 \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 15 \\ -3x & - & y & + & z & = & -1 \end{array}$; (d) $\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & -3 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$;

(e) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & - & 2y & & & = & -1 \end{array}$;

(f) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & z & = & -2 \end{array}$;

(g) $\begin{array}{rcl} 3x+5y-z-2t &=& 11 \\ 2x+4y-z+t &=& 8 \\ 4x-y+z &=& -24 \\ 5x+3y-2z+t &=& -13 \end{array}$; (h) $\begin{array}{rcl} 2x+7y+3z+t &=& 5 \\ x+3y+5z-2t &=& 3 \\ x+5y-9z+8t &=& 1 \\ 5x+18y+4z+5t &=& 12 \end{array}$;

(i) $\begin{array}{rcl} 2x-5y+3z+t &=& 5 \\ 3x-7y+3z-t &=& -1 \\ 5x-9y+6z+2t &=& 7 \\ 4x-6y+3z-t &=& 8 \end{array}$; (j) $\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ 2x+y+3z &=& 5 \\ x+y+z &=& 2 \\ 3x-7y+2z &=& 7 \end{array}$;

(k) $\begin{array}{rcl} x+y-z+3t &=& 8 \\ 2x+y+2z-t &=& -2 \\ 3x+2y+z+t &=& 4 \\ x-3y+3z+t &=& 0 \end{array}$;

(l) $\begin{array}{rcl} x+y-2z+2t-w &=& -1 \\ 2x-y+z+3t+w &=& 12 \\ -x+2y+3z-t-w &=& 2 \\ 3x+4y-z+t-2w &=& 1 \\ x+3y+3z-3t+3w &=& 13 \end{array}$;

(m) $\begin{array}{rcl} 2x+y+z+w &=& 1 \\ x-y-z-3w &=& 2 \\ 4x-y-z-5w &=& 3 \end{array}$; (n) $\begin{array}{rcl} x+y-z-w &=& 3 \\ 2x+y-3z+2w &=& 1 \\ -x+2y+3z-w &=& 0 \end{array}$;

(o) $\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& -3 \\ -x+3y+z &=& 4 \\ 2x+y-2z &=& -1 \\ x+y-9z &=& 8 \end{array}$; (p) $\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 5 \\ -2x+y-2z &=& -3 \\ 3x-y-z &=& 2 \\ 2x+y+z &=& 6 \end{array}$.

2. Rešiti sledeće homogene sisteme:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array};$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & 13x_3 & = & 0 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0, \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ -4x & + & 5y & + & 2z & = & 0 \end{array};$$ (f) $$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & & & = & 0 \end{array};$$

(g) $$\begin{array}{rcl} 2x+y+z+w & = & 0 \\ -3x-y-2z-2w & = & 0 \\ 2x+y+4z-3w & = & 0 \\ 3y+w & = & 0 \end{array};$$ (h) $$\begin{array}{rcl} x+y-z+w & = & 0 \\ 3x-y+2z-w & = & 0 \\ 2x-y-z+3w & = & 0 \\ 4x-3y+2z+w & = & 0 \end{array}.$$

3. U zavisnosti od realnog parametra diskutovati sisteme jednačina:

(a) $$\begin{array}{ccccccc} (a+5)x & + & (2a+1)y & - & 9z & = & 3a+9 \\ 2x & + & ay & - & 3z & = & a+3 \\ 4x & + & (a+1)y & - & (5+a)z & = & a+7 \end{array};$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} (a+3)x & + & (a+4)y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & (a-3)y & - & 2z & = & 2 \\ (2a+7)x & + & (a+4)y & + & (a+6)z & = & a+5 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcr} (a+1)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (a+2)y & & & = & 0 \\ -x & - & (a+1)y & - & z & = & 0 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} (k^2-2k-7)x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & + & (k+4)y & - & 2z & = & 0 \\ (k^2-3k-1)x & + & 2y & + & (k-2)z & = & 0 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} (m+2)x & + & 2y & + & 3z & - & w & = & 0 \\ (m+4)x & + & (m+1)y & + & 4z & + & w & = & 0 \\ 5x & + & (m-1)y & + & mz & + & 5w & = & 0 \\ (2m+4)x & + & 2y & + & 3z & + & (m+1)w & = & 0 \end{array};$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \\ ax_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \end{array};$$

(g) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & a \end{array};$$

(h) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ ax_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 6x_1 & + & (a+2)x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \end{array};$$

(i) $$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array};$$

(j) $$\begin{array}{rcrcrcr} (a-1)x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & a \\ (a+2)x_1 & + & ax_2 & + & 2x_3 & = & 2a+1 \\ (a+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a+1 \end{array};$$

(k) $$\begin{array}{rcrcrcr} (a+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & (a+1)x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+1)x_3 & = & a^2 \end{array}.$$

4. Koristeći se Kroneker - Kapelijevom teoremom odrediti prirodu rešenja sledećih sistema:

(a) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & 4z & = & 5 \end{array}$; (b) $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 3 \\ 5x & + & 9y & + & 4z & = & 2 \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 2z & = & -2 \\ x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{array}$;

(d) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 6z & = & 1 \\ 13x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 5 \end{array}$;

(e) $\begin{array}{rcl} 2x+5y-4z+w & = & 1 \\ -x+2y-z-w & = & 2 \\ 3x+12y-9z+w & = & 4 \\ x+y+z+w & = & 0 \end{array}$; (f) $\begin{array}{rcl} x-y+2z+w & = & 1 \\ 3x-2y-z-4w & = & 3 \\ 7x-5y-7w & = & 7 \\ 5x-4y+3z-2w & = & 5 \end{array}$;

(g) $\begin{array}{rcl} x+y-z+w & = & 3 \\ -2x+y+z+2w & = & 2 \\ 3x+2y-3z+w & = & 3 \end{array}$; (h) $\begin{array}{rcl} x-2y+3z-4w & = & 2 \\ -3x+y-z+w & = & 2 \\ -5y+8z-11w & = & 8 \end{array}$;

(i) $\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ -x+2y+z & = & 6 \\ 3x+y-z & = & 2 \\ 8x+8y & = & 21 \end{array}$; (j) $\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 2 \\ -2x-y+3z & = & 1 \\ x+5y+6z & = & 7 \\ -3x+7z & = & 4 \end{array}$.

5. Pomoću matrica rešiti sledeće sisteme jednačina:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & -5 \\ 2x & & & + & z & = & -4 \\ -x & + & 3y & - & 3z & = & 13 \end{array}$;

(b) $\begin{array}{rcrcrcr} -x & - & y & & & = & -3 \\ 3x & + & y & + & z & = & 8 \\ 4x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rcrcrcrcr} & & y & - & z & + & w & = & 4 \\ -x & - & y & & & - & 3w & = & -10 \\ x & + & 2y & + & 3z & & & = & -2 \\ -x & + & 3y & & & & & = & -1 \end{array}$.

Rešenja

1. (a) Nema rešenja; (b) $(-3-3p, 5p+6, p)$, $p \in \mathbb{R}$; (c) $(1,3,5)$;
   (d) $(-2,-1,2)$; (e) $(t, \frac{1+3t}{2}, 1-2t)$, $t \in \mathbb{R}$; (f) nema rešenja;
   (g) $(-5,5,1,-1)$; (h) $(6-26p+17q, -1+7p-5q, p, q)$, $p,q \in \mathbb{R}$;
   (i) nema rešenja; (j) nema rešenja; (k) $(1,0,-1,2)$; (l) $(1,1,2,2,3)$;
   (m) nema rešenja, (n) $(17t+22, -6t-7, 10t+12, t)$, $t \in \mathbb{R}$;
   (o) $(-2,1,-1)$; (p) nema rešenja.
2. (a) $(0,0,0)$; (b) $(a,2a,a)$, $a \in \mathbb{R}$; (c) $(a,-7a,-3a)$, $a \in \mathbb{R}$; (d) $(0,0,0)$;
   (e) Kako je $D_s \neq 0$, sistem ima samo trivijalno rešenje $x=y=z=0$;
   (f) $D_s = 0$, sistem ima beskonačno mnogo rešenja $(-3t, t, -11t)$, $t \in \mathbb{R}$;
   (g) $(0,0,0,0)$; (h) $(-\frac{4}{11}t, \frac{9}{11}t, \frac{16}{11}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. (a) Ako je $a \neq 1$ i $a \neq -5$, sistem ima jedinstveno rešenje: $x = -\frac{a+6}{a+5}, y = -\frac{a+6}{a+5}, z = -\frac{1}{a+5}$. Za $a=1$ sistem je neodredjen sa dva stepena slobode i rešenja su oblika $(x, 4-2x+3z, z)$, $x,z \in \mathbb{R}$, a za $a=-5$ sistem je nemoguć;
   (b) Za $a \neq -1, 3, -4$ sistem ima jedinstveno rešenje:
   $$\left(-\frac{5a+13}{(a-3)(a+1)}, \frac{4}{a-3}, \frac{a^2+3a+10}{(a-3)(a+1)}\right),$$

za $a=-1$ i $a=3$ sistem nema rešenja, za $a=-4$ ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(-1+2z,-\frac{6}{7}z,z)$, $z\in\mathbb{R}$;

(c) Imamo da je $D_s=-a(a+3)$ pa za $a=0$ i $a=-3$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja, i to $(-2t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$ za $a=0$, odnosno (t,t,t), $t\in\mathbb{R}$ za $a=-3$, dok za $a\neq 0$ i $a\neq -3$ sistem ima samo trivijalno rešenje $(0,0,0)$;

(d) Ako je vrednost parametra k različita od $-1,3,-4$ i 6, onda sistem ima jedinstveno rešenje i to je trivijalno rešenje $(0,0,0)$. Za vrednost $k=-1$ i $k=3$ rešenja su $(z,0,z)$, $z\in\mathbb{R}$, za $k=-4$ imamo rešenja $(z,-\frac{21}{2}z,z)$, $z\in\mathbb{R}$ i za $k=6$ rešenja su $(-\frac{22}{21}y,y,\frac{83}{21}y)$, $y\in\mathbb{R}$;

(e) Za $m\neq -3,1,-2$ sistem ima trivijalno rešenje $(0,0,0,0)$. Ako je $m=-3$ rešenja su $(-w,0,0,w)$, $w\in\mathbb{R}$, za $m=1$ rešenja su $(-w,2w,0,w)$, $w\in\mathbb{R}$ i za $m=-2$ rešenja su $(-4z,z,z,5z)$, $z\in\mathbb{R}$;

(f) Kako je $D_s=a-3$, sistem za $a\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ima jedinstveno rešenje i ono je $(0,-5,-6)$, dok za $a=3$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(t,7t-5,5t-6)$, $t\in\mathbb{R}$;

(g) U ovom sistemu je $D_s=0$, bez obzira na a, pa sistem nikada nema jedinstveno rešenje. Za $a\neq 7$ sistem nema rešenja, dok za $a=7$ imamo beskonačno mnogo rešenja oblika $(t,7t-5,5t-6)$, $t\in\mathbb{R}$;

(h) Imamo da je $D_s=(a-4)(a+3)$ pa za $a\neq 4,-3$ sistem ima jedinstveno rešenje $(-\frac{1}{a-4},\frac{1}{a-4},6)$, za $a=4$ nema rešenja, dok za $a=-3$ ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(\frac{1+3t}{4},t,\frac{23-7t}{4})$, $t\in\mathbb{R}$;

(i) Za $a\neq 1$ imamo jedinstvena rešenja $(-\frac{1}{2(a-1)},\frac{3(2a-1)}{2(a-1)},\frac{3a-1}{2(a-1)})$, a ako je $a=1$ sistem nema rešenja;

(j) Iz $D_s=2a(a-1)$ sledi da za $a\neq 0,1$ sistem ima jedinstvena rešenja i ona su $(\frac{2a-3}{2(a-1)},\frac{2a-1}{2(a-1)},-\frac{a-2}{2(a-1)})$. Ako je $a=1$ sistem nema rešenja, dok za $a=0$ ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(t,\frac{1}{2},\frac{1}{2}-t)$, $t\in\mathbb{R}$;

(k) Ovde je $D_s=a^2(a+3)$ i za $a\neq 0,-3$ jedinstveno rešenje je

$$\left(\frac{2-a^2}{a(a+3)},\frac{2a-1}{a(a+3)},\frac{a^3+2a^2-a-1}{a(a+3)}\right),$$

za $a=0$ i $a=-3$ sistem nema rešenja.

4. (a) Rang matrice sistema (M_s) je 2, rang proširene matrice sistema (M_p) je takodje 2, pa je sistem neodredjen sa jednim stepenom slobode;
   (b) Iz $r(M_s) = 2, r(M_p) = 3$ sledi da sistem nema rešenja;
   (c) Sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa dva stepena slobode, jer je $r(M_s) = r(M_p) = 1$;
   (d) Sistem ima jedinstveno rešenje, što sledi iz činjenice da je $r(M_s) = r(M_p) = 3$;
   (e) Kako je $r(M_s) = r(M_p) = 3$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa jednim stepenom slobode;
   (f) Sada je $r(M_s) = r(M_p) = 2$ pa sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa dva stepena slobode;
   (g) Iz $r(M_s) = r(M_p) = 3$ sledi da sistem ima beskonačno rešenja sa jednim stepenom slobode;
   (h) Kako je $r(M_s) = r(M_p) = 2$ sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa dva stepena slobode;
   (i) Sada je $r(M_s) = r(M_p) = 3$ pa sistem ima jedinstveno rešenje;
   (j) Sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa jednim stepenom slobode, jer je $r(M_s) = r(M_p) = 2$.

5. (a) $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix};$
   (b) $X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 13 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$
   (c) $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 27 & 9 & 9 & -12 \\ 9 & 3 & 3 & 0 \\ -15 & -5 & -1 & 4 \\ -12 & -8 & -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

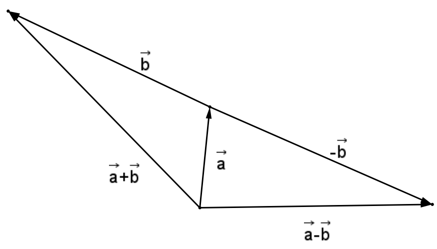
Glava 6

Vektori

• **Vektor** $\vec{a}$, sa početkom u tački $O(0,0,0)$ i krajem u tački $A(a_1,a_2,a_3)$, dat je sa

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1,a_2,a_3),$$

gde su $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ i $\vec{k} = (0,0,1)$ jedinični koordinatni vektori (ortovi).



Slika 6.1. Sabiranje i oduzimanje vektora

• **Intenzitet** (dužinu) vektora $\vec{a}$ odredjujemo na sledeći način:

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

• **Pravac** vektora $\vec{a}$ je pravac prave odredjene tačkama O i A.
• **Smer** vektora $\vec{a}$ je od tačke O do tačke A.
• **Nula vektor** u oznaci $\vec{0} = (0,0,0)$ je vektor nultog inteziteta i proizvoljnog pravca i smera.

• Vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ su **jednaki** ako i samo ako je

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \ \text{ i } \ a_3 = b_3.$$

• Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ imaju isti intezitet i pravac, a suprotan smer, tj. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Ovakve vektore nazivamo **suprotni vektori**.
• Neka su date tačke $A(A_1, A_2, A_3)$ i $B(B_1, B_2, B_3)$. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = (B_1 - A_1, B_2 - A_2, B_3 - A_3).$$

• Vektore $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ **sabiramo (oduzimamo)** na sledeći način:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3).$$

• Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ množimo skalarom α, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

• **Skalarni proizvod** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ po definiciji je broj:

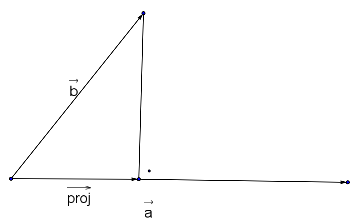
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).}$$

• **Projekcija** vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ (*slika 6.2*) je skalar

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$

a vektor projekcije je

$$\vec{proj} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot pr_{\vec{b}}\vec{a}.$$



Slika 6.2. Projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$

• Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **normalni** $(\vec{a} \perp \vec{b})$ ako i samo ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

• Skalarni proizvod vektora $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ odredjujemo na sledeći način:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.}$$

• **Vektorski proizvod** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, čiji je:
- intezitet $|\vec{c}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$,
- pravac normale na ravan koju odredjuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, odnosno $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$,
- smer odredjen pravilom desnog zavrtnja.

• Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su **kolinearni** (pripadaju istoj pravoj) ako i samo ako je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
• Vektorski proizvod vektora $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ je vektor:

$$\boxed{\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.}$$

• **Površina paralelograma** konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je

$$\boxed{P_{paralelograma}=|\vec{a}\times\vec{b}|,}$$

dok je površina trougla konstruisanog nad istim vektorima:

$$\boxed{P_{trougla}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.}$$

• **Mešoviti proizvod** vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ je broj dat sa

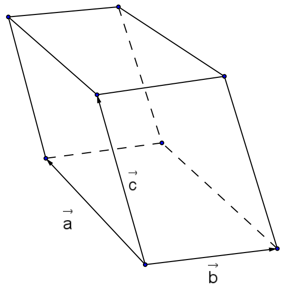
$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.}$$

• Vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ su **komplanarni** ako i samo ako je $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.
• Nenula vektori $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ su **linearno zavisni**, ako postoje realni brojevi α,β,γ različiti od nule, za koje je:

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}.$$

• Vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ su **linearno zavisni** ako i samo ako je $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.
• **Zapremina paralelopipeda** konstruisanog nad vektorima $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ je:

$$\boxed{V_{paralelopipeda}=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|.}$$



Slika 6.3. Paralelopiped odredjen vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$

• **Zapremina četvorostrane piramide** konstruisane nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je:

$$\boxed{V_{\check{c}etvorostrane\ piramide} = \frac{1}{3}\,|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.}$$

• **Zapremina trostrane piramide (tetraedra)** konstruisanog nad vektorima $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je:

$$\boxed{V_{tetraedra} = \frac{1}{6}\,|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.}$$

Primeri

1. Date su tačke $A(-2,2,-3)$ i $B(4,10,-3)$. Odrediti vektor $\overrightarrow{AB}$, $|\overrightarrow{AB}|$ i koordinate tačke S koja je sredina vektora $\overrightarrow{AB}$.

   Rešenje:

   Traženi vektor je:

   $\overrightarrow{AB} = (4-(-2),\ 10-2,\ -3-(-3)) = (6,\ 8,\ 0)$,

   a njegov intenzitet je:

   $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2+8^2+0^2} = \sqrt{100} = 10.$$

   Neka je tačka $S(s_1,s_2,s_3)$. Tada važi $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$, odnosno $(s_1+2, s_2-2, s_3+3) = (4-s_1, 10-s_2, -3-s_3)$. Iz jednakosti vektora dobijamo:

   $$\begin{aligned} s_1+2 &= 4-s_1 \Rightarrow s_1 = 1, \\ s_2-2 &= 10-s_2 \Rightarrow s_2 = 6, \\ s_3+3 &= -3-s_3 \Rightarrow s_3 = -3, \end{aligned}$$

   pa je tačka $S = (1,6,-3)$.

2. Odrediti vrednosti m,n i k, ako znamo da su vektori $\vec{a} = (m+2,1,3k)$ i $\vec{b} = (5,2n-3,k+8)$ jednaki.

   Rešenje:

   Iz jednakosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sledi da je:

   $$m+2=5,\ \ 1=2n-3\ \text{ i }\ 3k=k+8,$$

   pa dobijamo da je $m=3, n=2$ i $k=4$.

3. Dati su vektori $\vec{a}=(3,-2,6)$ i $\vec{b}=(6,-1,-1)$. Odrediti $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $3\vec{a}$, $-5\vec{b}$ i $-2\vec{a}+4\vec{b}$.

   Rešenje:

   $\vec{a}+\vec{b}=(3,-2,6)+(6,-1,-1)=(3+6,-2-1,6-1)=(9,-3,5)$,

   $\vec{a}-\vec{b}=(3,-2,6)-(6,-1,-1)=(3-6,-2-(-1),6-(-1))=(-3,-1,7)$,

   $3\vec{a}=3(3,-2,6)=(9,-6,18)$,

   $-5\vec{b}=-5(6,-1,-1)=(-30,5,5)$,

   $-2\vec{a}+4\vec{b}=-2(3,-2,6)+4(6,-1,-1)=(18,0,-16)$.

4. Dati su vektori $\vec{a}=(2,1,5)$ i $\vec{b}=(3,1,1)$. Odrediti $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\angle(\vec{a},\vec{b})$ i $pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

   Rešenje:

   Skalarni proizvod datih vektora je:

   $\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,1,5)\cdot(3,1,1)=2\cdot 3+1\cdot 1+5\cdot 1=12$,

   intenziteti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su:

   $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+5^2}=\sqrt{30}$ i $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+1^2+1^2}=\sqrt{11}$.

   Ugao izmedju dva vektora računamo iz definicije skalarnog proizvoda kao:

   $$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{12}{\sqrt{30}\sqrt{11}},$$

   pa zaključujemo da ovi vektori zahvataju ugao $\alpha=\arccos\frac{12}{\sqrt{30}\sqrt{11}}$. Projekciju odredjujemo na sledeći način:

   $$pr_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{12}{\sqrt{30}}.$$

5. Odrediti vektorski proizvod vektora $\vec{a} = (2, 1, -2)$ i $\vec{b} = (-1, 3, 0)$.

   Rešenje:

   Vektorski proizvod datih vektora je:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}.$$

   Ako izračunamo i

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k},$$

   dobijamo vektor suprotnog smera.

6. Da li su vektori $\vec{a} = (1, 1, -3)$ i $\vec{b} = (-2, -2, 6)$ kolinearni?

   Rešenje:

   Kako je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

   zaključujemo da su oni kolinearni.

7. Odrediti površinu paralelograma i trougla konstruisanih nad vektorima $\vec{a} = (-2, 4, 1)$ i $\vec{b} = (1, 3, 2)$.

   Rešenje:

   Prvo ćemo naći vektorski proizvod:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

   Površina paralelograma je intenzitet dobijenog vektora, odnosno

$$P_{paralelograma} = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-10)^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6},$$

   dok je površina trougla $P_{trougla} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$.

8. Za vektore $\vec{a} = (-2,-2,-1), \vec{b} = (0,3,2)$ i $\vec{c} = (1,1,-1)$ naći $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

   Rešenje:

   Mešoviti proizvod datih vektora je:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \ = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

9. Da li su vektori $\vec{a} = (3,1,1), \vec{b} = (-1,2,-3)$ i $\vec{c} = (3,8,-7)$ linearno zavisni? Ako jesu, naći njihovu linearnu zavisnost.

   Rešenje:

   Mešoviti proizvod vektora $\vec{a} = (3,1,1), \vec{b} = (-1,2,-3)$ i $\vec{c} = (3,8,-7)$ je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

   iz čega zaključujemo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni. Iz definicije linearne zavisnosti sledi da tada postoje brojevi α, β i γ različiti od nule, za koje je:

$$\alpha(3,1,1) + \beta(-1,2,-3) + \gamma(3,8,-7) = (0,0,0).$$

   Data jednakost nas dovodi do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} 3\alpha - \beta + 3\gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta + 8\gamma &= 0 \\ \alpha - 3\beta - 7\gamma &= 0. \end{aligned}$$

   Ovaj sistem ima rešenja oblika $(-2\gamma, -3\gamma, \gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Sada je

$$-2\gamma\vec{a} - 3\gamma\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0},$$

   pa deljenjem sa γ dobijamo linearnu zavisnost ova tri vektora

$$-2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}.$$

10. Izračunati zapreminu paralelopipeda koji je konstruisan nad vektorima $\vec{a} = (8,1,1), \vec{b} = (13,3,6)$ i $\vec{c} = (3,0,3)$.

    Rešenje:

    Zapremina datog paralelopipeda je:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 13 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 42.$$

11. Ako nad vektorima $\vec{a} = (8,1,1), \vec{b} = (13,3,6)$ i $\vec{c} = (3,0,3)$ konstruišemo četvorostranu piramidu, izračunati njenu zapreminu.

    Rešenje:

    Zapremina date piramide je:

$$V = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 13 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 42 = 14.$$

12. Izračunati zapreminu tetraedra koji je odredjen vektorima $\vec{a} = (8,1,1), \vec{b} = (13,3,6)$ i $\vec{c} = (3,0,3)$.

    Rešenje:

    Zapremina datog tetraedra je:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 13 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 42 = 7.$$

Zadaci

1. Neka su dati vektori $\vec{a} = (2,1,-5), \vec{b} = (3,1,-2)$ i $\vec{c} = (4,1,1)$. Odrediti $-\vec{a} + 3\vec{b} + 5(\vec{c} - 2\vec{b})$.

2. Ako znamo tačku $A(2,1,4)$ i vektor $\overrightarrow{AB} = (-4,2,-10)$, naći tačku B.

3. Poznata nam je početna tačka $A(3,-2,4)$ i $S(1,1,1)$ sredina vektora $\overrightarrow{AB}$. Naći tačku B.

4. Neka je trougao ABC zadat svojim temenima $A(1,2,3)$, $B(4,6,3)$ i $C(2,4,5)$. Naći obim i vektore koji odgovaraju težišnim linijama trougla.

5. Date su tačke $A(1,1,2), B(2,1,4)$ i $C(-3,5,0)$ i one čine tri temena paralelograma $ABCD$. Odrediti koordinate četvrtog temena D.

6. Naći tačke koje dele vektor $\vec{a} = (6, -6, 12)$:
   (a) na dva jednaka dela;
   (b) na tri jednaka dela;
   (c) u odnosu 5 : 7.

7. Naći parametre s i t tako da za vektore $\vec{a} = (s-t, 1), \vec{b} = (s, t-s)$ i $\vec{c} = (-8, 3s+t)$ važi $2\vec{a} - 5\vec{b} = \vec{c}$.

8. Ako je $\vec{a} = (-1, -2, 1)$ i $\vec{b} = (3, 2, 3)$, izračunati:
$$\left((\vec{a}\cdot\vec{i} + \vec{b}\cdot\vec{j})\cdot(\vec{a}+\vec{b})\right)\cdot\vec{k}.$$

9. Odrediti parametar t tako da važi:
$$(t(1,2,3) + 2(1, t+2, 3) - (4-t)(2,0,3))\cdot(1,1,1) = (1,2,t)\cdot(1,2,0).$$

10. Dati su vektori $\vec{a} = (t, t+1, 1)$ i $\vec{b} = (t, 2, -5)$. Naći t tako da je $\vec{a}\perp\vec{b}$.

11. Pronaći vektor $\vec{x}$ tako da za vektore $\vec{a} = (2, -1, 1), \vec{b} = (3, 0, -1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 1)$ važi:
$$\vec{x}\cdot\vec{a} = 3, \quad \vec{x}\perp\vec{b} \text{ i } \vec{x}\cdot\vec{c} = 6.$$

12. Dati su vektori $\vec{v} = (1, 2, 3), \vec{u} = (t, 1, -1), \vec{w} = (-1, 0, 1)$. Naći parametar t tako da vektori $\vec{v} + t\vec{u}$ i $\vec{w}$ budu ortogonalni.

13. Dati su vektori $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{c} = (-2, 2, -5)$. Naći vektor $\vec{x}$ ako znamo da je $\vec{x}\cdot\vec{a} = 3$, $\vec{x}\cdot\vec{c} = -1$ i $\vec{x}\perp\vec{b}$.

14. Ako su nam poznati vektori $\vec{a} = (2, -2, 1)$ i $\vec{b} = (3, 0, 3)$, odrediti vektor $\vec{x}$ za koji je $\vec{x}\cdot\vec{b} = 9$, $\vec{x}\perp\vec{a}$, $|\vec{x}| = \sqrt{18}$.

15. Date su tačke $A(1, 3, 2), B(1, 7, 2)$ i $C(1, 5, 4)$. Naći ugao kod temena A u trouglu ABC.

16. Da li je trougao $ABC\,(A(1, -1, 1), B(1, -3, -3), C(3, -2, 0))$ pravougli?

17. Odrediti projekciju $\vec{proj}$ vektora $\vec{b} = (1, 1, 2)$ na vektor $\vec{a} = (2, -2, 1)$.

18. Odrediti vektor $\overrightarrow{AA'}$ koji odgovara visini iz temena A u trouglu ABC, za $A(2, 0, 3), B(-2, 3, 3)$ i $C(-1, 1, 5)$.

19. Za vektore $\vec{a}=(-2,1,1)$ i $\vec{b}=(2,2,-3)$ odrediti:

$$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot((\vec{m}-3\vec{i})\times(\vec{n}+\vec{j}+2\vec{k})),$$

ako je $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$ i $\vec{n}=2\vec{a}-\vec{b}$.

20. Naći površinu tetraedra čija temena su tačke $A(1,3,1), B(2,4,-2), C(1,6,-2)$ i $D(2,0,-2)$.

21. Pronaći nepoznati parametar t, ako je:
$$\left(\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -t-4 & t+3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

22. Odrediti ugao koji obrazuju dijagonale paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ i $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

23. Za $\vec{a}=(2,1,3)$ i $\vec{b}=(0,2,1)$ izračunati:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}+(\vec{a}\cdot(3\vec{b}))\vec{i}+((\vec{a}+\vec{i})\cdot\vec{j})\vec{j}+((2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{k}))\vec{k}\right)\cdot(2\vec{a}+3\vec{b}).$$

24. Odrediti kompleksan broj z za koji je:

$$z=\frac{(\vec{a}+3\vec{i})\cdot(2\vec{b}+\vec{j})+((3\vec{k}-\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}))i}{(2-i)^2},$$

ako je $\vec{a}=(1,3,-2), \vec{b}=(-2,0,1)$ i $\vec{c}=(3,-1,1)$.

25. Ako za kompleksan broj $z=3t+2+\sqrt{2}ti$ znamo da je

$$(2t+1,3-t,4t)\cdot(5t+1,3t-2,4+t)=|z|^2,$$

odrediti nepoznatu t.

26. Odrediti skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ za $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}, \vec{b}=-3\vec{m}+2\vec{n}, |\vec{m}|=3, |\vec{n}|=2$ i $\angle(\vec{m},\vec{n})=\pi$.

27. Naći skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $2\vec{a}-\vec{b}$, ako je $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

28. Da li vektori $\vec{a}(2,0,2)$ i $\vec{b}(1,1,3)$ zahvataju isti ugao kao i vektori $\vec{c}(0,1,-1)$ i $\vec{d}(2,2,-1)$?

29. Naći vrednost t za koju vektori $(t-2,t),(t,2t)$ zahvataju isti ugao kao i vektori $(1,3),(2,2)$.

30. Odrediti realan broj p tako da vektor $\vec{a} = 2p\vec{i} + \vec{j} + (1-p)\vec{k}$ gradi jednake uglove sa vektorima $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$.

31. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ obrazuju ugao $\psi = \frac{\pi}{6}$. Ako je $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$, izračunati ugao α izmedju vektora $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

32. (a) Odrediti bar jedan vektor $\vec{c}$ koji je normalan na vektore $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$;
    (b) Odrediti još dva vektora koji su normalni na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

33. Odrediti površinu i obim trougla konstruisanog nad vektorima $\vec{a}(1,3,-1)$ i $\vec{b}(2,1,2)$.

34. Ako su tačke $A(1,0,1), B(-1,2,0)$ i $C(3,-2,1)$ temena trougla, izračunati površinu i obim trugla ABC.

35. Data su tri temena paralelograma $A(0,1,2), B(1,2,1)$ i $C(-2,1,-1)$. Naći koordinate četvrtog temena i površinu paralelograma.

36. Data su temena četvorougla $A(1,-2), B(1,5), C(-4,0)$ i $D(-2,-2)$. Izračunati njegove unutrašnje uglove i, primenom vektorskog proizvoda, izračunati površinu četvorougla.

37. Odrediti koeficijent α iz uslova da su vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kolinearni, dok vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ to nisu.

38. Ako je $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ naći $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

39. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $2\vec{b} + \vec{a}$ i $3\vec{a} + 2\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

40. Dokazati da su vektori $\vec{a}(-1,3,2), \vec{b}(-2,-3,4), \vec{c}(-3,12,6)$ komplanarni.

41. Da li tačke $A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1)$ i $D(2,1,3)$ pripadaju istoj ravni?

42. Izračunati zapreminu paralelopipeda koji je konstruisan nad vektorima $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

43. Izračunati zapreminu tetraedra ABCD čija temena su data koordinatama $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7)$ i $D(-5,-4,8)$.

44. Tačke $A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6)$ i $D(2,3,8)$ su temena piramide. Izračunati zapreminu piramide i visinu koja odgovara osnovi ABC.

45. Izračunati visinu paralelopipeda koji je konstruisan nad vektorima $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, ako je za osnovicu uzet paralelogram konstruisan nad $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

46. Izračunati zapreminu i površinu tetraedra $ABCD$, gde je $A(1,1,1)$, $B(0,0,2)$, $C(0,3,0)$ i $D(4,0,0)$.

47. Dati su vektori $\vec{a} = (2,1,3)$ i $\vec{b} = (1,2,0)$. Naći $pr_{\vec{b}}\vec{a}$.

48. Vektori $\vec{a} = (2,1)$ i $\vec{b} = (3,2)$ obrazuju paralelogram. Naći vektor visine $\vec{h}_a$ i $|\vec{h}_a|$.

49. Vektori $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = p\vec{i} + q\vec{j}$ obrazuju trougao. Neka je vektor visine $\vec{h}_a = 2\vec{i} - 6\vec{j}$ i intenzitet projekcije vektora $\vec{b}$ na $\vec{a}$ iznosi $2\sqrt{10}$. Naći nepoznate parametre p i q vektora $\vec{b}$.

50. Pokazati da vektori $\vec{a} = (7,6,-6)$ i $\vec{b} = (6,2,9)$ mogu biti ivice kocke, a zatim odrediti vektor $\vec{c}$ treće ivice kocke.

51. Zadata su tri vektora $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Odrediti jedinični vektor $\vec{v}$, koji leži u ravni koju odredjuju vektori $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i normalan je na vektor $\vec{a}$.

Rešenja

1. $-\vec{a}+3\vec{b}+5(\vec{c}-2\vec{b}) = -(2,1,-5)+3\cdot(3,1,-2)+5\cdot((4,1,1)-2\cdot(3,1,-2))$
$= (-2,-1,5)+(9,3,-6)+(-10,-5,25) = (-3,-3,24)$.

2. Označimo li koordinate tačke B sa (x,y,z) imamo da je
$$(-4,2,-10) = (x-2, y-1, z-4)$$
i uporedimo li ove vektore dobijamo da je $x-2=-4$, $y-1=2$, $z-4=-10$, odakle je $B=(-2,3,-6)$.

3. Krajnju tačku vektora $B(x,y,z)$ dobijamo iz formule za sredinu vektora:
$$(1,1,1) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2}, \frac{4+z}{2}\right),$$
a iz pravila za jednakost vektora imamo: $\dfrac{3+x}{2} = 1,\ \dfrac{-2+y}{2} = 1,\ \dfrac{4+z}{2} = 1$
i tražena tačka je $B(-1,4,-2)$.

4. Odredimo obim trougla, za šta prvo treba naći vektore koji odredjuju stranice datog trougla. To su:

   $\overrightarrow{AB} = (3,4,0)$, $\overrightarrow{BC} = (-2,-2,2)$, $\overrightarrow{CA} = (-1,-2,-2)$.

   Dužine ovih vektora su:

   $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{CA}| = 3$.

   Traženi obim je zbir dužina stranica trougla, pa je:

   $O = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = 5 + 2\sqrt{3} + 3 = 8 + 2\sqrt{3}$.

   Nadjimo težišne linije trougla. Kako težišne linije spajaju temena i sredine naspramnih stranica, prvo odredjujemo tačku A_1 (sredina stranice BC), tačku B_1 (sredina stranice CA) i tačku C_1 (sredina stranice AB) :

   $A_1 = (3,5,4)$, $B_1 = (\frac{3}{2},3,4)$, $C_1 = (\frac{5}{2},4,3)$.

   Težišne linije su odredjene vektorima:

   $\overrightarrow{AA_1} = (2,3,1)$, $\overrightarrow{BB_1} = (-\frac{5}{2},-3,1) = \overrightarrow{CC_1} = (\frac{1}{2},0,-2)$.

5. *I način.* Kako su u paralelogramu naspramne stranice paralelne i jednake, zaključujemo da su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ isti vektori. Lako nalazimo da je $\overrightarrow{AB} = (1,0,2)$, pa je i $\overrightarrow{DC} = (1,0,2)$, odakle dobijamo $D = (-4,5,-2)$.

   II način. Znamo da se dijagonale paralelograma medjusobno polove, pa preko tačaka A i C nalazimo sredinu dijagonale $\overrightarrow{AC}$ i to je tačka $O(-1,3,1)$, a to je ujedno i sredina dijagonale $\overrightarrow{BD}$, pa je $D = (-4,5,-2)$.

6. (a) Kad vektor $\vec{a}$ pomnožimo sa $\frac{1}{2}$ dobijamo vektor čija je krajnja tačka na sredini $\vec{a}$, pa on ujedno odredjuje i srednju tačku vektora $\vec{a}$. Dakle, rezultat je:
   $$\frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(6,-6,12) = (3,-3,6);$$

   (b) Prvu tačku dobijamo kad vektor $\vec{a}$ pomnožimo sa $\dfrac{1}{3}$, a drugu množenjem sa $\dfrac{2}{3}$:

   $\dfrac{1}{3}\vec{a} = \dfrac{1}{3}(6,-6,12) = (2,-2,4)$ i $\frac{2}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}(6,-6,12) = (4,-4,8)$;

   (c) Tačku nalazimo kada podelimo $\vec{a}$ na 12 jednakih delova i uzmemo 5 prvih delova, odnosno
   $$\frac{5}{12}\vec{a} = \frac{5}{12}(6,-6,12) = (\frac{5}{2},-\frac{5}{2},5).$$

7. Ubacimo li vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u traženu jednakost imamo:

$$2(s-t,1)-5(s,t-s)=(-8,3s+t),$$

$$(-3s-2t,2-5t+5s)=(-8,3s+t),$$

odakle dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 3s+2t &= 8 \\ 2s-6t &= -2, \end{aligned}$$

sa rešenjima: $s=2$ i $t=1$.

8. Ubacimo li vrednosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u jednakost imamo:
$\Big(\big((-1,-2,1)\cdot(1,0,0)+(3,2,3)\cdot(0,1,0)\big)\cdot\big((-1,-2,1)+(3,2,3)\big)\Big)$
$\cdot(0,0,1)=\big((-1+2)\cdot(2,0,4)\big)\cdot(0,0,1)=(2,0,4)\cdot(0,0,1)=4.$

9. $t=1$.

10. Koristeći relaciju $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ dobijamo rešenja: $t=1$ i $t=-3$.

11. Drugi uslov je ekvivalentan uslovu $\vec{x}\cdot\vec{b}=0$, pa nas za $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ uslovi dovode do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3 &= 3 \\ 3x_1-x_3 &= 0 \\ x_1+x_2+x_3 &= 6, \end{aligned}$$

koji nam daje vektor $\vec{x}=(1,2,3)$.

12. Iz jednakosti

$$((1,2,3)+t\cdot(t,1,-1))\cdot(-1,0,1)=0$$

dobijamo rešenja: $t_1=1$ i $t_2=-2$.

13. Uslovi iz zadatka nas dovode do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &= 3 \\ x_1+x_2-2x_3 &= 0 \\ -2x_1+2x_2-5x_3 &= -1, \end{aligned}$$

a on do rešenja: $\vec{x}=(0,2,1)$.

14. Rešavamo sistem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 &= 9 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} &= \sqrt{18}, \end{aligned}$$

koji ima dva rešenja: $\vec{x_1} = (3,3,0)$ i $\vec{x_2} = (-1,1,4)$.

15. Ugao kod temena A zaklapaju vektori $\overrightarrow{AB} = (0,4,0)$ i $\overrightarrow{AC} = (0,2,2)$, pa iz

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{8}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

sledi da je $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

16. Ako je ugao prav tada je skalarni proizvod vektora koji ga čine jednak nuli. Nalazimo da je $\overrightarrow{AB} = (0,-2,-4)$, $\overrightarrow{BC} = (2,1,3)$ i $\overrightarrow{CA} = (-2,1,1)$. Iz $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$ zaključujemo da ugao kod temena A nije prav, analogno iz $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 14$ sledi da ugao kod temena B takodje nije prav, dok iz $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ imamo da je ugao kod temena C prav, pa je time trougao ABC pravougli.

17. Odredićemo prvo kosinus ugla koji zaklapaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot 3}.$$

Označimo sa $\vec{h}$ vektor povučen iz krajnje tačke vektora $\vec{b}$ normalno na vektor $\vec{a}$. Iz pravouglog trougla dobijamo relaciju:

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{pr_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

odakle je $|pr_{\vec{a}}\vec{b}| = \frac{2}{3}$. Kad imamo dužinu vektora $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ i znamo da je on istog pravca i smera kao i vektor $\vec{a}$, lako nalazimo da je

$$\vec{proj} = \frac{pr_{\vec{a}}\vec{b}}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\frac{2}{3}}{3}(2,-2,1) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

18. Iskoristimo prethodni zadatak i nadjimo $\overrightarrow{BA'}$ projekciju vektora

$\overrightarrow{BA} = (4,-3,0)$ na vektor $\overrightarrow{BC} = (1,-2,2)$. Sada je

$$\cos(\angle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3},\ |\overrightarrow{BA'}| = \frac{10}{3},\ \overrightarrow{BA'} = \Big(\frac{10}{9},-\frac{20}{9},\frac{20}{9}\Big).$$

Kako je $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}$ visinu odredjuje vektor:

$$\overrightarrow{AA'} = (-4,3,0)+\Big(\frac{10}{9},-\frac{20}{9},\frac{20}{9}\Big) = \Big(-\frac{26}{9},\frac{7}{9},\frac{20}{9}\Big).$$

19. Lako dobijamo da je $\vec{m} = (2,5,-5)$, $\vec{n} = (-6,0,5)$, $\vec{m}-3\vec{i} = ((-1,5,-5)$ i $\vec{n}+\vec{j}+2\vec{k} = (-6,1,7)$. Sada možemo odrediti vektorske proizvode:

$$\vec{m}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -5 \\ -6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 25\vec{i}+20\vec{j}+30\vec{k} \text{ i}$$

$$(\vec{m}-3\vec{i})\times(\vec{n}+\vec{j}+2\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ -6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 40\vec{i}+37\vec{j}+29\vec{k}.$$

Krajnje rešenje je $(25,20,30)\cdot(40,37,29) = 1000+740+870 = 2610$.

20. Površinu tetraedra (trostrana piramida) čine četiri trougla konstruisana nad vektorima:

$\overrightarrow{AB} = (1,1,-3)$, $\overrightarrow{AC} = (0,3,-3)$, $\overrightarrow{AD} = (1,-3,-3)$, $\overrightarrow{BC} = (-1,2,0)$ i $\overrightarrow{BD} = (0,-4,0)$.

Ukupna površina je $P = P_1+P_2+P_3+P_4$, gde je P_1 površina trougla konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, P_2 trougla nad $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$, P_3 trougla nad $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ i P_4 površina trougla nad $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BD}$. Kako je $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (6,3,3)$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (-12,0,-4)$, $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD} = (-18,-3,-3)$ i $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = (0,0,4)$, imamo da je površina:

$$P = P_1+P_2+P_3+P_4 = \frac{3}{2}\sqrt{6}+2\sqrt{10}+\frac{3}{2}\sqrt{38}+2.$$

21. $t = \frac{1}{2}$.

22. Koristeći sabiranje i oduzimanje vektora dijagonala dobijamo:

$$\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b} = (3,-2,0) \text{ i } \overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{b}-\overrightarrow{a} = (-1,-4,2).$$

Sada je $\cos(\angle\overrightarrow{d_1},\overrightarrow{d_2}) = \dfrac{5}{\sqrt{13}\sqrt{21}}$.

23. 140.

24. $z = -3 - 2i$.

25. Podsetimo se da je $|z|^2 = 11t^2 + 12t + 4$ i na kraju je $t = \dfrac{9}{22}$.

26. Iz podataka koje imamo prvo odredjujemo:

$$\vec{m} \cdot \vec{m} = 9,\ \vec{n} \cdot \vec{n} = 4 \ \text{ i } \ \vec{m} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m} = -6,$$

a zatim, primenjujući zakon distributivnosti dobijamo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{m} + \vec{n}) \cdot (-3\vec{m} + 2\vec{n}) = -6\vec{m} \cdot \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{n} + 2\vec{n} \cdot \vec{n} = -52.$$

27. $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 5$.

28. Ne, jer je $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{22}}{11}\right)$, $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

29. Izjednačimo li kosinuse traženih uglova dolazimo do jednačine

$$\frac{3t - 2}{\sqrt{10t^2 - 20t + 20}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

pa su rešenja: $t = -6$ i $t = 2$.

30. $p = \dfrac{1}{4}$.

31. Iz definicije skalarnog proizvoda dobijamo bitnu relaciju:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2,}$$

koju koristimo da bi našli $|\vec{p}|$ i $|\vec{q}|$:

$$|\vec{p}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 7,$$

$$|\vec{q}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1.$$

Sada je $\cos\alpha = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

32. (a) Po definiciji vektorski proizvod dva vektora je vektor normalan na ravan koju odredjuju dati vektori, pa je

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} - 17\vec{j} - 7\vec{k}$$

vektor normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

(b) Kako vektor ne menja pravac, već samo intenzitet pri množenju sa skalarom, lako dobijamo da su, recimo, sledeći vektori normalni i na $\vec{a}$ i na $\vec{b}$: $2\vec{c} = (2, -34, -14), \vec{c} = (-1, 17, 7)$ itd.

33. $P = \frac{3}{2}\sqrt{10},\ O = \sqrt{11} + 3 + \sqrt{14}$.

34. $P = \sqrt{2},\ O = 3 + \sqrt{33} + \sqrt{8}$.

35. Četvrto teme je $D = (-3, 0, 0)$, a površina $P = \sqrt{38}$.

36. Uglove nalazimo preko definicije skalarnog proizvoda:

$$\cos\angle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DA}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

odakle je $\angle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \dfrac{3\pi}{4}$. Ostali uglovi su $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ $= \dfrac{\pi}{4}$ i $\angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2}$. Površinu dobijamo kao sumu površina trouglova

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{35}{2} + 3 = \frac{41}{2}.$$

37. Da bi vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ bili kolinearni treba da je $\vec{p} \times \vec{q} = 0$. Takodje, zbog kolinearnosti vektora sa samim sobom je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0$. Sada je

$$(\alpha\vec{a} + 5\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}) = 15\vec{b} \times \vec{a} - \alpha\vec{a}\vec{b}$$

$$= -15\vec{a} \times \vec{b} - \alpha\vec{a}\vec{b} = (-15 - \alpha)\vec{a} \times \vec{b} = 0.$$

Iz uslova da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni sledi da je $\alpha = -15$.

38. Iz definicije vektorskog proizvoda imamo da je

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = 5|\vec{a} \times \vec{b}| = 5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 15.$$

39. $P = 50\sqrt{2}$.

40. Iz činjenice da je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ zaključujemo da su vektori komplanarni.

41. Ako tačke pripadaju jednoj ravni znači da su vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ komplanarni. Pošto je $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ sledi da vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ pripadaju istoj ravni, pa to važi i za tačke A, B, C, D.

42. $V = 25$.

43. Odredimo prvo vektore $\overrightarrow{AB} = (2,-2,-3)$, $\overrightarrow{AC} = (4,0,6)$ i $\overrightarrow{AD} = (-7,-7,7)$, pa koristeći mešoviti proizvod dobijamo da je $V = \dfrac{154}{3}$.

44. Zapreminu date piramide možemo odrediti koristeći mešoviti proizvod. Ona je $V = 14$. Takodje, zapreminu možemo odrediti preko formule $V = \dfrac{B \cdot H}{3}$, gde je B površina baze, u našem slučaju trougla ABC. Sada možemo odrediti visinu i ona je $H = \sqrt{14}$.

45. $H = \dfrac{49}{\sqrt{323}}$.

46. $V = \dfrac{1}{3}$, $P = \dfrac{\sqrt{14}}{2} + \sqrt{6} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{61}$.

47. Kako je
$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{pr_{\vec{b}}\vec{a}}{|\vec{a}|},$$
traženi intenzitet je $pr_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

48. Projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ je $\vec{proj} = (\dfrac{16}{5}, \dfrac{8}{5})$, pa iz relacije $\vec{h_a} = \vec{b} - \vec{proj}$ dobijamo da je $\vec{h_a} = (-\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5})$. Intenzitet vektora $\vec{h_a}$ je $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

49. Projekcija je $\vec{proj} = (6,2)$, a traženi parametri $p = 8$ i $q = -4$.

50. *I način.* Da bi vektori bili ivice kocke potrebno je da su normalni i da su iste dužine, a za vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je to ispunjeno. Za vektor $\vec{c}$ tražimo da je normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i da je istog intenziteta. Formiramo sistem jednačina
$$\begin{aligned} \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} &= 11 \\ 7c_1 + 6c_2 - 6c_3 &= 0 \\ 6c_1 + 2c_2 + 9c_3 &= 0, \end{aligned}$$
koji ima dva rešenja: $\vec{c} = (-6,9,2)$ ili $\vec{c} = (6,-9,-2)$.

II način. Jedinični vektor, normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dobijamo na sledeći način: $\vec{c}_0 = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}, \vec{c} = |\vec{a}|\vec{c}_0$. Iz $\vec{a}\times\vec{b} = (66,-99,22) = 11(6,-9,-2)$ dobijamo da je $\vec{c} = 11\vec{c}_0 = (6,-9,-2)$. Drugo rešenje dobijamo iz relacija $\vec{c}_0 = \dfrac{\vec{b}\times\vec{a}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}, \vec{c} = |\vec{a}|\vec{c}_0$, i ono je $\vec{c} = (-6,9,2)$.

51. Zapisani jednačinama, uslovi su sledeći:

$$|\vec{v}| = 1,\ (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{v} = 0 \ \text{ i } \ \vec{v} \cdot \vec{a} = 0,$$

a rešenja: $\vec{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{j} + \vec{k})$.

Glava 7

Analitička geometrija

• **Tačke** u prostoru $\mathbb{R}^3$ predstavljamo kao uredjene trojke

$$\boxed{M_0(x_0, y_0, z_0),}$$

gde su koordinate x_0, y_0, z_0 projekcije tačke M_0 na x, y, z osu.
• **Kanonički oblik jednačine prave:**

$$\boxed{p: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3},}$$

gde je $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka na pravoj p, a $\vec{a}_p = (a_1, a_2, a_3)$ vektor paralelan sa p.
• **Parametarski oblik jednačine prave:**

$$\boxed{x = a_1 t + x_0, \;\; y = a_2 t + y_0, \;\; z = a_3 t + z_0.}$$

• **Jednačina prave kroz dve tačke** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\boxed{p: \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.}$$

• **Skalarni oblik jednačine ravni.** Jednačina ravni α koja je odredjena jednom svojom tačkom $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom normale $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$, data je sa:

$$\boxed{\alpha: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,}$$

ili

$$\boxed{\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,}$$

gde je $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

• **Segmentni oblik** jednačine ravni:

$$\boxed{\alpha : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,}$$

gde su $a = -\dfrac{D}{A}, b = -\dfrac{D}{B}$ i $c = -\frac{D}{C}$ redom odsečci na x, y i z osi.
• **Jednačina ravni koja sadrži tri nekolinearne tačke** $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ data je sa

$$\boxed{\alpha : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.}$$

• **Ugao izmedju dve prave** p i q je jednak uglu koji grade njima paralelni vektori $\vec{a}_p$ i $\vec{a}_q$, tj.

$$\boxed{\cos\angle(p, q) = \frac{\vec{a}_p \cdot \vec{a}_q}{|\vec{a}_p||\vec{a}_q|}.}$$

• **Ugao izmedju dve ravni** α i β je ugao izmedju njihovih vektora normale $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$

$$\boxed{\cos\angle(\alpha, \beta) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.}$$

• **Ugao izmedju prave** p **i ravni** α je komplementaran ugao od ugla koji zaklapaju vektor paralele prave p i vektor normale ravni α, tj.

$$\boxed{\sin\angle(\alpha, p) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{a}_p}{|\vec{n}_\alpha||\vec{a}_p|}.}$$

• **Projekcija tačke** M **na ravan** α je tačka prodora normale povučene iz tačke M na ravan α kroz ravan α.
• **Projekcija tačke** M **na pravu** p je tačka dobijena u preseku normale iz tačke M na pravu p i prave p.
• **Rastojanje tačke** $M_2(x_2, y_2, z_2)$ **od prave** $p : \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$, u oznaci d, dato je formulom:

$$\boxed{d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{a}_p|}{|\vec{a}_p|},}$$

gde je $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

• **Rastojanje tačke** $M_1(x_1,y_1,z_1)$ **od ravni** $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ dato je izrazom:

$$\boxed{d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.}$$

• **Rastojanje dve mimoilazne prave** $p:\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{a_2}=\dfrac{z-z_1}{a_3}$ i $q:\dfrac{x-x_2}{b_1}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{b_3}$ dato je formulom:

$$\boxed{d=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\right|}{|\vec{a}_p\cdot\vec{a}_q|}=\frac{|(\vec{a}_p\times\vec{a}_q)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{a}_p\times\vec{a}_q|},}$$

gde je $M_1(x_1,y_1,z_1)$, a $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

• Prave $p:\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{a_2}=\dfrac{z-z_1}{a_3}$ i $q:\dfrac{x-x_2}{b_1}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{b_3}$ se **seku** ili su paralelne, ako je

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=0.}$$

U suprotnom prave p i q su mimoilazne.

Primeri

1. Napisati kanonički oblik jednačine prave p koja sadrži tačku $A(2,-1,3)$ i paralelna je vektoru $\vec{a}=(3,1,-1)$. Napisati koordinate još jedne tačke koja pripada pravoj p i još jednog vektora koji je sa datom pravom paralelan.

   Rešenje:

   Jednačina prave p u kanoničkom obliku je

   $$p:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-1}.$$

   Medjutim, iz dobijene jednačine sledi da i tačka $B(5,0,2)$ pripada pravoj p, pa je i

   $$p:\frac{x-5}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$$

jednačina posmatrane prave. Takodje, vektor $\vec{b} = (-6,-2,2)$ je paralelan vektoru $\vec{a}$, a time i pravi p, pa je i

$$p: \frac{x-5}{-6} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$$

jednačina početne prave. Raznim odabirima tačaka prave p i njoj paralelnih vektora dobijamo beskonačno mnogo jednačina koje reprezentuju pravu p.

2. Neka je data jednačina prave p u kanoničkom obliku:

$$p: \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Napisati parametarski oblik jednačine prave p.

Rešenje:

Iz kanoničkog oblika jednačine prave imamo da je:

$$\frac{x+2}{2} = t,\ \frac{y+3}{-1} = t,\ \frac{z}{2} = t,$$

pa je parametarska jednačina prave:

$$x = 2t-2,\ \ y = -t-3,\ \ z = 2t.$$

Za razne vrednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ generišemo tačke ove prave. Tako za $t = -1$ dobijamo tačku $A(-4,-2,-2)$, za $t = 0$ imamo tačku $B(-2,-3,0)$, dok za $t = 1$ nalazimo $C(0,-4,2)$.

3. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačke $A(3,-1,3)$ i $B(-2,-4,0)$.

Rešenje:

Iz formule za jednačinu prave kroz dve tačke dobijamo

$$p: \frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-(-1)}{-4-(-1)} = \frac{z-3}{0-3},$$

$$p: \frac{x-3}{-5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{-3}.$$

4. Data je jednačina prave p u parametarskom obliku:

$$x = t-2,\ \ y = 2t+1,\ \ z = 3t+2.$$

Napisati kanonički oblik jednačine prave p.

Rešenje:

Za vrednosti parametra $t = 0$ i $t = 1$, iz parametarskog oblika jednačine prave p dobijamo dve njene tačke $(-2,1,2)$ i $(-1,3,5)$, koje nam daju kanonički oblik jednačine prave p i on je

$$p : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

5. Naći jednačinu ravni α u skalarnom obliku, ako joj pripada tačka $M_0(3,2,1)$, a vektor $\vec{n}_\alpha = (-1,1,-2)$ je normalan na nju.

   Rešenje:

   Imamo da je
   $$\alpha : -(x-3)+(y-2)-2(z-1) = 0,$$
   odnosno $\alpha : -x+y-2z+3 = 0$.

6. Naći segmentni oblik jednačine ravni:
   $$\alpha : x-3y+2z-6 = 0.$$

   Rešenje:

   Segmentni oblik date ravni je:
   $$\alpha : \frac{x}{6}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{3} = 1,$$
   odseči na x,y,z osi su $a = 6, b = -2, c = 3$, odnosno data ravan seče ose u tačkama $(6,0,0),(0,-2,0)$ i $(0,0,3)$.

7. Napisati jednačinu ravni koja sadrži tačke $M_0(-2,1,-1)$, $M_1(3,-2,0)$ i $M_2(1,1,-2)$.

   Rešenje:

   Jednačinu ravni α dobijamo izračunavanjem sledeće determinante:
   $$\alpha : \begin{vmatrix} x-(-2) & y-1 & z-(-1) \\ 3-(-2) & -2-1 & 0-(-1) \\ 1-(-2) & 1-1 & -2-(-1) \end{vmatrix} = 0,$$
   odnosno
   $$\alpha : \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z+1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$
   Izračunamo li determinantu imamo da je $\alpha : 3x+8y+9z+7 = 0$.

8. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačku $M_0(1,1,-4)$ i pravu
$$p: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{-2}.$$
Rešenje:
Prvo ćemo uzeti dve proizvoljne tačke prave p. Za to nam je najpogodniji parametarski oblik prave p :
$$p: x = -t-2, y = -3t, z = -2t-3,\ t \in \mathbb{R},$$
odakle za $t = 0$ i $t = 1$ dobijamo tačke $M_1(-2,0,-3)$ i $M_2(-3,-3,-5)$. Sada ispisujemo jednačinu ravni α kroz tačke M_0, M_1 i M_2 :
$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$
Dakle, jednačina je $\alpha: 5x-7y+8z+34 = 0$.

9. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži prave p i q (koje se seku), gde su
$$p: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{i} \quad q: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{3}.$$
Rešenje:
Prave p i q se seku u tački $M_0(2,-1,1)$ (presek pravih je detaljno objašnjen u narednim zadacima). Odaberemo tačku $M_1(3,-2,3)$ sa prave p i tačku $M_2(-2,1,-5)$ sa prave q i imamo jednačinu ravni α koja sadrži prave p i q :
$$\alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$
odnosno $\alpha: x-y-z-2 = 0$.

10. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži paralelne prave p i q :
$$p: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1} \ \text{i}\ q: \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}.$$
Rešenje:
Odaberemo dve tačke sa prave p, recimo $M_0(-1,0,0)$ i $M_1(1,3,-1)$, i jednu tačku sa prave q, recimo $M_2(0,2,0)$, i ispišemo jednačinu ravni kroz tri tačke:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

pa je $\alpha : 2x - y + z + 2 = 0$.

11. Odrediti presek pravih:

$$p : \frac{x-8}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2} \ \text{ i } \ q : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$$

Rešenje:

I način. Parametarski oblik jednačine prave p je:

$$x = -3t+8, \ y = t-1, \ z = -2t+4,$$

dok za pravu q parametarski oblik je:

$$x = s+1, \ y = -s, \ z = s.$$

Izjednačimo li x, y i z iz parametarskih oblika jednačina pravih p i q, dolazimo do pravougaonog sistema jednačina:

$$\begin{array}{ll} (x=) & -3t+8 = s+1 \\ (y=) & t-1 = -s \\ (z=) & -2t+4 = s, \end{array}$$

čije rešenje je $t = 3, s = -2$. Ubacimo li $t = 3$ u parametarsku jednačinu prave p ili $s = -2$ u parametarsku jednačinu prave q, dobijamo istu tačku $(-1,2,-2)$, koja je presek prava p i q.

II način. Ako neka tačka pripada ovim dvema pravama, onda ona mora da zadovolji obe date jednačine. Pravougaoni sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x-8}{-3} & = & \dfrac{y+1}{1} \\ \dfrac{x-8}{-3} & = & \dfrac{z-4}{-2} \\ \dfrac{x-1}{1} & = & \dfrac{y}{-1} \\ \dfrac{x-1}{1} & = & \dfrac{z}{1} \end{array}$$

ima jedinstveno rešenje $x = -1, y = 2$ i $z = -2$, pa je presek prava p i q tačka $(-1,2,-2)$.

12. Odrediti presek pravih:

$$p: \frac{x-8}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2} \ \text{ i } \ q: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Rešenje:

I način. Parametarski oblici pravih p i q nas dovode do sistema:

$$\begin{aligned} -3t+8 &= s+1 \\ t-1 &= -s \\ -2t+4 &= 2s, \end{aligned}$$

koji je protivrečan, što nas navodi na zaključak da prave p i q nemaju presečnih tačaka.

II način. Kao i u prethodnom primeru, posmatramo pravougaoni sistem:

$$\begin{aligned} x-8 &= -3(y+1) \\ -2(x-8) &= -3(z-4) \\ -(x-1) &= y \\ 2(x-1) &= z \end{aligned}$$

koji nema rešenja, pa i date prave nemaju presek.

13. Odrediti presek pravih:

$$p: \frac{x-8}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2} \ \text{ i } \ q: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Rešenje:

I način. U ovom slučaju posmatramo sistem:

$$\begin{aligned} -t+8 &= s+1 \\ t-1 &= -s \\ -2t+4 &= 2s, \end{aligned}$$

koji je kontradiktoran, te se prave p i q ne seku.

II način. Sistem:

$$\begin{aligned} x+y &= 7 \\ -2x+z &= -12 \\ -x-y &= -1 \\ 2x-z &= 2 \end{aligned}$$

je kontradiktoran, pa zaključujemo da prave p i q nemaju presek. Prave p i q su paralelne, za razliku od prethodnog primera u kojem su posmatrane prave bile mimoilazne.

14. Odrediti presek pravih:

$$p : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-1} \text{ i } q : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

Rešenje:

I način. Posmatramo sistem:

$$\begin{aligned} -t+2 &= s+1 \\ t-1 &= -s \\ -t+4 &= s+3, \end{aligned}$$

koji se svodi na sistem jednačina $t = s-1$, te ima beskonačno mnogo rešenja, iz čega sledi da u preseku prava p i q nalazimo beskonačno mnogo tačaka, tj. da se one poklapaju. Zaista, kada se u parametarski oblik jednačine prave p zameni $t = s-1$ i ona sredi, dobija se jednačina prave q.

II način. Dolazimo do sistema:

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ -x+z &= 2 \\ -x-y &= -1 \\ x-z &= -2, \end{aligned}$$

koji je neodredjen sa jednim stepenom slobode i čija su rešenja oblika $(k, 1-k, k+2), k \in \mathbb{R}$, što je upravo i parametarska jednačina prave, koja je presek pravih p i q, iz čega sledi da se prave p i q poklapaju.

15. Odrediti presek ravni:

$$\alpha : 2x+3y-z-2 = 0 \text{ i } \beta : x+y+z-6 = 0.$$

Rešenje:

I način. Tačke koje pripadaju obema ravnima zadovoljavaju jednačine obe ravni, pa rešavamo pravougaoni sistem:

$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= 2 \\ x+y+z &= 6. \end{aligned}$$

Dati sistem ima beskonačno mnogo rešenja sa jednim stepenom slobode i ona su oblika $(\frac{8-4t}{3}, t, \frac{t+10}{3})$, $t \in \mathbb{R}$, što je ujedno i parametarski oblik prave p koja se nalazi u preseku ravni α i β. Jednačinu prave p dajemo i u kanoničkom obliku:

$$p : \frac{x-\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{y}{1} = \frac{z-\frac{10}{3}}{\frac{1}{3}}.$$

II način. Kako vektori normala $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ ravni α i β nisu kolinearni, zaključujemo da je presek ravni α i β prava p. Prava p je normalna na vektore $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$, pa iz definicije vektorskog proizvoda sledi da je vektor paralele prave p jednak vektorskom proizvodu vektora $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$, tj.

$$\vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}.$$

Da bi imali jednačinu prave p treba nam još jedna njena tačka, a nju lako dobijamo iz jednačina ravni, slobodno birajući vrednost jedne promenljive, npr. $x = 0$, i tražena tačka je $M_0(0,2,4)$. Presek ravni je prava:

$$p : \frac{x}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-4}{-1}.$$

16. Odrediti presek ravni:

$$\alpha : 2x - 3y + 4z - 3 = 0 \;\text{ i }\; \beta : -4x + 6y - 8z + 6 = 0.$$

Rešenje:

Vektori normala ovih ravni $\vec{n}_\alpha = (2,-3,4)$ i $\vec{n}_\beta = (-4,6,-8)$ su kolinearni i tačka $M_0(0,-1,0)$ pripada obema ravnima, pa se ove ravni podudaraju i njihov presek je ravan $2x - 3y + 4z - 3 = 0$.

17. Odrediti presek ravni:

$$\alpha : 2x - 3y + 4z - 3 = 0 \;\text{ i }\; \beta : -4x + 6y - 8z + 5 = 0.$$

Rešenje:

Ako neka tačka (x,y,z) pripada preseku ravni α i β, tada ona mora da zadovoljava jednačine obe ravni, odnosno sistem:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 3 \\ -4x + 6y - 8z &= -5, \end{aligned}$$

koji je protivrečan pa date ravni nemaju presek (one su paralelne).

18. Odrediti presek ravni:

$$\alpha: x-y+2z-8=0,\ \beta: -2x-3y+z-9=0 \text{ i } \gamma: 3x-y+3z-9=0.$$

Rešenje:

Presek ravni dobijamo iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned} x-y+2z &= 8 \\ -2x-3y+z &= 9 \\ 3x-y+3z &= 9 \end{aligned}$$

i to je tačka $A(-2,0,5)$.

19. Odrediti presek ravni:

$$\alpha: 2x-y-z-2=0,\ \beta: x+y+2z-4=0 \text{ i } \gamma: 5x-y-8=0.$$

Rešenje:

Tačke koje pripadaju datim ravnima zadovoljavaju sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x-y-z &= 2 \\ x+y+2z &= 4 \\ 5x-y &= 8. \end{aligned}$$

Ovaj sistem je neodredjen, ima jedan stepen slobode i rešenja su mu $(t,5t-8,-3t+6)$, $t\in\mathbb{R}$, pa je traženi presek prava

$$p: \frac{x}{1}=\frac{y+8}{5}=\frac{z-6}{-3}.$$

20. Odrediti presek ravni:

$$\alpha: -x+2y-z-3=0,\ \beta: 2x-4y+2z+6=0 \text{ i } \gamma: -4x+8y-4z-12=0.$$

Rešenje:

Kako je sistem:

$$\begin{aligned} -x+2y-z &= 3 \\ 2x-4y+2z &= -6 \\ -4x+8y-4z &= 12 \end{aligned}$$

neodredjen, sa dva stepena slobode i rešenjima $(t,s,-t+2s-3)$, $t,s\in\mathbb{R}$, dobijamo da je presek ravan $-x+2y-z-3=0$ (ravni α, β i γ su podudarne).

21. Odrediti presek ravni:

$$\alpha : 3x+y-2z-5=0,\ \beta : -2x+3y-z+4=0 \text{ i } \gamma : 2x+8y-6z-3=0.$$

Rešenje:

Tačke koje pripadaju preseku ovih ravni zadovoljavaju sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 3x+y-2z &= 5 \\ -2x+3y-z &= -4 \\ 2x+8y-6z &= 3, \end{aligned}$$

koji je nemoguć, pa je presek prazan skup. Ove ravni nisu paralelne (nisu im kolinearni vektori normala) i nemaju zajedničkih tačaka. Preseci ravni α i β, α i γ, β i γ su medjusobno paralelne prave, što ostavljamo čitaocu da pokaže.

22. Odrediti presek prave p i ravni α, ako je :

$$p : \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \text{ i } \alpha : 2x+3y+4z+5=0.$$

Rešenje:

I način. Parametarski oblik jednačine prave p je

$$x=-3t+1,\ y=2t-1 \text{ i } z=-2t+1.$$

Ubacimo li ove vrednosti u jednačinu ravni dobijamo da je

$$2(-3t+1)+3(2t-1)+4(-2t+1)+5=0,$$

odakle je $t=1$. Sada imamo i presečnu tačku $M_0(-2,1,-1)$. Presečnu tačku prave i ravni nazivamo i **prodor prave kroz ravan**.

II način. Presečne tačke prave p i ravni α zadovoljavaju sistem jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{-3} &= \frac{y+1}{2} \\ \frac{x-1}{-3} &= \frac{z-1}{-2} \\ 2x+3y+4z &= -5, \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rešenje $x=-2, y=1, z=-1$, te je traženi presek tačka $(-2,1,-1)$.

23. Odrediti presek prave i ravni:

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1} \;\text{ i }\; \alpha : -x+2y-3z+1=0.$$

Rešenje:

I način. Iz jednačine prave imamo veze $x=t$, $y=2t+1$ i $z=t+1$, koje ubačene u jednačinu ravni daju

$$-t+2(2t+1)-3(t+1)+1=0,$$

jednačinu sa beskonačno mnogo rešenja. Dakle, presek date prave i ravni je čitava prava p, odnosno prava p leži u ravni α.

II način. Presečne tačke dobijamo iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned} 2x-y &= -1\\ x-z &= -1\\ -x+2y-3z &= -1, \end{aligned}$$

koji ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(t,2t+1,t+1), t\in\mathbb{R}$, što nam ujedno daje i parametarski oblik jednačine prave p.

24. Odrediti presek prave i ravni:

$$p : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4} \;\text{ i }\; \alpha : 3x-y+z-1=0.$$

Rešenje:

Ponovimo li postupak prikazan u prethodnim primerima dolazimo do kontradiktornog sistema, pa data prava i ravan nemaju zajedničkih tačaka. Kako je $\vec{a}_p\cdot\vec{n}_\alpha=0$ zaključujemo da je prava p paralelna ravni α.

25. Naći ugao izmedju pravih:

$$p : \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3} \;\text{ i }\; q : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Rešenje:

Ugao medju ovim pravama je ugao medju vektorima $\vec{p}=(1,2,3)$ i $\vec{q}=(1,1,1)$, i to je:

$$\cos\angle(p,q)=\cos\angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{6}{\sqrt{42}},$$

odnosno $\angle(\vec{p},\vec{q})=\arccos\dfrac{6}{\sqrt{42}}$.

26. Odrediti ugao izmedju ravni

$$\alpha : x-3y-3z+2=0 \;\text{ i }\; \beta : 2x+2y+z-5=0.$$

Rešenje:

Vektori normala su $\vec{n}_\alpha=(1,-3,-3)$ i $\vec{n}_\beta=(2,2,1)$, pa je

$$\cos\angle(\alpha,\beta)=\cos\angle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)=\frac{-7}{3\sqrt{19}}.$$

27. Odrediti ugao koji zaklapaju prava p i ravan α, čije su jednačine:

$$p : \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{1} \;\text{ i }\; \alpha : 3x+5y-z-6=0.$$

Rešenje:

Prava i ravan zahvataju sledeći ugao:

$$\sin\angle(p,\alpha)=\cos\angle(\vec{p},\vec{n}_\alpha)=\frac{12}{\sqrt{6}\sqrt{35}}.$$

28. Odrediti projekciju tačke $M(1,3,-2)$ na ravan

$$\alpha : x+2y-z+3=0.$$

Rešenje:

Prvo ćemo pronaći normalu n iz tačke M na ravan α. Kako je prava n normalna na ravan α, zaključujemo da je vektor normale ravni α ujedno i vektor paralele za pravu n, što nam, uz činjenicu da tačka M pripada normali n, daje jednačinu prave n :

$$n : \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-1}.$$

Tražena projekcija je u preseku prave n i ravni α, i to je tačka $M_{proj}=(-1,-1,0)$.

29. Odrediti projekciju tačke $M(-2,-3,2)$ na pravu

$$p : \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2}.$$

Rešenje:

Odredićemo prvo ravan α, kojoj pripada tačka M i koja je normalna na pravu p. Jednačina ove ravni je

$$\alpha : x + 3y - 2z + 15 = 0.$$

Tražena projekcija se nalazi u preseku ravni α i prave p, i to je $M_{proj} = (1, -4, 2)$.

30. Odredimo rastojanje tačke $M(2,1,3)$ od prave

$$p : \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

Rešenje:

I način. Iskoristićemo formulu za rastojanje tačke od prave i za vrednosti $x_1 = 4, y_1 = 2, z_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 1$ i $z_2 = 3$ dobijamo:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1-2 & 3-1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3-1 & 2-4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-4 & 1-2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = 3.$$

II način. Rastojanje tačke M od prave p je zapravo dužina duži MM_{proj}, gde je M_{proj} projekcija tačke M na pravu p. Projekciju M_{proj} dobijamo kao presek prave p i ravni $\alpha : x + 2y + 2z - 10 = 0$, i to je $M_{proj} = (4, 2, 1)$. Sada lako dobijamo rastojanje tačke M od prave p :

$$d = |MM_{proj}| = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2 + (1-3)^2} = 3.$$

31. Odrediti rastojanje tačke $M(2,1,2)$ od ravni $\alpha : x + y + 2z - 13 = 0$.

Rešenje:

I način. Ubacimo li $x_1 = 2, y_1 = 1, z_1 = 2, A = 1, B = 1, C = 2$ i $D = -13$ u formulu za rastojanje tačke od ravni, dobijamo:

$$d = \left| \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 13}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} \right| = \left| \frac{-6}{\sqrt{6}} \right| = \sqrt{6}.$$

II način. Rastojanje tačke M od ravni α možemo dobiti i kao dužinu duži MM_{proj}, gde je M_{proj} projekcija tačke M na ravan α. Prvo formiramo pravu:

$$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2},$$

koja je normalna na ravan α i sadrži tačku M. Projekcija M_{proj} se nalazi u preseku prave p i ravni α, i ona je $M_{proj} = (3,2,4)$. Traženo rastojanje je

$$d = |MM_{proj}| = \sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{6}.$$

32. Odrediti rastojanje medju pravama:

$$p: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \text{ i } q: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

Rešenje:

Ubacimo li $(x_1,y_1,z_1) = (1,-2,0)$, $(x_2,y_2,z_2) = (0,1,3)$ i $\vec{p} = (3,-1,1)$, $\vec{q} = (2,-2,1)$ u formulu za rastojanje pravih, dobijamo da je:

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} 0-1 & 1-(-2) & 3-0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2}} \right| = \left| \tfrac{-16}{\sqrt{18}} \right| = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Prave p i q su mimoilazne.

33. Odrediti rastojanje pravih:

$$p: \frac{x+1}{1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2} \text{ i } q: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{-3}.$$

Rešenje:

Proverićemo prvo da li se prave p i q seku. Uslov da se prave seku je

$$\begin{vmatrix} 3-(-1) & 0-(-5) & 2-1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Prave p i q se seku pa je njihovo rastojanje $d = 0$. To smo mogli dobiti i primenom formule za rastojanje dve prave, jer je $|\vec{a}_p \times \vec{a}_q| \neq 0$.

34. Odrediti rastojanje izmedju pravih:

$$p: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ i } q: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-2}.$$

Rešenje:

Prave p i q su paralelne ili se poklapaju, jer su njihovi vektori paralela kolinearni. Kako tačka $(-2,0,3)$ sa prave p ne pripada pravoj q, prave se ne poklapaju. Rastojanje izmedju dve paralelne prave se odredjuje kao rastojanje izmedju prave i tačke. Rastojanje ćemo naći tako što odaberemo proizvoljnu tačku $M(-2,0,3)$ sa prave p i nadjemo njenu projekciju $M_{proj}(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{10}{3})$ na pravu q. Rastojanje izmedju prava p i q je rastojanje izmedju tačaka M i M_{proj}, odnosno:

$$d = |MM_{proj}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Rastojanje se takodje moglo odrediti korišćenjem formule za rastojanje tačke od prave.

35. Odrediti rastojanje izmedju pravih:

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{4} \;\text{ i }\; q : \frac{x-3}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-7}{-4}.$$

Rešenje:

Kao i u prethodnom primeru, i brojilac i imenilac u formuli za rastojanje jednaki su nuli, ali sada tačka $(1,-2,3)$ sa prave p pripada i pravoj q, pa se ove prave poklapaju, te je njihovo rastojanje 0.

Zadaci

1. Odrediti pravu p ako znamo da:

   (a) Tačka $(1,-3,-1) \in p$ i vektor $(2,-1,1)$ je paralelan pravi p;

   (b) Prava $q : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$ je paralelna pravi p i prava p seče $y-$ osu u vrednosti -3;

   (c) Pravoj p pripada tačka $C(1,2,3)$ i da je paralelna sa $x-$ osom;

   (d) Tačke $(3,-2,1)$ i $(5,-1,3)$ pripadaju pravi p;

   (e) Tačka $A(3,-1,2)$ leži na pravoj p i tačke $B(0,0,2)$ i $C(1,1,-2)$ pripadaju pravi q koja je paralelna pravi p.

2. Naći bar pet tačaka pravih:

   (a) $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$; (b) $q: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$;

   (c) $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{0}$; (d) $s: \frac{x}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{3}$.

3. Odrediti presek pravih p i q ako je:

   (a) $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{-1}$, $q: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$;

   (b) $p: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$, $q: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$;

   (c) $p: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}$, $q: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{1}$;

   (d) $p: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$, $q: \frac{x-6}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+2}{1}$;

   (e) $p: \frac{x}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $q: \frac{x+3}{6} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+5}{4}$.

4. Napisati jednačinu ravni α ako:

   (a) Tačke $A(1,0,1), B(2,3,3), C(2,1,2)$ pripadaju ravni α;

   (b) Ravan α sadrži tačke $A(1,3,-1), B(2,1,0), C(3,3,-1)$;

   (c) Prava $p: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ i tačka $A(1,6,1)$ pripadaju ravni α;

   (d) Prave $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ i $q: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$ se nalaze na ravni α;

   (e) Prave $p: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$ i $q: \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$ pripadaju α;

   (f) Tačka $A(3,1,1)$ pripada ravni α, a prava $p: \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{7} = \frac{z+1}{-3}$ je normalna na ravan α;

   (g) Ravan $\beta: x+y-z+3=0$ je paralelna sa ravni α i tačka $A(-2,-2,4)$ pripada ravni α;

   (h) Ravan $\beta: x+2y-z+4=0$ je normalna na ravan α i tačke $A(3,-1,2)$ i $B(1,4,0)$ pripadaju ravni α;

   (i) Prava $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+4}{1}$ je paralelna ravni α i tačke $A(3,3,3)$ i $B(1,2,5)$ pripadaju ravni α.

5. (a) Odabrati bar pet tačaka ravni $\alpha: x+y+2z+1=0$;
   (b) Naći bar dve prave koje pripadaju ravni $\beta: x-y+z=0$.

6. Pronaći koordinate preseka:

   (a) Ravni $\alpha: x-y+3z-8=0$ i prave $p: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$;
   (b) Prave $q: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{3}$ i ravni $\gamma: 2x-7y+z-3=0$;
   (c) Ravni $\alpha: x-3y+z-2=0$ i prave $p: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$;
   (d) Prave $p: \dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ i ravni $\alpha: -y+z-1=0$.

7. Odrediti presek ravni:

   (a) $\alpha: 2x+y+3z-1=0, \beta: 3x-5y+z+5=0, \gamma: -x+3y-z-3=0$;
   (b) $\alpha: 2x-3y+z-3=0, \beta: x-4y-z+2=0, \gamma: -x+2y+2z+3=0$;
   (c) $\alpha: x+3y-z-1=0, \beta: 2x+6y-2z-2=0, \gamma: -x-3y+z+1=0$;
   (d) $\alpha: x-y+z-3=0, \beta: 2x-y+z+2=0, \gamma: 3x-2y+2z+5=0$;
   (e) $\alpha: x+y+z-2=0, \beta: x+y+2z+1=0, \gamma: x+y-5=0$.

8. Naći projekciju:

   (a) Tačke $A(1,-1,3)$ na pravu $p: \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+2}{1}$;
   (b) Tačke $A(2,1,1)$ na ravan $\alpha: 3x-y+2z-1=0$;
   (c) Tačke $B(3,7,11)$ na pravu $p: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-6}{1}$;
   (d) Tačke $B(5,1,3)$ na ravan $\alpha: 2x+y-z-2=0$;
   (e) Tačke $A(2,\,3,\,-5)$ na pravu $p: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{2}$.

9. Opisati položaj navedenih prava i ravni u prostoru:
   (a) $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$; (b) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{0}$;
   (c) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$; (d) $x+y+3=0$; (e) $z-1=0$.

10. Naći jednačinu ravni α koja sadrži tačke A, B i C, ako se tačka A nalazi u preseku ravni β, γ i δ, tačka B u preseku pravih p i q, a tačka C u preseku prave r i ravni ε, za:

    $\beta : 2x+y+z-5=0$, $\gamma : x+2y+z-4=0$, $\delta : -x-y+2z-5=0$,

    $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{4}$, $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$,

    $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{1}$ i $\varepsilon : 2x+2y-z-3=0$.

11. Traži se A, presečna tačka ravni α, β i γ. Ravan α sadrži tačku $B(-1,1,-2)$ i pravu $p : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{5}$, ravan β sadrži prave $s : \frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{2}$ i $t : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-3}$, a ravan γ sadrži prave $r : \frac{x-4}{-3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$ i $q : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-3}$.

12. Odrediti pravu q koja sadrži tačku A čiji koeficijenti su jednaki nulama polinoma $P(x) = x^3 - x$ poredjanim od najmanje ka najvećoj. Takodje, q je paralelna pravi p koja pripada ravnima

    $$\alpha : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \beta : \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Pronaći ravan α koja sadrži tačku $A(x,y,z)$ i paralelna je ravni $\beta : Fx+Gy+Hz=0$. Koeficijenti F, G, H su nule polinoma $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ u opadajućem poretku, a koordinate tačke A su rešenja sistema:

    $$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+2y+3z &= 6 \\ x+3y+6z &= 10. \end{aligned}$$

14. Odrediti prave p_{AB} i p_{CD}, ako su date tačke $A(2,1,3), B(3,4,4), C(1,0,-1)$ i $D(2,3,0)$ i jednačinu ravni α u kojoj leže ove dve prave.

15. Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži tačke $A(2,1,0)$ i $B(3,2,1)$ i paralelna je sa pravom $p : \begin{cases} 2x+y-z+5=0 \\ 3x-y+2z+1=0 \end{cases}$.

16. (a) Odrediti ugao ϕ koji zaklapaju ravni $\alpha : x+y=3$ i $\beta : 4x+3y-5z=2$;

(b) Odrediti ugao ψ koji zaklapaju prava $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$ i ravan $\alpha:$ $x - y + 2z = 5$;

(c) Naći ugao izmedju prave $p: \begin{cases} x-2y+z+5=0, \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ i ravni $\alpha: \begin{vmatrix} x & 2y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

(d) Naći ugao medju pravama:

$$p: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \text{ i } q: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-2}.$$

17. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p: x = 6t+1, y = 4t+2, z = -4t+3$ i tačku $S(2,1,0)$.

18. Napisati jednačinu prave p koja sadrži tačku $S(1,2,1)$ i paralelna je sa pravom $q: \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+3y+6z-2=0 \end{cases}$.

19. Odrediti rastojanje:

(a) Izmedju tačke $A(1,3,0)$ i ravni $\alpha: 2x+y-3z+2=0$;

(b) Tačke $B(2,1,1)$ od prave $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$;

(c) Izmedju pravih $p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$ i $q: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{2}$;

(d) Izmedju pravih $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ i $q: \frac{x}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{7}$;

(e) Izmedju dve prave $p: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3}$ i $q: \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{3}$;

(f) Medju ravnima $\alpha: 2x+y+z-3=0$ i $\beta: 2x+y+z-5=0$;

(g) Izmedju prave $p: \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$ i ravni $\alpha: x+y-z+1=0$.

20. Naći prodor prave $p: \begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$ kroz ravan $\alpha: x-y+3z-2=0$.

21. Napisati jednačinu prave p kojoj pripada tačka $A(2,2,2)$, paralelna je ravni $\alpha: x-3y+z-5=0$ i seče pravu $q: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

22. Napisati jednačinu prave q koja prolazi kroz tačku $A(1,0,3)$, paralelna je ravni $\alpha: \begin{vmatrix} 2 & z & 6 \\ 4 & x+1 & 3 \\ 2 & y & 1 \end{vmatrix} + 11x - 16y = 0$ i seče pravu $p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}$.

23. Zadate su četiri tačke: $A(1,2,2), B(3,1,2), C(-1,5,2)$ i $D(2,-1,0)$. Odrediti jednačinu prave p koja prolazi kroz koordinatni početak i normalna je na prave p_{AB} i p_{CD}.

24. Napisati jednačinu prave p koja leži u ravni $\alpha: 2x+y-3z=5$, normalna je na pravu $q: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ i sadrži tačku A koja je presek prave q i ravni α.

25. Date su prave:

$$p: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} \text{ i } q: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{2}.$$

Napisati jednačinu prave n koja prolazi kroz presek pravih p i q i normalna je na ravan odredjenu pravama p i q.

26. Za koju vrednost parametra a prave $p: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ i $q: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-4}{a}$ se seku?

27. Date su prave $p: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{5}$ i $q: \dfrac{x-3}{m} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{1}$. Odrediti m, tako da su prave p i q normalne, a zatim odrediti jednačinu ravni α koja sadrži prave p i q. Odrediti presečnu tačku A pravih p i q.

28. Date su prave $p: \dfrac{x-3}{m} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ i $q: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{m}$. Naći m tako da se te dve prave seku. Da li te prave mogu biti paralelne?

29. Na pravoj $p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{2}$ naći tačke čije rastojanje od tačke $A(1,0,1)$ iznosi $\sqrt{8}$.

30. Prave $p: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-1}, q: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ i $r: \dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$ obrazuju trougao. Odrediti:

    (a) Jednačine prava koje sadrže težišne linije;

    (b) Težište T datog trougla.

31. Na pravama $p:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{0}$ i $q:\frac{x-3}{0}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{0}$ pronaći temena kvadrata, tako da tačka $E(2,-1,3)$ pripada jednoj od stranica kvadrata.

32. Tačka $A(0,0-5)$ je jedno teme pravougaonika, dok se preostala tri nalaze na pravama $p:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{1}$ i $q:\frac{x}{1}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-6}{-5}$. Odrediti temena B,C i D traženog pravougaonika.

33. Prave $p:\frac{x}{4}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-2}{-2}, q:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-4}$ i $r:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-4}{-2}$ ograničavaju trougao ABC ($A=p\cap r$, $B=p\cap q$, $C=q\cap r$).

    (a) Odrediti jednačine pravih koje sadrže visine iz temena B i C;

    (b) Koje su koordinate ortocentra H trougla ABC?

    (c) Pronaći površinu trougla ABC.

Rešenja

1. (a) Tražena prava je
$$p:\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+1}{1};$$

    (b) Kako su prave p i q paralelne njihovi vektori paralele su isti, a koordinate tačke na $y-$ osi koja pripada pravi p su $(0,-3,0)$, pa je rešenje:
$$p:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{-2};$$

    (c) Jedan od vektora paralele za $x-$ osu je $\vec{i}=(1,0,0)$, što nam uz tačku C sa prave daje jednačinu:
$$p:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{0};$$

    (d) Iskoristimo li obrazac za jednačinu prave kroz dve tačke dobijamo da je
$$p:\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2};$$

(e) Tačke B i C nam daju jednačinu prave $q : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-4}$, koja ima isti vektor paralele kao i tražena prava:

$$p : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-4}.$$

2. (a) Parametarska jednačina date prave je

$$x = 3t-1, \; y = 2t+1, \; z = 2t,$$

iz čega sledi da su sve tačke prave p oblika $(3t-1, 2t+1, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, pa ako odaberemo za t vrednosti $0,1,2,3,4$ dobijamo redom tačke $(-1,1,0), (2,3,2), (5,5,4), (8,7,6), (11,9,8)$. Jasno, ovaj odabir je slučajan i na prikazan način možemo generisati beskonačno mnogo tačaka prave p;

(b) Tačke su oblika $(-t-2, t+3, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, pa za $t = 0,1,2,3,4$ redom dobijamo tačke $(-2,3,0), (-3,4,2), (-4,5,4), (-5,6,6), (-6,7,8)$;

(c) Sve tačke prave r imaju dvojku za vrednost treće koordinate i oblika su $(2t+1, t, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Za $t = -2,-1,0,1,2$ imamo tačke $(-3,-2,2)$, $(-1,-1,2)$, $(1,0,2)$, $(3,1,2)$, $(5,2,2)$;

(d) Tačke su oblika $(0,-1,3t)$, $t \in \mathbb{R}$ i za vrednosti $t = -100$, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{25}{6}$, 2004 dobijamo respektivno tačke:

$$(0,-1,-300), (0,-1,-\frac{3}{2}), (0,-1,0), (0,-1,\frac{75}{6}), (0,-1,6012).$$

3. U sledećim rešenjima kombinovaćemo ranije navedena dva načina za odredjivanje preseka dve prave.

(a) Iz prvih jednakosti u jednačinama pravih p i q dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{1} &= \frac{y+3}{2} \\ \frac{x-2}{-1} &= \frac{y+1}{2}, \end{aligned}$$

odakle je $x = 1$ i $y = 1$. Ove vrednosti ubacimo u jednačine pravih p i q i iz obe dobijamo da je $z = 1$, pa zaključujemo da je presek tačka $(1,1,1)$;

(b) Parametarske jednačine datih pravih su

$$p : x = 2t - 2,\ y = t - 1,\ z = -t + 1 \text{ i } q : x = s + 1,\ y = s,\ z = -2s + 1,$$

odakle dobijamo tri jednačine:

$$\begin{aligned} 2t - 2 &= s + 1 \\ t - 1 &= s \\ -t + 1 &= -2s + 1. \end{aligned}$$

Rešenje prve dve jednačine je $t = 2$ i $s = 1$, što zadovoljava i treću jednačinu, pa je presek tačka $(2, 1, -1)$;

(c) Iz sistema koji tvore prve jednakosti iz jednačina p i q dobijamo da je $x = 1$ i $y = 0$, što ubačeno u jednačinu prave p daje rezultat $z = 1$, ali tačka $(1, 0, 1)$ ne zadovoljava jednačinu prave q, pa date prave nemaju presek;

(d) Parametarski oblik jednačina pravih p i q nas dovodi do sistema:

$$\begin{aligned} 2t + 2 &= -2s + 6 \\ -t - 1 &= s - 3 \\ -t &= s - 2. \end{aligned}$$

Dati sistem ima beskonačno mnogo rešenja, pa i date prave imaju u preseku beskonačno mnogo tačaka, što implicira da su one podudarne;

(e) Prve jednakosti iz jednačina nam daju vezu $x = -6 - 3y$. Ubacimo li ovu vezu u jednačinu prave p, imamo da je $z = -2y - 5$, dok iz jednačine prave q je $z = -2y - 7$, što je kontradikcija, te date prave nemaju presek.

4. (a) Formiramo determinantu:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 1 \\ 2 - 1 & 3 - 0 & 3 - 1 \\ 2 - 1 & 1 - 0 & 2 - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

odakle dobijamo da je $\alpha : x + y - 2z + 1 = 0$;

(b) Jednačina prave kroz tri tačke nas dovodi do determinante:

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z + 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

a ona do ravni $\alpha : y + 2z - 1 = 0$;

(c) Iz jednačine prave p dobijamo dve tačke, npr. $B(0,1,-1), C(-2,3,1)$, koje uz datu tačku $A(1,6,1)$ daju jednačinu

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

odnosno $\alpha : -x+y-2z-3=0$;

(d) Odaberemo dve tačke prave p, recimo $A(1,2,2)$ i $B(2,1,1)$, i jednu tačku prave q, na primer $C(3,2,-2)$, i iz formule za jednačinu ravni kroz tri tačke dobijamo da je $\alpha : 2x+y+z-6=0$;

(e) Tražena ravan je $\alpha : 2x+3y+z+1=0$;

(f) Iz normalnosti prave p i ravni α sledi da su vektor paralele prave p i vektor normale ravni α jednaki, pa je

$$\alpha : -4x+7y-3z+D=0.$$

Ako u ovu jednakost ubacimo tačku $A(3,1,1)$ dobijamo konačno rešenje: $\alpha : -4x+7y-3z+8=0$;

(g) Vektori normala ravni α i β su jednaki, što nam uz datu tačku A daje traženu jednačinu $\alpha : x+y-z+8=0$;

(h) Formiramo pravu p normalnu na ravan β koja sadrži tačku A. Njena jednačina je

$$p : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Ova prava pripada ravni α, pa lako dolazimo do jednačine ravni α, jer znamo pravu koju sadrži (p) i tačku van nje (B). Postupkom kao u ovom zadatku pod (c), dobijamo da je $\alpha : x+4y+9z-17=0$;

(i) Nadjemo pravu q paralelnu pravi p koja prolazi kroz tačku A. To je prava:

$$q : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Činjenica da prava q pripada ravni α, daje nam, uz tačku B, jednačinu ravni $\alpha : 3x-4y+z=0$.

5. (a) Tačke ravni generišemo tako što slobodno biramo vrednosti za dve promenljive, a treća promenljiva zavisi od odabrane dve, pa tako za:

$x=0$ i $y=0$ dobijamo tačku $A(0,0,-\frac{1}{2})$,

$x=0$ i $y=1$ imamo tačku $B(0,1,-1)$,

$x = 1$ i $y = 0$ dolazimo do tačke $C(1,0,-1)$,
$x = 1$ i $y = 2$ računamo $D(1,2,-2)$,
$x = 2004$ i $y = 1$, tačka $E(2004,1,-1003)$ je tačka ravni α;

(b) Odaberemo dve tačke ravni α, npr. $A(1,1,0)$ i $B(1,2,1)$, koje odredjuju pravu:

$$p : \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1},$$

dok tačke $C(2,1,-1)$ i $D(0,1,1)$ grade pravu:

$$q : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{2}.$$

6. (a) Parametarski oblik jednačine prave p :

$$x = t+1, \;\; y = t-1, \;\; z = t$$

ubacimo u jednačinu ravni α i dobijamo da je $t = 2$. Za ovakvo t presek je tačka $(3,1,2)$;

(b) Presek je tačka $(0,0,3)$;

(c) Ako parametarski oblik prave p :

$$x = t, \;\; y = t-1, \;\; z = 2t-3$$

ubacimo u jednačinu ravni α, dobijamo kontradiktornu jednačinu pa ova prava i ravan nemaju presek;

(d) Parametarski oblik prave p, ubačen u jednačinu ravni α, daje nam sistem sa beskonačno mnogo rešenja, pa je presek ravni α i prave p čitava prava p.

7. (a) Tačka u preseku ravni α, β i γ mora pripadati svim trima ravnima, a tim i zadovoljavati njihove jednačine, pa je dobijamo iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned} 2x+y+3z &= 1 \\ 3x-5y+z &= -5 \\ -x+3y-z &= 3 \end{aligned}$$

i ona je $(0,1,0)$;

(b) Presečna tačka je $(5,2,-1)$;

(c) Sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} x+3y-z & = & 1 \\ 2x+6y-2z & = & 2 \\ -x-3y+z & = & -1 \end{array}$$

je neodredjen sa dva stepena slobode, pa je presek ovih podudarnih ravni čitava ravan $\alpha : x+3y-z-1=0$;

(d) Sistem koji tvore date jednačine je kontradiktoran, pa ove ravni nemaju presek;

(e) Iz sistema jednačina:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x+y+2z & = & -1 \\ x+y & = & 5 \end{array}$$

dobijamo da je $x+y=5$ i $z=-3$, pa je presek ravni α, β i γ prava

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+3}{0}.$$

8. (a) Formiramo prvo ravan α koja je normalna na pravu p i sadrži tačku A. Njena jednačina je

$$\alpha : -x+3y+z+1=0.$$

Projekciju nalazimo u preseku ravni α i prave p, i ona je $A_{proj} = (-1,0,-2)$;

(b) Prvo nadjemo pravu p koja sadrži tačku A i normalna je na ravan α. Tražena prava je

$$p : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Projekcija je presek prave p i ravni α, i ona je $A_{proj} = (\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{7})$;

(c) Projekcija je $B_{proj} = (-1,1,3)$;

(d) Projekcija je $B_{proj} = (3,0,4)$;

(e) Projekcija je $A_{proj} = (\frac{8}{17}, \frac{29}{17}, -\frac{26}{17})$.

9. (a) Prava je paralelna $z-$ osi i prolazi kroz tačku $(1,1)$ u xy ravni;

(b) Prava pripada $z = 3$ ravni (ravan paralelna xy ravni i seče $z-$ osu u tački $(0,0,3)$) i u njoj odgovara pravi $y = 3x - 7$ iz xy ravni;

(c) Prava u xz ravni, gde zadovoljava jednačinu $x = z$;

(d) Ravan paralelna $z-$ osi (u xy ravni to je prava $y = -x - 3$ i tu pravu transliramo duž $z-$ ose);

(e) Ravan paralelna xy ravni, a prolazi kroz tačku $(0,0,1)$ na $z-$ osi.

10. Tražene tačke su $A(1,0,3), B(3,1,2)$ i $C(2,2,5)$, a ravan $\alpha : 4x - 5y + 3z - 13 = 0$.

11. Ravni su:
$$\alpha : 2x + y - z - 1 = 0,\ \beta : x + y + z - 7 = 0,\ \gamma : 2x + 3y + z - 11 = 0,$$
a tačka $A(2,1,4)$.

12. Dati polinom je $P(x) = x(x-1)(x+1)$, pa je tačka $A(-1,0,1)$. Jednačine ravni su:
$$\alpha : x - y + z - 2 = 0 \ \text{ i } \ \beta : x + y + 3y + 2 = 0,$$
odakle je prava $p : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ i konačno rešenje prava
$$q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

13. Faktorisan polinom je $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$, odakle je $(F,G,H) = (2,1,-1)$. Rešimo li sistem imamo da je $(x,y,z) = (1,1,1)$. Lako dolazimo do jednačine ravni
$$\alpha : 2x + y - z - 2 = 0.$$

14. Tražene prave su:
$$p_{AB} : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1} \text{ i } p_{CD} : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1},$$
a ravan $\alpha : -11x + 3y + 2z + 13 = 0$.

15. Prava p je data kao presek dve ravni i prvo ćemo nju odrediti. Odaberimo dve tačke koje pripadaju obema ravnima. Slobodno biramo $x = 0$ i $x = 1$ i dobijamo tačke $(0,-11,-6)$ i $(1,-18,-11)$. Prava p prolazi kroz ove tačke i njena jednačina je:
$$p : \frac{x}{1} = \frac{y+11}{-7} = \frac{z+6}{-5}.$$

Nadjemo i pravu q koja je paralelna sa p i sadrži tačku A, i ona je:

$$q: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z}{-5}.$$

Prava q pripada ravni α, što sa tačkom B daje jednačinu ravni $\alpha: x+3y-4z-5=0$.

16. (a) Ugao medju ravnima je ugao izmedju njihovih vektora normala, pa imamo:

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \cos\angle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta) = \frac{1\cdot 4+1\cdot 3+0\cdot(-5)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}} = \frac{7}{10};$$

(b) Ugao izmedju prave i ravni je komplementaran uglu izmedju vektora paralele prave i vektora normale ravni, pa je:

$$\sin\angle(\alpha,p) = \cos\angle(\vec{n}_\alpha,\vec{a}_p) = \frac{-3}{2\sqrt{21}};$$

(c) Prava je data kao presek dve ravni i ona je:

$$p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{3}.$$

Ravan je $\alpha: -2x+6y+z=0$, a ugao je:

$$\sin\angle(\alpha,p) = \cos\angle(\vec{n}_\alpha,\vec{a}_p) = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{41}};$$

(d) Ugao medju pravama je ugao koji grade njihovi vektori paralela, te imamo:

$$\cos(\angle p,q) = \cos(\angle\vec{a}_p,\vec{a}_q) = 0,$$

iz čega vidimo da su prave p i q normalne.

17. Tražena ravan je $\alpha: -8x+7y-5z+9=0$.

18. Prvo odredimo pravu $q: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{1}$, a zatim i pravu $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$.

19. (a) Odredimo prvo projekciju tačke A na ravan α i ona je $A_{proj} = (0,\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, a zatim rastojanje tačaka A i A_{proj}, koje je ujedno i rastojanje tačke A od ravni α. Dakle, rešenje je:

$$d = |AA_{proj}| = \sqrt{(0-1)^2+(\frac{5}{2}-3)^2+(\frac{3}{2}-0)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2};$$

(b) Projekcija tačke B na pravu p je $B_{proj} = (\frac{15}{29}, -\frac{21}{29}, \frac{88}{29})$, a traženo rastojanje je:

$$d = |BB_{proj}| = \frac{3\sqrt{30}}{\sqrt{29}};$$

(c) Date prave su paralelne i ne poklapaju se, pa ćemo odabrati jednu tačku prave p, neka je to $A(0,1,0)$, i projektovati je na pravu q. Dobijamo projekciju $A_{proj} = (\frac{15}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{27}{14})$, a rastojanje medju pravama je rastojanje medju tačkama A i A_{proj} i ono je $d = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$;

(d) Uzmemo tačku $(1,0,0)$ s prave p, tačku $(0,-1,5)$ s prave q, vektore paralela pravih p i q, te rastojanje dobijamo pomoću obrasca:

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^2}} \right| = \frac{57}{\sqrt{221}};$$

(e) Prave p i q se poklapaju i njihovo rastojanje je $d = 0$;

(f) Ravni α i β su paralelne i njihovo rastojanje odredjujemo tako što odredimo rastojanje proizvoljne tačke A sa ravni α i njene projekcije A_{proj} na ravan β. Tako imamo da je na primer $A(1,1,0)$ projekcija $A_{proj} = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ i rastojanje

$$d = |AA_proj| = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

(g) Prava p je paralelna ravni α. Uzmemo jednu tačku sa prave p, neka je to tačka $A(0,0,-2)$, i projektujemo je na ravan α, čime dobijamo projekciju $A_{proj} = (-1,-1,-1)$. Traženo rastojanje je

$$d = |AA_{proj}| = \sqrt{3}.$$

20. Tačka $(\frac{99}{7}, \frac{55}{7}, \frac{-10}{7})$.

21. *I način.* Nadjimo ravan β koja sadrži tačku A i paralelna je ravni α. Njena jednačina je

$$\beta : x - 3y + z + 2 = 0.$$

Prava p pripada ravni β. U preseku ravni β i prave q dobijamo tačku $B(\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, -\frac{15}{11})$. Tačka B je ujedno i presek prave p i q. Sada imamo A i B, dve tačke prave p, pa je konačno rešenje:

$$p : \frac{x-2}{\frac{-17}{11}} = \frac{y-2}{\frac{-18}{11}} = \frac{z-2}{\frac{-37}{11}}.$$

II način. Takodje, nadjemo ravan $\beta : x-3y+z+2=0$, a tražimo i ravan γ koja sadrži pravu q i tačku A. Njena jednačina je:

$$\gamma : -10x-7y+8z+18=0.$$

Prava p se nalazi u preseku ravni β i γ te dobijamo isto rešenje kao i na prvi način.

22. Prvo nadjemo ravan $\alpha : x+2y+2z-10=0$, a zatim, kao i u prethodnom zadatku, ravan $\beta : x+2y+2z-7=0$ (paralelna je ravni α i sadrži tačku A). U preseku ravni β i prave p je tačka $B(3,0,2)$ i ona nas zajedno sa tačkom A dovodi do prave q :
$$q : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{-1}.$$

23. Lako dolazimo do pravih:

$$p_{AB} : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{0} \text{ i } p_{CD} : \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-2}{-2}.$$

Prava p je normalna na prave p_{AB} i p_{CD}, pa iz definicije vektorskog proizvoda sledi da je vektor paralele prave p jednak vektorskom proizvodu vektora paralele pravih p_{AB} i p_{CD}. Dakle, imamo da je

$$\vec{a_p} = \vec{a_{p_{AB}}} \times \vec{a_{p_{CD}}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Znamo da prava p sadrži tačku $(0,0,0)$, a imamo i njen vektor paralele $\vec{a_p} = (2,4,-9)$ i lako dolazimo do rešenja:

$$p : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{-9}.$$

24. Brzo dolazimo do tačke $A(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{8}{3})$. Prava p pripada ravni α pa je normalna na vektor normale ravni α, a normalna je i na pravu q, iz čega, po prethodnom zadatku, sledi da je:

$$\vec{a}_p = \vec{n}_\alpha \times \vec{a}_q = -\vec{i} - 10\,\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Kad smo našli vektor paralele i tačku prave p, rutinski dolazimo do jednačine:

$$p : \frac{x+\frac{5}{3}}{-1} = \frac{y-\frac{1}{3}}{-10} = \frac{z+\frac{8}{3}}{-4}.$$

25. Vektor paralele prave p je vektorski proizvod vektora paralela pravih p i q, i on je $\vec{a}_n = (0,6,-3)$. Presek pravih p i q je tačka $(0,1,2)$ i jednačina prave n je:

$$n : \frac{x}{0} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-3}.$$

26. *I način.* Iskoristićemo obrazac za računanje rastojanja dve prave i staviti da je $d = 0$ (seku se). Imamo jednačinu:

$$\left| \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2}} \right| = 0,$$

iz koje nalazimo da je $a = -1$.

II način. Potražićemo presek prava p i q. Prve jednakosti iz jednačina datih prava daju nam da je $x = 2$ i $y = 2$, pa nas jednačina prave p dalje dovodi do $z = 2$. Da bi se prave p i q sekle tačka $(2,2,2)$ mora pripadati i pravi q, te dobijamo da je $a = -2$.

27. Ako su prave p i q normalne, tada su normalni i njihovi vektori paralele. Parametar m dobijamo iz jednakosti $a_p \cdot a_q = 0$ i on je $m = -3$. Ravan koja sadrži prave p i q je $\alpha : 4x + 17y - 5z - 55 = 0$, dok je njihov presek tačka $(3,4,5)$.

28. Ako se prave seku tada je njihovo rastojanje $d = 0$. Proverimo za koje je vrednosti parametra m brojilac u izrazu za rastojanje jednak nuli:

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 \\ m & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0.$$

To su vrednosti $m = 2$ i $m = -\frac{7}{4}$. Ubacimo li ove vrednosti u jednačine pravih p i q, dobijamo da se za $m = -\frac{7}{4}$ prave seku (u tački $(\frac{101}{15}, \frac{13}{15}, -\frac{49}{15})$), dok su za $m = 2$ prave p i q paralelne.

29. Tačke koje tražimo su na pravoj p pa su oblika $(t+2, 2t, 2t-1)$. Po formuli za rastojanje tačaka imamo da je:

$$\sqrt{(t+2-1)^2 + (2t)^2 + (2t-1-1)^2} = \sqrt{8},$$

odakle dobijamo dva rešenja: $t_1 = 1$ i $t_2 = -\frac{1}{3}$. Za t_1 tražena tačka je $(3, 2, 1)$, dok za t_2 rešenje je $(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$.

30. (a) Prvo ćemo naći trougla, odnosno presečne tačke datih prava. Presek prava p i q je teme $A(3, 2, 1)$, u preseku prava q i r dobijamo teme $B(4, 0, 0)$, dok u preseku prava p i r imamo teme $C(1, -1, 2)$. Težišne linije spajaju temena trougla sa sredinama naspramnih stranica, pa odredjujemo $A_1(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ sredinu stranice BC, zatim $B_1(2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ sredinu stranice AC i naposletku $C_1(\frac{7}{2}, 1, \frac{1}{2})$ sredinu stranice AB. Lako dobijamo jednačine prava koje sadrže težišne linije:

$$t_{AA_1} : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-1}{0}, \; t_{BB_1} : \frac{x-4}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3} \text{ i}$$

$$t_{CC_1} : \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-3};$$

(b) Težište se nalazi u zajedničkom preseku prava t_{AA_1}, t_{BB_1} i t_{CC_1}, i ono je $T = (\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, 1)$.

31. Primetimo prvo da su sve tačke prave p oblika $(1, y, 3)$, a na pravi q se nalaze tačke $(3, y, 3)$. Takodje, prave p i q su paralelne. Ove činjenice će nam veoma olakšati rad. Jedno teme dobijamo kao projekciju tačke E na pravu p i to je $A(1, -1, 3)$, a drugo kao projekciju tačke E na pravu q i ono je $B(3, -1, 3)$. Rastojanje izmedju tačaka A i B je 2 i to je dužina stranica kvadrata. Teme C dobijamo na pravi p, na rastojanju dužine 2 od tačke A i za njega imamo dve mogućnosti: $C_1(1, 1, 3)$ i $C_2(1, -3, 3)$. Teme D je na pravi q, na rastojanju dužine 2 od tačke B i to su tačke $D_1(3, 1, 3)$ i $(3, -3, 3)$. Time smo dobili dva kvadrata, ABC_1D_1 i ABC_2D_2.

32. Prave p i q su normalne, pa se teme C (naspram temena A) nalazi u preseku prava p i q, i ono je $C(1,-2,1)$. Druga dva temena su projekcije tačke A na prave p i q, i ona su $B(-1,-3,0)$ i $D(2,1,-4)$.

33. Temena su $A(0,-2,2), B(4,4,0)$ i $C(2,2,4)$.

    (a) Projekcija tačke B na pravu r je tačka $B_1(\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{13}{3})$. Tačke B i B_1 odredjuju pravu koja sadrži visinu iz temena B i ona je

    $$\frac{x-4}{-5}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z}{13}.$$

    Slično dolazimo do $C_1(2,1,1)$ projekcije tačke C na pravu p. Tačke C i C_1 odredjuju jednačinu prave koja sadrži visinu iz temena C :

    $$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3};$$

    (b) Koordinate ortocentra su $H(2,\frac{12}{5},\frac{26}{5})$;

    (c) Površinu dobijamo kao polovinu proizvoda dužine jedne stranice i dužine njoj odgovarajuće visine. Ona je

    $$P=\frac{|AB|\cdot|CC_1|}{2}=\frac{\sqrt{56}\cdot\sqrt{10}}{2}=2\sqrt{35}.$$

Glava 8

Granična vrednost

Granična vrednost niza

• **Niz** a je funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Domen ovog preslikavanja je skup prirodnih brojeva i on daje indeks (poziciju) u nizu, dok je kodomen skup realnih brojeva i on nam daje vrednost člana niza na datoj poziciji.
• Niz se označava i sa $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gde se broj a_n naziva **opšti član** niza.
• Realan broj L je **granična vrednost** (limes) niza sa opštim članom a_n, ako za svaku proizvoljno malu veličinu $\varepsilon > 0$ postoji indeks u nizu n_0, takav da za svaki indeks n veći od njega $(n > n_0)$ važi da su član a_n i L na rastojanju manjem od ε, tj. $|a_n - L| < \varepsilon$.
Datu definiciju možemo zapisati i na sledeći način:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

• Ako za niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ postoji granična vrednost L, tada niz **konvergira** i to označavamo sa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

U protivnom niz **divergira**.
• Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dva konvergentna niza, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Tada važi:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k = a^k,\ k \in \mathbb{N}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n},\ k \in \mathbb{N}$ (za k parno članovi niza moraju biti nenegativni).

• Važne granične vrednosti:

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha} = \infty,\ \alpha > 0;}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} = 0,\ \alpha > 0;}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} (1+\dfrac{1}{n})^n = e;}$

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & 0 < q < 1 \end{cases};}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;}$

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ a > 0;}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0\ a > 0.}$

Granična vrednost funkcije

• Neka je data funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ i tačka $x_0 \in \mathbb{R}$. Broj L je **granična vrednost funkcije** $f(x)$ **u tački** x_0, ako za svaki proizvoljno mali broj $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$, takav da za svaki broj x, koji je od x_0 udaljen za manje od δ, važi da je $f(x)$ na udaljenosti manjoj od ε od L. Definisanu graničnu vrednost označavamo sa:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L.}$$

Definiciju možemo zapisati i korišćenjem logičkih simbola na sledeći način:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

• Definišu se i slučajevi kada je $x_0 = \pm\infty$ ili $L = \pm\infty$ i tada dobijamo granične vrednosti

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L,\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

• Kako x može da se "približava" tački x_0 sa leve i sa desne strane, razlikujemo:

a) **levu graničnu vrednost**

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x),}$$

gde posmatramo samo one vrednosti x koje su manje od x_0 i

b) **desnu graničnu vrednost**

$$\boxed{\lim_{x\to {x_0}^+} f(x),}$$

gde posmatramo samo one vrednosti x koje su veće od x_0.

• Granična vrednost funkcije $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ postoji ako i samo ako postoje leva i desna granična vrednost koje su jednake, tj.

$$\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = L.$$

• Takodje, mogu se definisati i leva (desna) granična vrednost u tački x_0 u slučaju kada je $L = \pm\infty$, odnosno

$$\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = \pm\infty \text{ i } \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = \pm\infty.$$

• Ako je vrednost L kojoj teži funkcija $f(x)$, kada x teži prema x_0, baš jednaka vrednosti funkcije za $x = x_0$, tj. ako važi

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),}$$

tada je funkcija $f(x)$ **neprekidna u tački** $x = x_0$.

• Funkcija $y = \alpha(x)$ se naziva beskonačno mala kada $x \to x_0$, ako je

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.}$$

• Funkcija $y = \beta(x)$ se naziva beskonačno velika kada $x \to x_0$, ako je

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} |\beta(x)| = +\infty.}$$

• Ako su f i g beskonačno male funkcije kada $x \to x_0$ tada je količnik $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ neodredjen oblik "$\dfrac{0}{0}$" kada $x \to x_0$.

• Ako su f i g beskonačno velike funkcije kada $x \to x_0$ tada je količnik $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ neodredjen oblik "$\dfrac{\infty}{\infty}$" kada $x \to x_0$.

• Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ tada je $f(x)g(x)$ neodredjen izraz oblika "$0\cdot\infty$" kada $x \to x_0$.

• Na sličan način definišemo neodredjene oblike "0^0", "∞^0" i "1^∞".

• Važne granične vrednosti:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0;}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1;} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Primeri

1. Napisati nekoliko prvih članova nizova:

   (a) $a_n = \frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$; (b) $b_n = \frac{n-1}{n^2},\ n\in\mathbb{N}$.

   Rešenje:

   (a) Niz $a_n = \frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$ ima elemente:

   $$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ldots,a_{100} = \frac{1}{100},\ldots$$

   (b) Niz $b_n = \frac{n-1}{n^2},\ n\in\mathbb{N}$ ima elemente:

   $$b_1 = 0,\ b_2 = \frac{1}{4},\ b_3 = \frac{2}{9},\ldots,b_{100} = \frac{99}{10000},\ldots$$

2. Po definiciji pokazati da niz $a_n = \frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$ konvergira i da je granična vrednost $L = 0$.

   Rešenje:

   Uzmemo proizvoljno malo $\varepsilon > 0$ i biramo da je $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Sada za svako $n > n_0$ važi da je $a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon$, pa je

   $$|a_n - L| = |a_n - 0| < \varepsilon,$$

   što je i trebalo pokazati.

3. Odrediti sledeće granične vrednosti:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+3}{n^2+4n+5}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3+2n}{2n^2+6}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+5}{2n^4+n^3+15}$.

Rešenje:

Odredićemo granične vrednosti sledećih nizova tako što ćemo u brojiocu i imeniocu ispred zagrade izvući najveći stepen od n i iskoristiti neke od već navedenih graničnih vrednosti:

(a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+3}{n^2+4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^2(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2})}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{1}=2;$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3+2n}{2n^2+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(10+\frac{2}{n^2})}{n^2(2+\frac{6}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n}{2}=\infty;$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{2n^4+n^3+15}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(4+\frac{5}{n})}{n^4(2+\frac{1}{n}+\frac{15}{n^4})}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2n^3}=0.$$

U sve tri granične vrednosti u ovom primeru imali smo neodredjene izraze oblika ”$\frac{\infty}{\infty}$” kada $n\to\infty$.

4. Odrediti sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

Rešenje:

(a) Koristeći da je $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$, za $q>1$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$, pa je
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(1-\frac{1}{2^n})}{2^n(1+\frac{1}{2^n})}=1;$$

(b) Sada ćemo iskoristiti da je $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2}{3})^n=0$, pa imamo
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}((\frac{2}{3})^{n+1}+1)}{3^n((\frac{2}{3})^n+1)}=3.$$

5. Odrediti sledeću graničnu vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-3n-4})$.

Rešenje:

Sledeća granična vrednost je neodredjen izraz oblika ”$\infty-\infty$” i rešićemo je tako što ćemo racionalisati dati izraz:

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-3n-4}) = \lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-3n-4})\cdot\frac{n+\sqrt{n^2-3n-4}}{n+\sqrt{n^2-3n-4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2-3n-4)}{n+\sqrt{n^2-3n-4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(3+\frac{4}{n})}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}\right)} = 3.$$

6. Odrediti:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+2}$.

   Rešenje:

   Naredne granične vrednosti su neodredjeni izrazi oblika ”1^∞” i rešavamo ih svodeći ih na poznate granične vrednosti:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1+2}{n+1}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{n+2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{(n+2)\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n+4}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n+1}} = e^2.$$

7. Koristeći granične vrednosti sledećih funkcija:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha} = 0,\ \alpha>0,} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,}$$

   rešiti primere:

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x+5}{2x^3+x^2+3}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x^2+3}}{3x+\sqrt[4]{x^4+x^2}}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right)^{5x-1}$; (d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-5x})$.

   Rešenje:

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x+5}{2x^3+x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3(1+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3})}{x^3(2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3})} = \dfrac{1}{2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x^2+3}}{3x+\sqrt[4]{x^4+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(2+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}})}{x(3+\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}})}=\dfrac{3}{4}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right)^{5x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{x+2}{x^2+x+1}\right)^{5x-1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x^2+x+1}{x+2}}\right)^{(5x-1)\cdot\frac{x^2+x+1}{x+2}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{5x^2+9x-2}{x^2+x+1}}=e^5$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-5x})=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-5x})\,\dfrac{x+\sqrt{x^2-5x}}{x+\sqrt{x^2-5x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-(x^2-5x)}{x+\sqrt{x^2-5x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x}{x(1+\sqrt{1-\frac{5}{x}})}=5.$

8. Odrediti sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4}$; (b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-5x^2+7x-2}$;

(c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+7x^2+11x+5}$.

Rešenje:

U narednim graničnim vrednostima imamo neodredjene izraze oblika ”$\dfrac{0}{0}$”, koje rešavamo faktorizacijom polinoma u brojiocu i imeniocu:

(a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+1)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{3}{5}$;

(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-5x^2+7x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)(x^2-3x+1)}=\dfrac{0}{-1}=0$;

(c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+7x^2+11x+5}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{(x+1)^2(x+5)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2}{4(x+1)}=\infty$.

9. Rešiti sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; (b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$; (d) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{2x}-\sqrt{10}}$.

Rešenje:

Granične vrednosti u kojima se pojavljuju koreni rešavamo tako što racionališemo date izraze:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{3}};$

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-1}}$
$\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(x-2)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x-1})}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}};$

(c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$
$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2})}=\dfrac{2\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{2}{3\sqrt[6]{a}};$

(d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{2x}-\sqrt{10}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{\sqrt{2x}-\sqrt{10}}\cdot\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{10}}{\sqrt{2x}+\sqrt{10}}$
$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x+2)(\sqrt{2x}+\sqrt{10})}{2(x-5)}=7\sqrt{10}.$

U primeru pod (c) koristili smo formulu za razliku kubova $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, odnosno

$$x-y=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}).$$

10. Odrediti sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(7x)}{x};$ (b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{\sin(x-3)};$ (c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\operatorname{tg}(x-4)}{2-\sqrt{x}};$

(d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}-2)};$ (e) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}.$

Rešenje:

U narednim zadacima koristićemo poznatu graničnu vrednost

$$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(7x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(7x)}{x}\cdot\dfrac{7}{7}=7\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(7x)}{7x}=7;$

(b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{\sin(x-3)}=$
$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{\sin(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{1}=-1;$

(c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\mathrm{tg}\,(x-4)}{2-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\frac{\sin(x-4)}{\cos(x-4)}}{2-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)(2+\sqrt{x})}{\cos(x-4)\cdot(4-x)}$
$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sin(x-4)(2+\sqrt{x})}{-(x-4)\cos(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2+\sqrt{x}}{-\cos(x-4)}=\dfrac{4}{-1}=-4;$

(d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{2x}-2)}\cdot\dfrac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}$
$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)\sin(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{-2(x-2)(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}+2}{-2(x-1)}=-2;$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=[t=\dfrac{1}{x}]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1.$

U zadatku pod (e) imali smo neodredjen izraz oblika "$\infty\cdot 0$", koji smo, koristeći dvojni razlomak, sveli na oblik "$\dfrac{0}{0}$", a zatim smo smenom $t=\dfrac{1}{x}$ došli do poznate granične vrednosti.

11. Koristeći poznate granične vrednosti odrediti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\ln(x+5)}{x^2+7x+12}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln x-\ln 3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{\ln(1+x)}$.

Rešenje:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{x}\cdot\dfrac{2}{2}=\lim\limits_{x\to 0}2e^{-x}\cdot\dfrac{(e^{2x}-1)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}2e^{-x}$
$=2;$

(b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\ln(x+5)}{x^2+7x+12}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\ln(1+(x+4))}{(x+4)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{1}{x+3}=-1;$

(c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln x-\ln 3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\frac{x}{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(1+\frac{x-3}{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}$
$\cdot\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})\cdot\dfrac{\ln(1+\frac{x-3}{3})}{\frac{x-3}{3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{3}(\sqrt{x}+\sqrt{3})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3};$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x(2^x-1)}{\ln(1+x)}\cdot\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^x\cdot\dfrac{2^x-1}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}=\ln 2.$

Koristićemo sledeće leve (desne) granične vrednosti:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty,}\ \boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty,}\ \boxed{\lim_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x}=0,}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0,}\ \boxed{\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty,}\ \boxed{\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty,}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty,}\ \boxed{\lim_{x\to +\infty}e^x=+\infty,}\ \boxed{\lim_{x\to -\infty}e^x=0.}$$

12. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}$; (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(x+\sqrt{x-1})$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(x+\sqrt{1-x})$; (e) $\displaystyle\lim_{x\to -5^-}\ln\frac{5+x}{x-4}$;

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -9^+}\ln\sqrt{\frac{1}{x+9}}$; (g) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}e^{-\frac{1}{x-3}}$; (h) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}e^{-\frac{1}{x-3}}$.

Rešenje:

Iskoristićemo date granične vrednosti uz napomenu da posebno moramo da pazimo na znakove izraza u sledećim primerima:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=-\infty$ (brojilac je negativan, imenilac je pozitivan);

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=+\infty$ (brojilac i imenilac su negativni);

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(x+\sqrt{x-1})=1$ (pod korenom imamo "pozitivnu"nulu);

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}(x+\sqrt{1-x})=1$ (pod korenom imamo "pozitivnu"nulu);

(e) $\displaystyle\lim_{x\to -5^-}\ln\frac{5+x}{x-4}=-\infty$ (razlomak teži ka "pozitivnoj"nuli);

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -9^+}\ln\sqrt{\frac{1}{x+9}}=+\infty$ (razlomak teži ka plus beskonačno);

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}e^{-\frac{1}{x-3}}=0$ (stepen teži ka minus beskonačno);

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-}e^{-\frac{1}{x-3}}=+\infty$ (stepen teži ka plus beskonačno).

Zadaci

1. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{6n+7}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3+2n+1}{n+5}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n+n^2}{n^3+6}$.

2. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2}{2n+1}+\dfrac{1-6n^3}{1+4n^2}\right)$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{2n+3}+\dfrac{1-3n^3}{3n^2+1}\right)$.

3. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8\sqrt{n}+n^2}{2n^2+3}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sqrt{n^4+5n^3+2}}{n+1}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+6}{n^2+3}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{n^2+1}$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

4. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$.

5. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{4}+3n}{\sqrt[n]{n}+6n}$.

6. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n!}{n^3+(n+1)!}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}+(n+2)!}{n^7+(n+2)!}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}+(n+3)!}{n^6}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{\frac{1}{n}}+(n+3)!}{(n+3)!}$.

7. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5}-n)$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n+3}-n)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3-1})$.

8. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n+1}}+3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+2}+7^{n+2}}{4^{n+1}-7^{n+1}}$.

9. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^2+1})^{3n^2}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2n^2+3}{2n^2})^{n^2}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{2}{n})^n$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+5}{n})^n$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^3})^{n^2+1}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+5}{n^2+3})^{n^2+4}$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n+1}{n-1})^n$.

10. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{3-x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(2+\sqrt{x})$; (f) $\lim\limits_{x\to 0^-}(2+\sqrt{-x})$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x^3}-\ln x)$; (h) $\lim\limits_{x\to 0^-}(\sqrt{(-x)^5}+\ln(1+x))$;

(i) $\lim\limits_{x\to -5^+}(\sqrt{x+5}+x)$; (j) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}$; (m) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; (n) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

11. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+3}$; (b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+1}{x-2}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+7}{3x}$; (d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$.

12. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{4x}$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^3+5}$; (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+7}{x^3+2x+1}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{x-4}$; (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x^2-5)^2(2x-7)^5}{8x^9-3}$; (f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+4x}}$.

13. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-8x+7}$;

(c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$; (d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$.

14. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{18x^4-12x^3+11x^2-6x+1}{27x^4-18x^3+12x^2-6x+1}$;

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{18x^4-12x^3+11x^2-6x+1}{27x^4-18x^3+12x^2-6x+1}$.

15. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+12}-3}$; (c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; (g) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{x-4}$.

16. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-10x})$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$.

17. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-tg^2x)$; (h) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$;

(i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)tgx$; (j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tgx}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^3}$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$; (m) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; (n) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx})$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot ctg(2x)$; (p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\cdot\cos^2 x$.

18. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsinx}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\arcsin(x+5)}{x^2+4x-5}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log(x+8)-1}{\arcsin(x-2)}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}$.

19. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to m\infty}\dfrac{e^{-2x}-1}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\cdot\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

20. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; (b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\log_5 x-1}{x-5}$.

21. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4^{x+2}-4}{x^2-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10\cdot 4^{x-1}-40}{x^3-2x-4}$.

22. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-9)(3^{x-5}-1)}{2\ \mathrm{arctg}(5-x)}$.

23. Odrediti granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2-3}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+4x+4})^{x}$; (d) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{4x})^{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-1}{x+1})^{x+2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 5}(x-4)^{\frac{1}{x-5}}$; (g) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-5x}$; (h) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1})^{x}$.

Rešenja

1.

(a) $\dfrac{1}{3}$; (b) $+\infty$; (c) 0.

2.

(a) $-\dfrac{3}{4}$; (b) $-\dfrac{3}{2}$.

3.

(a) $\dfrac{1}{2}$; (b) 3;

(c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+6}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{\frac{1}{2}}+6}{n^2}}{\frac{n^2+3}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{6}{n^2})}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n^2})}=\frac{0}{1}=0;$$

(d) 0; (e) 4.

4.

(a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{2n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2+1}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=3;$$

(b) $\frac{15}{17}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{4}+3n}{\sqrt[n]{n}+6n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3n}{1+6n} = \frac{1}{2}$.

6.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)!-(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+3)(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+6} = 0$;

(b) 0;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n!}{n^3+(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{(n+1)!}+\frac{n!}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{(n+1)!}+\frac{(n+1)!}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{(n+1)!}+\frac{1}{n+1}}{\frac{n^3}{(n+1)!}+1} = \frac{0}{1} = 0$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}+(n+2)!}{n^7+(n+2)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[n]{2}}{(n+2)!}+1}{\frac{n^7}{(n+2)!}+1} = 1$;

(e) ∞; (f) 1.

7.

(a) $\frac{1}{2}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n+3}-n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^3+n+3}-n)\frac{\sqrt{n^3+n+3}+n}{\sqrt{n^3+n+3}+n}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3-n^2}{\sqrt{n^3+n+3}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^3+n+3}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+3}{n}}{\frac{\sqrt{n^3+n+3}+n}{n}}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$;

(c) Ako dati izraz pomnožimo i podelimo sa
$(\sqrt[3]{n^3+n})^2+\sqrt[3]{n^3+n}\sqrt[3]{n^3-1}+(\sqrt[3]{n^3-1})^2$
dobijamo da je:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n-(n^3-1)}{(\sqrt[3]{n^3+n})^2+\sqrt[3]{n^3+n}\sqrt[3]{n^3-1}+(\sqrt[3]{n^3-1})^2}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{n^6+2n^4+n^2}+\sqrt[3]{n^6+n^4-n^3-n}+\sqrt[3]{n^6-2n^3+1}}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{\sqrt[3]{n^6+2n^4+n^2}+\sqrt[3]{n^6+n^4-n^3-n}+\sqrt[3]{n^6-2n^3+1}}{n^2}} = \frac{0}{3} = 0.$

8.

(a) 1; (b) -7.

9.

(a) $\frac{1}{e}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2+1})^{3n^2} = (\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2+1})^{(n^2+1)})^{\frac{3n^2}{n^2+1}} = e^{\frac{3n^2}{n^2+1}} = e^3$;

(c) $e^{\frac{3}{2}}$; (d) e^2; (e) e^5; (f) 1; (g) e^2; (h) e^2.

10.

(a) $+\infty$; (b) $-\infty$; (c) $+\infty$; (d) $+\infty$; (e) 2; (f) 2; (g) $+\infty$;
(h) 0; (i) -5; (j) 0; (k) 0; (l) 0; (m) 0; (n) 1.

11.

(a) 0; (b) 10; (c) $+\infty$; (d) 1.

12.

(a) $\frac{3}{4}$; (b) 0; (c) ∞; (d) 0; (e) 64; (f) $\frac{1}{2}$.

13.

(a) 4; (b) 0; (c) $\frac{1}{2}$; (d) 0.

14.

(a) $\frac{2}{3}$; (b) $\frac{11}{12}$.

15.

(a) $\frac{2}{3}$; (b) -36; (c) $+\infty$; (d) $\frac{2}{3}$; (e) 1; (f) $\frac{4}{3}$; (g) $\frac{1}{3\sqrt[3]{16}}$.

16.

(a) 5; (b) $+\infty$; (c) $-\frac{5}{2}$.

17.

(a) $\frac{5}{2}$; (b) 5; (c) $\sin 1$; (d) 1; (e) $\frac{3}{2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{4\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}$;

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - tg^2 x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1-\sin x)(1-\sin x)}$
$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{1}{2};$

(h) $-\frac{1}{2};$ (i) 1; (j) 3; (k) $+\infty$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{x}{2}$
$= 1\cdot 0 = 0;$

(m) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} \cdot \lim\limits_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$
$= \cos a;$

(n) 0; (o) $\frac{1}{2};$

(p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\cdot\cos^2 x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\frac{\pi}{2}-x}$
$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cdot \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = 2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = [\frac{\pi}{2}-x = u,$
$u\to 0] = 2\lim\limits_{u\to 0} \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-u)}{u} = 2\lim\limits_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u} = 2\lim\limits_{u\to 0} \frac{2\sin^2\frac{u}{2}}{u}$
$= 2\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}} \cdot \lim\limits_{u\to 0} \sin\frac{u}{2} = 0.$

18.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arcsinx}{x} = [x = \sin t,\ t\to 0] = \lim\limits_{t\to 0} \frac{arcsin(\sin t)}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1;$

(b) $-\frac{1}{6};$ (c) $\frac{1}{10}\log e;$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = [x = tgt,\ t\to 0] = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{tgt} = \lim\limits_{t\to 0} \cos t\cdot\frac{t}{\sin t}$
$= \lim\limits_{t\to 0} \cos t \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$

19.

(a) -2; (b) 0; (c) 2; (d) 2; (e) 3.

20.

(a) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x-e} = \lim\limits_{x\to e} v\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e} = \lim\limits_{x\to e} \frac{\ln(\frac{e+x-e}{e})}{x-e}$

$$= \lim_{x\to e} \frac{e\cdot\ln(1+\frac{x-e}{e})}{\frac{x-e}{e}} = [\frac{x-e}{e} = u,\ u \to 0] = e\lim_{u\to e}\frac{\ln(1+u)}{u} = e;$$

(b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\log_5 x - 1}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{\log_5 x - \log_5 5}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\dfrac{\log_5\frac{x}{5}}{x-5} = \lim\limits_{x\to5}\log_5\left(\dfrac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x-5}}$
$= \log_5(\lim\limits_{x\to5}(\dfrac{x}{5})^{\frac{1}{x-5}}) = \log_5(\lim\limits_{x\to5}(\dfrac{5+x-5}{5})^{\frac{1}{x-5}})$
$= \log_5(\lim\limits_{x\to5}(\dfrac{5+x-5}{5})^{\frac{\frac{1}{x-5}}{5}})^5 = \log_5 e^5 = 5\log_5 e.$

21.

(a) $-2\ln4;$

(b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{10\cdot4^{x-1}-40}{x^3-2x-4} = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{40(4^{x-2}-1)}{(x-2)(x^2+2x+2)} = 40\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x^2+2x+2}\cdot$
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4^{x-2}-1}{x-2} = 40\dfrac{1}{10}\ln4 = 4\ln4.$

22. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-9)(3^{x-5}-1)}{2arctg(5-x)} = -\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-9}{2}\cdot\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\frac{3^{x-5}-1}{x-5}}{\frac{arctg(5-x)}{5-x}} = -2\ln3.$

23.

(a) $e^2;$ (b) $1;$ (c) $e^2;$ (d) $e^{\frac{1}{4}};$ (e) $e^{-2};$

(f) $\lim\limits_{x\to5}(x-4)^{\frac{1}{x-5}} = \lim\limits_{x\to5}(1+(x-5))^{\frac{1}{x-5}} = [x-5=u,\ u\to0]$
$= \lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e;$

(g) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-5x} = \lim\limits_{x\to0}(1-5x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}(1+(-5x))^{\frac{1}{-5x}\cdot(-5)} = e^{-5};$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2-x-1+2x+2}{x^2-x-1})^x$
$= \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{\frac{x^2-x-1}{2x+2}})^{\frac{x^2-x-1}{2x+2}\cdot\frac{(2x+2)x}{x^2-x-1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x}{x^2-x-1}} = e^2.$

Glava 9

Funkcije jedne realne promenljive

• Neka su A i B neprazni skupovi (čiji elementi mogu biti razni objekti) i neka je svakom $x \in A$ dodeljen po izvesnom zakonu f tačno jedan element $y \in B$. Tada kažemo da je na skupu A zadata (ili definisana) **funkcija** (ili **preslikavanje**) f sa vrednostima u skupu B.
• Funkciju f skupa A u skup B označavamo sa

$$\boxed{f : A \to B.}$$

Ako funkcija f elementu $x \in A$ pridružuje element $y \in B$ (tj. ako f preslikava x u y), tada pišemo $y = f(x)$.
• Skup A je **oblast definisanosti (domen) funkcije** f i označava se sa $D(f)$. Skup B je **skup vrednosti funkcije (kodomen)** f i označava se sa $C_D(f)$.
• Ako su skupovi A i B podskupovi skupa realnih brojeva tada kažemo da imamo **realnu funkciju realne promenljive**.
• Neka su x i y koordinate tačke P u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu. Skup

$$\{P(x, f(x)) : x \in D(f)\} \subset \mathbb{R}^2$$

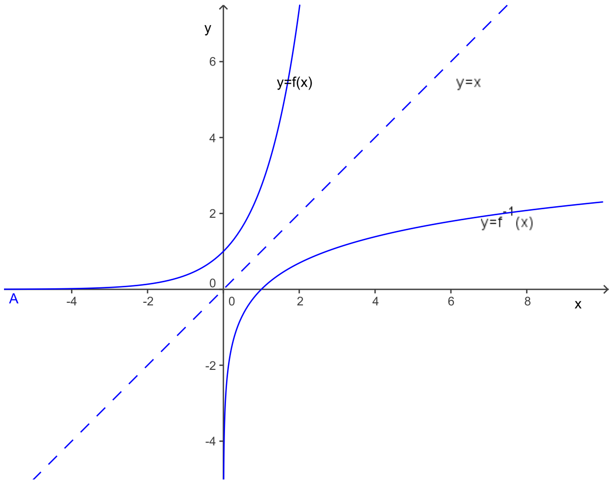
naziva se **grafik funkcije** f. Koordinata x se naziva **apscisa**, koordinata y **ordinata**, a jednačina $y = f(x)$ **funkcionalna zavisnost**. Grafik funkcije f se naziva i **kriva** zadata funkcijom f.
• Ako je ispunjen uslov $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, za svaka dva elementa $x_1, x_2 \in A$, tada preslikavanje f nazivamo **jedan na jedan** (**"1-1"**).
• Sa $f(A)$ označavamo skup elemenata $y \in B$ koji su slike jednog ili više elemenata iz A. Ako je $f(A) = B$ tada se f zove preslikavanje skupa A **na** skup B.

• Preslikavanje (funkcija) $f : A \longrightarrow B$, koje je "1-1"i "na", naziva se **bijektivnim**, **obostrano-jednoznačnim** ili **bijekcija**.

• Neka je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija i $g : B \longrightarrow A$ takva da je

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x.$$

Tada se g naziva inverzna funkcija funkcije f i obeležava f^{-1} (videti *sliku 9.1*).



Slika 9.1. Funkcija $f(x)$ i njena inverzna funkcija $f^{(-1)}(x)$

Diferencijalni račun

• Neka je $f : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a,b)$. Granična vrednost

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},}$$

ako postoji, naziva se **prvi izvod funkcije f u tački** x_0.

• Funkcija je **diferencijabilna** na intervalu D ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala.

$(c)' = 0$	c je konstanta, $(c \in \mathbb{R})$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x > 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$(tg x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$(ctg x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$a > 0,\ x \in \mathbb{R}$
$(e^x)' = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$x > 0$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$(arctg x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Tabela 9.1. Izvodi elementarnih funkcija

• **Osnovna pravila za prvi izvod funkcija**
Ako su funkcije f i g definisane na intervalu (a,b) i imaju prve izvode u tački $x \in (a,b)$, tada važi:

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
3. $(Af(x))' = Af'(x), A = const$,
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, za $g(x) \neq 0$.

• Prava

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),}$$

gde je $y_0 = f(x_0)$, je **tangenta** na grafik funkcije f u tački $P(x_0, f(x_0))$.
• Ako je $f'(x_0) \neq 0$ tada je prava

$$\boxed{y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

normala na grafik funkcije f u tački $P(x_0, f(x_0))$.
• Neka su prave p_1 i p_2 date jednačinama $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$. **Ugao** φ **izmedju pravih** p_1 i p_2 odredjen je sa:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.}$$

Ako je $1 + k_1k_2 = 0$, prave p_1 i p_2 su normalne, te je $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.
• **Izvod složene funkcije**. Neka funkcija $g : (a,b) \to (c,d)$ ima izvod u tački $x_0 \in (a,b)$ i neka funkcija $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ ima izvod u tački $g(x_0) \in (c,d)$. Tada složena funkcija $h(x) = f(g(x))$, $x \in (a,b)$ ima izvod u tački x_0 i važi:

$$\boxed{h'(x_0) = f_g'(g(x_0))g_x'(x_0).}$$

• **Izvod implicitne funkcije**. Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata implicitno jednačinom

$$\boxed{F(x,y) = 0.}$$

Tada se pri odredjivanju $y'(x)$ prvo diferencira funkcija F po x, koristeći da je y funkcija od x. Tako dobijamo jednačinu u kojoj se pojavljuju x,y,y'. Rešavanjem te jednačine po y' dobija se izvod funkcije y date u implicitnom obliku.
• **Izvod inverzne funkcije**. Neka je funkcija f diferencijabilna i strogo monotona na (a,b). Neka je u tački $x_0 \in (a,b)$ izvod $f'(x_0) \neq 0$. Tada je inverzna funkcija $f^{-1}(y)$ diferencijabilna u tački $y_0 = f(x_0)$ i važi pravilo za izvod inverzne funkcije:

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.}$$

• **Izvod funkcije date u parametarskom obliku**. Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata u parametarskom obliku

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1,t_2]$$

i neka je $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. Ako su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ diferencijabilne na intervalu (t_1,t_2), onda je i funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna na intervalu (a,b) i važi:

$$\boxed{y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.}$$

• **Lopitalovo pravilo.** Neka su funkcije f i g diferencijabilne u svakoj tački intervala (a,b), sem možda u tački $c \in (a,b)$. Neka su još ispunjena sledeća tri uslova:

1. $g'(x) \neq 0$, za $x \neq c$;

2. obe funkcije f i g teže nuli (respektivno teže ka beskonačnosti) kada $x \to c$;

3. postoji $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada, takodje, postoji granična vrednost $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i važi:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

• Sve neodredjene izraze možemo svrstati u četiri tipa:

1. Neodredjeni izrazi oblika ”$\dfrac{0}{0}$” i ”$\dfrac{\infty}{\infty}$”

   Ako je $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ ”$\dfrac{0}{0}$” ili ”$\dfrac{\infty}{\infty}$”, tada je

   $$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

   Dati postupak ponavljamo sve dok se kao granična vrednost ne dobije konačna ili beskonačna vrednost. Isto važi i u slučaju kada $x \to \pm\infty$.

2. Neodredjeni izrazi oblika ”$0 \cdot \infty$”

   Ovaj neodredjeni oblik dobijamo kada pomnožimo jednu beskonačno malu i jednu beskonačno veliku funkciju. Datu funkciju treba da prikažemo u obliku razlomka i da je svedemo na jedan od sledeća dva oblika: ”$\dfrac{0}{0}$” ili ”$\dfrac{\infty}{\infty}$”. Znači, ako je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ tada se neodredjeni oblik ”$0 \cdot \infty$”, sledećim transformacijama, prevodi u oblik ”$\dfrac{0}{0}$” ili ”$\dfrac{\infty}{\infty}$” :

   $$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} \quad \text{ili} \quad \boxed{\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.}$$

   Isto važi i u slučaju da $x \to \pm\infty$.

3. Neodredjeni izrazi oblika ”$\infty - \infty$”

   Datu funkciju koja je prikazana kao razlika dve beskonačno velike veličine treba napisati u obliku razlomka i svesti ga na 1. tip, tj. na jedan od oblika ”$\dfrac{0}{0}$” ili ”$\dfrac{\infty}{\infty}$”.

4. Neodredjeni izrazi oblika ”1^∞”, ”0^0” i ”∞^0”

   To su funkcije oblika $f(x)^{g(x)}$, a njih možemo prikazati u obliku:

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.}$$

   Tražimo sada $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ (isto važi i kada $x \to \pm\infty$), a taj limes je 2. tipa, tj. oblika ”$0\cdot\infty$”.

• **Izvodi višeg reda**. Neka funkcija f ima prvi izvod f' na intervalu (a,b) i neka $x_0 \in (a,b)$. **Drugi izvod** funkcije f u tački x_0 je izvod funkcije f' u tački x_0 (ako postoji) i obeležava se sa $f''(x_0)$. Analogno se definiše **treći** $(f'''(x_0))$, **četvrti** $(f^{(4)}(x_0)),\dots$ **n-ti** $(f^{(n)}(x_0))$ **izvod funkcije** f **u tački** x_0.

• **Tejlorova teorema**. Ako je funkcija f neprekidna i ima neprekidne sve izvode do $n-$ tog na intervalu $[a,b]$ i ima izvod $f^{(n+1)}$ na intervalu (a,b), tada za $x \in [a,b]$ važi Tejlorova formula:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

gde je $\xi = a+\theta(x-a)$, $0<\theta=\theta(x)<1$ i $R_n = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))$.

• **Maklorenova teorema**. Za $a=0$ Tejlorova formula postaje Maklorenova formula:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

gde je $R_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$, $0 \le \theta \le 1$. Polinom

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

naziva se **Tejlorov polinom** stepena n za funkciju f u tački a. Ovaj polinom možemo napisati u skraćenom obliku:

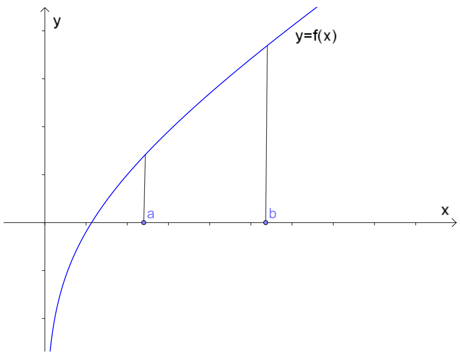
$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0).}$$

Ispitivanje funkcije

Da bismo ispitali funkciju, a zatim nacrtali njen grafik neophodno je ispitati:

1. domen;
2. nule;
3. parnost, neparnost, periodičnost;
4. znak;
5. intervale monotonosti i ekstreme;
6. intervale konveksnosti - konkavnost i prevojne tačke;
7. asimptote date funkcije.

• **Domen funkcije** je skup svih vrednosti promenljive x za koje je funkcija definisana, tj. može joj se odrediti vrednost.
• Broj $x_0 \in D(f)$ je **nula funkcije** ako i samo ako $f(x_0) = 0$. Tačka $(x_0, f(x_0))$ je tačka preseka funkcije f i $x-$ ose.



Slika 9.2. Rastuća funkcija $y = f(x)$

• Funkcija f je **parna** ako važi:

$$\boxed{f(x) = f(-x),\ x \in D(f).}$$

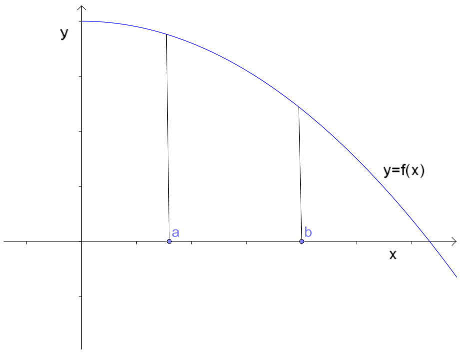
Grafik parne funkcije je osno simetričan u odnosu na $y-$ osu.
• Funkcija f je **neparna** ako važi:

$$\boxed{f(x) = -f(-x),\ x \in D(f).}$$

Grafik neparne funkcije je centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.
• Funkcija $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je **periodična** sa periodom $\omega \neq 0$ ako je

$$\boxed{f(x+\omega) = f(x),\ x \in D(f).}$$

Najmanje pozitivno ω koje zadovoljava dati uslov naziva se **osnovni period**.
• Ako je $f'(x) > 0$, za svako $x \in (a,b)$, tada kažemo da je funkcija f **rastuća** na intervalu (a,b) (videti *sliku 9.2*).
• Ako je $f'(x) < 0$, za svako $x \in (a,b)$, tada kažemo da je funkcija f **opadajuća** na intervalu (a,b) (videti *sliku 9.3*).



Slika 9.3. Opadajuća funkcija $y = f(x)$

• Neka je funkcija f definisana u tački x_0. Tačka u kojoj funkcija f ili nema izvod ili je $f'(x_0) = 0$ se naziva i **kritična ili stacionarna** tačka. Kritična tačka je mogući ekstrem funkcije.

1. Neka je funkcija f diferencijabilna, za svako $x \in (a,b)$ i neka je definisana u tački $c \in (a,b)$. Ako je

   $$f'(x) > 0,\ \text{za } x \in (a,c) \ \text{ i } \ f'(x) < 0,\ \text{za } x \in (c,b),$$

   tada je tačka $A(c, f(c))$ maksimum funkcije f.

   Ako je
   $$f'(x) < 0,\ \text{za } x \in (a,c) \text{ i } f'(x) > 0,\ \text{za } x \in (c,b),$$

   tada je tačka $B(c, f(c))$ minimum funkcije f.

2. Neka je f dvaput neprekidno diferencijabilna na (a,b) i neka je $c \in (a,b)$ stacionarna tačka funkcije f. Tada, ako je:

   (a) $f''(c) > 0$, funkcija f u tački $x = c$ ima lokalni minimum,

(b) $f''(c) < 0$, funkcija f u tački $x = c$ ima lokalni maksimum.

• Minimum i maksimum funkcije se nazivaju **ekstremne vrednosti** funkcije.
• Dvaput diferencijabilna funkcija f je konveksna (konkavna) na (a,b) tada i samo tada kada je $f''(x) > 0\,(f''(x) < 0)$, za $x \in (a,b)$.
• Neka je f dvaput neprekidno diferencijabilna na (a,b). Tačka $c \in (a,b)$ se naziva **prevojna tačka** funkcije f, ako je $f''(c) = 0$ ili $f''(c)$ ne postoji.
• Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na (a,b). Ako je:

1. $f''(x) < 0$, za $x \in (a,c)$ i $f''(x) > 0$, za $x \in (c,b)$ ili
2. $f''(x) > 0$, za $x \in (a,c)$ i $f''(x) < 0$, za $x \in (c,b)$,

tada je $x = c$ tačka prevoja funkcije f.
• Prava $x = a$ je **vertikalna asimptota** funkcije f ako i samo ako je

$$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty} \quad \text{ili} \quad \boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Postojanje vertikalne asimptote se ispituje u onim tačkama u kojima funkcija nije definisana ili na rubovima domena ako je domen ograničen.
• Prava $y = kx + n$ je **kosa asimptota** funkcije f, gde je

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k} \quad \text{i} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = n} \quad \text{ili}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = k} \quad \text{i} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = n.}$$

• Prava $y = b$ je **horizontalna asimptota** funkcije f ako i samo ako je

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = b} \quad \text{ili} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.}$$

Primeri

1. Odrediti inverznu funkciju funkcije $y = 3x - 1$.

   Rešenje:

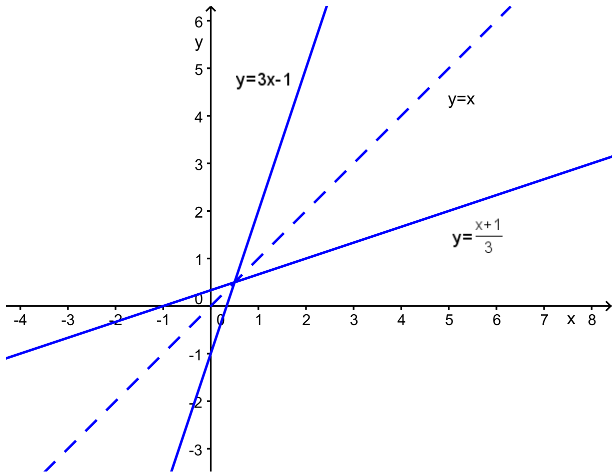
   Ova funkcija je bijekcija, te stoga možemo naći njenu inverznu funkciju. Izrazimo x, tj.

$$x = \frac{y+1}{3},$$

a zatim izvršimo zamenu promenljivih

$$y^{-1} = \frac{x+1}{3}.$$

Grafički prikaz je dat na *slici 9.4.*



Slika 9.4. Inverzne funkcije $y = 3x - 1$ i $y^{-1} = \frac{x+1}{3}$

2. Odrediti izvode datih funkcija:

   (a) $y = 2x^2 + 3\ln x$; (b) $y = e^x \operatorname{tg} x$; (c) $y = \dfrac{\sin x}{x^3}$.

   Rešenje:

   Korišćenjem osnovnih pravila za izvode i *tabele 9.1*, lako nalazimo izvode datih funkcija:

   (a) $y' = (2x^2)' + (3\ln x)' = (2)'x^2 + 2(x^2)' + (3)'\ln x + 3(\ln x)' = 0 \cdot x^2$
   $+2 \cdot 2x + 0 \cdot \ln x + 3\dfrac{1}{x} = 4x + \dfrac{3}{x}$;

   (b) $y' = (e^x)' \operatorname{tg} x + e^x (\operatorname{tg} x)' = e^x \operatorname{tg} x + e^x \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

   (c) $y' = \dfrac{(\sin x)' x^3 - \sin x (x^3)'}{(x^3)^2} = \dfrac{x^3 \cos x - 3x^2 \sin x}{x^6}$.

3. Odrediti izvode složenih funkcija:

   (a) $y = (x+2)^3$; (b) $y = \sin^2 x$; (c) $y = e^{\operatorname{tg}^2 (x^2+3)}$; (d) $y = x^x$.

   Rešenje:

(a) Funkcija $y = (x+2)^3$ je kompozicija dve funkcije, tj. $y = p(r(x))$, gde je $p(x) = x^3$ i $r(x) = x+2$. Da bismo našli izvod ove funkcije potrebno je da nadjemo $p'(r(x))$ i $r'(x)$. Kako je $p'(x) = 3x^2$, to je $p'(r(x)) = 3(x+2)^2$, a $r'(x) = 1$. Stoga je

$$y' = 3(x+2)^2 \cdot 1 = 3(x+2)^2;$$

(b) Funkcija $y = f(x) = \sin^2 x$ je kompozicija dve funkcije, tj. $f(x) = k(g(x))$, gde je $k(x) = x^2$ i $g(x) = \sin x$. Na osnovu formule za izračunavanje izvoda složene funkcije, potrebno je naći $k'(g(x))$ i $g'(x)$. Kako je $k'(x) = 2x$, to je $k'(g(x)) = 2g(x) = 2\sin x$, a $g'(x) = \cos x$, odnosno

$$y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x;$$

(c) Funkcija $y = e^{\mathrm{tg}^2\,(x^2+3)}$ je kompozicija četiri funkcije $y = r(h(g(k(x))))$, gde je $r(x) = e^x, h(x) = x^2, g(x) = \mathrm{tg} x$ i $k(x) = x^2+3$. Stoga je $y' = r'(h(g(k(x))))h'(g(k(x)))g'(k(x))k'(x)$, pa je

$$y' = e^{tg^2\,(x^2+3)} \cdot 2tg\,(x^2+3) \cdot \frac{1}{\cos^2\,(x^2+3)} \cdot 2x;$$

(d) Specifična je funkcija $y = x^x$ koja ima nezavisno promenljivu i u osnovi i u eksponentu. Ovu i njoj slične funkcije možemo zapisati kao $y = e^{x\ln x}$, pa je

$$y' = e^{x\ln x}(\ln x + 1).$$

4. Odrediti izvod implicitno zadatih funkcija:

(a) $x^2 + y^2 = r^2$; (b) $y + \mathrm{arctg}\, y - x = 0$.

Rešenje:

(a) Diferenciramo jednačinu $x^2 + y^2 = r^2$ pa dobijamo

$$2x + 2yy' = 0,$$

odakle sledi:

$$y' = -\frac{x}{y};$$

(b) Diferenciranjem jednačine $y + \mathrm{arctg}\, y - x = 0$ dobijamo

$$y' + \frac{1}{1+y^2}y' - 1 = 0.$$

Sredjivanjem izraza imamo da je

$$y' = \frac{1+y^2}{2+y^2}.$$

5. Odrediti izvod inverzne funkcije za funkcije:
   (a) $f(x) = 2x+3$; (b) $f(x) = \cos x,\ x \in [0,\pi]$.

Rešenje:

(a) Kako je $f'(x) = 2$ imamo da je

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}.$$

Proverimo dobijeni rezultat $y = 2x+3$, odakle sledi da je $x = \dfrac{y-3}{2}$, pa imamo inverznu funkciju za funkciju y, tj. $y^{-1} = \dfrac{x-3}{2}$, a onda je $(y^{-1})'(x) = \dfrac{1}{2}$, što smo dobili na početku korišćenjem navedene formule;

(b) Za funkciju $f(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$, je $f'(x) = -\sin x$, a $f^{-1}(x) = \arccos x$, pa sledi

$$f'(f^{-1}(y)) = -\sin(\arccos x) = -\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = -\sqrt{1-x^2},$$

te je

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Naći izvod funkcije date u parametarskom obliku $x = 1+\ln t, y = t^2(1+t)$.

Rešenje:

Lako dobijamo:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(t^2(1+t))'}{(1+\ln t)'} = \frac{3t^2+2t}{\frac{1}{t}} = t^2(3t+2).$$

7. Odrediti jednačine tangente i normale na grafik funkcije $y = x^2+2x-3$ u tački $A(1,0)$.

Rešenje:

Tačka $A(1,0)$ pripada grafiku funkcije $y=x^2+2x-3$. Kako je $f'(x)=2x+2$ sledi da je $f'(1)=4$, a to je koeficijent pravca tangente date krive. Znači, $y-0=4(x-1)$, tj.

$$y=4x-4$$

je jednačina tangente, a jednačina normale je $y-0=-\frac{1}{4}(x-1)$, tj.

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}.$$

8. Odrediti ugao α koji zaklapa tangenta grafika funkcije $y=x^2$ sa pozitivnim smerom $x-$ ose u tački:

   (a) $x=0$; (b) $x=\frac{1}{2}$; (c) $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Rešenje:

   Prava odredjena $x-$ osom ima koeficijent pravca $k_1=0$. Koeficijent pravca tangente k_2 grafika funkcije $y=x^2$ dobijamo kad nadjemo vrednost izvoda funkcije $y=x^2$, tj. $y'=2x$ u datim tačkama.

   (a) $k_2=y'(0)=0$ pa je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{0-0}{1+0}=0$, što znači da je $\alpha=0$;

   (b) $k_2=y'(\frac{1}{2})=1$ pa je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-0}{1+0}=1$, što znači da je $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

   (c) $k_2=y'(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\sqrt{3}$ pa je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{-\sqrt{3}-0}{1+0}=-\sqrt{3}$, što znači da je $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

9. Odrediti sledeće granične vrednosti:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}$; (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$; (d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^{3x}}{x^3}$.

   Rešenje:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}$ = [nakon uvrštavanja $x=0$ dobijamo neodredjeni oblik "$\frac{0}{0}$". Ovu graničnu vrednost teško bismo mogli rešiti elementarnim metodama] = $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x+3}{2}$ = [direktnim uvrštavanjem $x=0$] $=\frac{3}{2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}$ = [kada $x\to\infty$ dobijamo neodredjeni oblik ”$\dfrac{\infty}{\infty}$”. Elementarnom metodom (opisanoj u poglavlju **Granična vrednost**) vidimo da je vrednost limesa jednaka 3. Sada ćemo isti rezultat dobiti korišćenjem Lopitalovog pravila] = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+2}{2x}$ = [ponovo kada $x\to\infty$ dobijamo ”$\dfrac{\infty}{\infty}$” i postupak nastavljamo] $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2}=3$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$ = [nakon uvrštavanja $x=0$ dobijamo oblik ”$\dfrac{0}{0}$”] $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}$ = [ponovo smo dobili oblik ”$\dfrac{0}{0}$”] $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}$ = [direktnim uvrštavanjem $x=0$] $=\dfrac{1}{2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x^3}$ = [uvrštavanjem dobijamo ”$\dfrac{\infty}{\infty}$”] $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{3x}}{3x^2}$ = [uvrštavanjem dobijamo ”$\dfrac{\infty}{\infty}$” pa tražimo drugi izvod] $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3e^{3x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9e^{3x}}{2}$ $=+\infty$.

10. Odrediti sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x$; (b) $\lim\limits_{x\to0}\arcsin x\cdot \mathrm{ctg}x$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

Rešenje:

(a) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=$ [nakon uvrštavanja $x=0$ dobijamo ”$0\cdot(-\infty)$”] $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=$ [sada smo dobili oblik $-\dfrac{\infty}{\infty}$”] $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0}x=0$;

(b) $\lim\limits_{x\to0}\arcsin x\cdot ctgx=$ [nakon uvrštavanja dobijamo ”$0\cdot\infty$”] $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{\frac{1}{\mathrm{ctg}x}}$ $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{\mathrm{tg}x}=$ [sada imamo oblik ”$\dfrac{0}{0}$”] $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$ = [direktnim uvrštavanjem $x=0$ dobijamo] $=1$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=[”\infty\cdot0”]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=[”\dfrac{0}{0}”]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

11. Odrediti sledeće granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2})$; (c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$.

Rešenje:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}) =$ [uvrštavanjem $x=0$ dobijamo "$\infty-\infty$"] $=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} =$ [sada smo ga sveli na oblik "$\frac{0}{0}$"] $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$
$= [\text{"}\frac{0}{0}\text{"}] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}) = [\text{"}\infty-\infty\text{"}] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x} = [\text{"}\frac{0}{0}\text{"}] =$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x} = [\text{"}\frac{0}{0}\text{"}] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x} = [\text{"}\frac{0}{0}\text{"}]$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cos x-6x\cos x-x^2\cos x} = \frac{1}{6}$;

(c) Da bi odredili $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$ prvo ćemo da odredimo

$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln(1+\frac{1}{x}) = [\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = [\text{"}\frac{0}{0}\text{"}] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{2}{x^3}}$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x+1)} = [\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2} = \lim\limits_{x\to\infty}x = +\infty$. Znači,
$\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$ je oblika "$\infty-\infty$" $= \lim\limits_{x\to\infty}x^2(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x}))$
$= [\infty\cdot 0] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} = [\text{"}\frac{0}{0}\text{"}] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}-\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^3}}$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2(x+1)} = [\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}] = \frac{1}{2}$.

12. Za funkciju $f(x)=4x^2-2x+5-\frac{3}{x}$, $x\neq 0$, naći: $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x)$.

Rešenje:

Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = 8x-2+\frac{3}{x^2},\ x\neq 0.$$

Drugi izvod funkcije f nalazimo tako što nadjemo prvi izvod funkcije f', tj.

$$f''(x) = 8 - \frac{6}{x^3},\ x \neq 0.$$

Da bismo dobili treći izvod funkcije f treba da nadjemo prvi izvod funkcije f'', tj.

$$f'''(x) = \frac{18}{x^4},\ x \neq 0,$$

a četvrti izvod funkcije f tako što nadjemo prvi izvod funkcije f''', tj.

$$f^{(4)}(x) = \frac{-72}{x^5},\ x \neq 0.$$

13. Odrediti prvi, drugi i treći izvod za funkciju $x^3 - y^3 = 2$, gde je $y = f(x)$.

Rešenje:

Kako je $3x^2 - 3y^2y' = 0$ sledi da je

$$y' = \frac{x^2}{y^2}.$$

Potom nalazimo da je $y'' = \dfrac{2xy - 2x^2y'}{y^3}$ i zamenjujući y' imamo da je

$$y'' = \frac{2xy^3 - 2x^4}{y^5}.$$

Slično dobijamo da je

$$y''' = \frac{10x^6 - 12x^3y^3 + 2y^6}{y^8}.$$

14. Date su funkcije

(a) $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x \neq 1$.

Odrediti $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0), f^{(5)}(0)$.

Rešenje:

Lako nalazimo da je:

(a) $f(0) = 1,\ f'(x) = 24x^3 + 6x^2 - 6x + 5,\ f'(0) = 5,$
$f''(x) = 72x^2 + 12x - 6,\ f''(0) = -6,\ f'''(x) = 144x + 12,\ f'''(0) = 12,$
$f^{(4)}(x) = 144,\ f^{(4)}(0) = 144,\ f^{(5)}(x) = 0,\ f^{(5)}(0) = 0;$

(b) $f(0)=1, x\neq 1,\ f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2},\ f'(0)=1,$

$f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3},\ f''(0)=2,\ f'''(x)=\dfrac{6}{(1-x)^4},\ f'''(0)=6,$

$f^{(4)}(x)=\dfrac{24}{(1-x)^5},\ f^{(4)}(0)=24,\ f^{(5)}(x)=\dfrac{120}{(1-x)^6},\ f^{(5)}(0)=120.$

15. Funkciju $f(x)=x^4-5x^3-3x^2+7x+6$ razviti po stepenima binoma $x-2$.

Rešenje:

Kako je data funkcija polinom, koji je neprekidan i ima neprekidne sve izvode na skupu realnih brojeva, možemo koristiti Tejlorovu teoremu. Iz

$f(2)=-16,\ f'(x)=4x^3-15x^2-6x+7,\ f'(2)=-33,\ f''(x)=12x^2-25x-6,\ f''(2)=-18,\ f'''(x)=24x-25,\ f'''(2)=18,\ f^{(4)}(x)=24,$
$f^{(4)}(2)=24,$

nalazimo da je:

$$f(x)=-16-33(x-2)-18\frac{(x-2)^2}{2}+18\frac{(x-2)^3}{3!}+24\frac{(x-2)^4}{4!}.$$

16. Korišćenjem Maklorenove formule razviti sledeće funkcije do n-tog stepena:

(a) $y=e^x$; (b) $y=\sin x$; (c) $y=\cos x$;

(d) $y=\dfrac{1}{1-x}$; (e) $\ln(1+x)$; (f) $(1+x)^m$.

Rešenje:

(a) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+R_n;$

(b) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n;$

(c) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x),\ x\in\mathbb{R}$, gde je

$R_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\theta x+(n+1)\dfrac{\pi}{2}),\ 0<\theta<1;$

(d) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+R_n;$

(e) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+R_n(x),\ x>-1$, gde je

$R_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1;$

(f) $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$
$+\dfrac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + R_{2n+2}(x),\ x \in \mathbb{R}$, gde je
$R_n(x) = \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-(n+1)}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

17. Izvesti aproksimacije sledećih funkcija za male vrednosti nezavisno promenljive $(x < 1)$:

(a) $y = \cos x$; (b) $y = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Rešenje:

Kako su vrednosti promenljive x manje od jedan, onda je za aproksimaciju funkcije u Maklorenovom razvoju dovoljno uzeti samo deo polinoma čiji poslednji član sadrži x^2 ili x^3.

(a) $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!}$;

(b) $\dfrac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x + 3x^2$.

18. Proceniti apsolutnu vrednost greške ako se $\sin x$ zameni sa $x - \dfrac{x^3}{6}$, za $|x| \le 0,5$.

Rešenje:

Iz oblika za ostatak u razvoju sinusne funkcije dobijamo da je $|R_4(x)| = |\dfrac{x^5}{5!}\sin(\theta x + (n+1)\dfrac{\pi}{2})| \le \dfrac{|x|^5}{5!} \le \dfrac{0.5^5}{5!} < \dfrac{1}{2^5 \cdot 5} = \dfrac{1}{3840} = 0.00026$.

19. Naći granicu greške približne formule $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!}$, ako je $0 \le x \le 1$. Za koje n će greška biti manja od 10^{-9}?

Rešenje:

Greška formule je $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$, $0 \le x \le 1$, pa je $|R_n(x)| = \dfrac{|x|^{n+1}|e^{\theta x}|}{(n+1)!} \le \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$. Iz nejednakosti $\dfrac{3}{(n+1)!} \le 10^{-9}$ sledi da je dovoljno uzeti $n \ge 13$.

20. Izračunati približno, pomoću Tejlorovog reda sa 4 člana, uzimajući da je $\pi = 3.14$:
(a) $\sin\frac{\pi}{6}$; (b) $\cos\frac{\pi}{4}$.

Rešenje:

Lako nalazimo da je:

(a) $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{(\frac{\pi}{6})^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{6})^5}{5!} - \frac{(\frac{\pi}{6})^7}{7!} = 0.499770086$;

(b) $\cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{(\frac{\pi}{6})^2}{2} + \frac{(\frac{\pi}{6})^4}{4!} - \frac{(\frac{\pi}{6})^6}{6!} = 0.707384717$.

21. Odrediti domen sledećih funkcija:
(a) $y = \frac{1}{x}$; (b) $y = \sqrt{x}$; (c) $y = \ln x$; (d) $y = e^x$;
(e) $y = \frac{P_n(x)}{Q_k(x)}$, gde su $P_n(x)$ i $Q_k(x)$ respektivno polinomi stepena n i k.

Rešenje:

(a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jer za $x = 0$ funkcija nema vrednost (deljenje nulom nije definisano);

(b) $D_f = \{x | x \geq 0\}$ jer u polju realnih brojeva nije definisano korenovanje negativnih brojeva;

(c) $D_f = \mathbb{R}^+ = \{x | x > 0\}$ jer za negativne vrednosti i nulu logaritamska funkcija ne postoji;

(d) $D_f = \mathbb{R}$ jer za svako x koje je realan broj može da se odredi vrednost funkcije;

(e) Domen funkcije su sve one vrednosti iz skupa realnih brojeva, osim onih u kojima polinom $Q_k(x)$ ima nule.

22. Neka su date funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Odrediti domen funkcija:
(a) $(f+g)(x)$; (b) $(f \cdot g)(x)$.

Rešenje:

(a) Iz prethodnog primera znamo da je $D_f = \{x | x \geq 0\}$ i $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da bi funkcija $(f+g)(x)$ bila definisana moraju biti zadovoljeni i domen funkcije f i domen funkcije g, tj. njihov presek, te stoga dobijamo $D_{f+g} = \{x | x > 0\}$;

(b) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, pa je, kao i malopre, domen proizvoda ove dve funkcije jednak preseku domena tih funkcija, tj. $D_{f+g} = \{x | x > 0\}$.

23. Odrediti nule sledećih funkcija:

(a) $y = 2x + 3$; (b) $y = \sin x$; (c) $y = e^x$; (d) $y = \frac{1}{x}$.

Rešenje:

(a) Funkcija $y = 2x + 3$ ima nulu, jer je $2x + 3 = 0$, za $x = -\frac{3}{2}$;

(b) Znamo $\sin x = 0$, za $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Trigonometrijske funkcije imaju beskonačno mnogo nula;

(c) Funkcija $y = e^x$ nema nulu, jer ni za jednu vrednost promenjive x funkcija e^x nije nula;

(d) Takodje, ni funkcija $y = \frac{1}{x}$ nema nulu.

24. Odrediti parnost sledećih funkcija:

(a) $y = \cos x$; (b) $y = \frac{x^2}{1 + x^4}$; (c) $y = \sin x$; (d) $y = x^3$.

Rešenje:

(a) Funkcija $y = \cos x$ je parna, jer je $\cos x = \cos(-x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$;

(b) Funkcija je parna, jer je $\frac{x^2}{1 + x^4} = \frac{(-x)^2}{1 + (-x)^4}$, za svako $x \in \mathbb{R}$;

(c) Funkcija $y = \sin x$ je neparna, jer je $\sin x = -\sin(-x)$, za svako $x \in \mathbb{R}$;

(d) Funkcija $y = x^3$ je neparna, jer je $x^3 = -(-x)^3$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

25. Odrediti osnovni period funkcije $y = \cos x$.

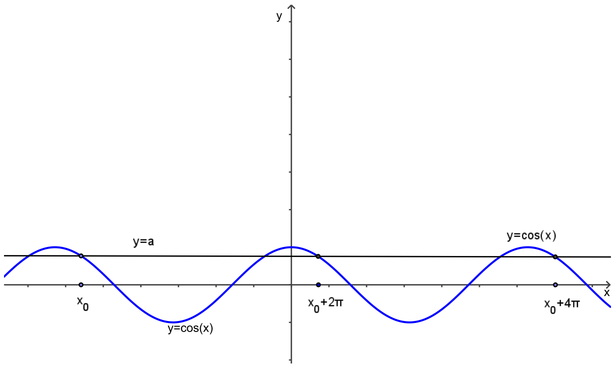
Rešenje:

Funkcija $y = \cos x$ ima osnovni period 2π, jer je $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (videti *sliku 9.5*).

26. Odrediti intervale monotonosti za sledeće funkcije:

(a) $y = x^2$; (b) $y = 2x + 1$; (c) $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

Rešenje:

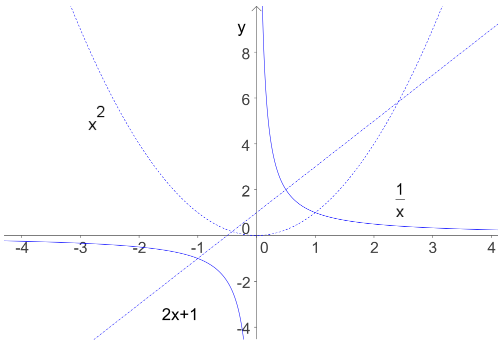


Slika 9.5. Funkcija $y = \cos x$

(a) Funkcija $y = x^2$ opada na intervalu $(-\infty, 0]$, a raste na intervalu $[0, \infty)$ (videti *sliku 9.6*);

(b) Funkcija $y = 2x + 1$ raste za svako $x \in \mathbb{R}$ (videti *sliku 9.6*);

(c) Funkcija $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ opada na intervalu $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (*slika 9.6*).



Slika 9.6. Funkcije $y = x^2$, $y = 2x + 1$ i $y = \frac{1}{x}$

27. Odrediti ekstremne vrednosti sledećih funkcija:

(a) $y = x^2$; (b) $y = 2x + 1$; (c) $\dfrac{1}{x}$.

Rešenje:

(a) Kako je $f'(x) = 2x$ iz uslova za kritičnu tačku dobijamo da je to $x = 0$. Data funkcija je definisana za svako $x \in \mathbb{R}$, pa stoga skup realnih brojeva razbijamo na intervale $(-\infty, 0), (0, \infty)$. Prvi izvod funkcije na intervalu $(-\infty, 0)$ je negativan, a na intervalu $(0, \infty)$ pozitivan, što znači, prema dovoljnom uslovu za postojanje ekstrema, da funkcija $f(x) = x^2$ ima minimum u tački $x = 0$;

(b) Funkcija $y = 2x + 1$ nema ekstremnu vrednost, jer je data funkcija stalno rastuća;

(c) Kako je izvod funkcije $f(x)$ dat sa $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, vidimo da je on uvek negativan, što znači da funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x}$ uvek opada, a stoga nema ni minimum ni maksimum, tj. nema ekstrem.

28. Primenom drugog kriterijuma o dovoljnosti uslova za postojanje ekstrema, pokazati da funkcija $f(x) = x^2$ ima minimum u tački $x = 0$.

Rešenje:

Naime, kako je $f'(x) = 2x$, to je $f'(x) = 0$ za $x = 0$. Pošto je $f''(x) = 2$, onda je i $f''(0) = 2$, tj. $f''(0) > 0$, pa prema kriterijumu II sledi da funkcija $f(x) = x^2$ ima minimum u tački $x = 0$.

29. Naći intervale konveksnosti (konkavnosti) za funkcije $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^2$.

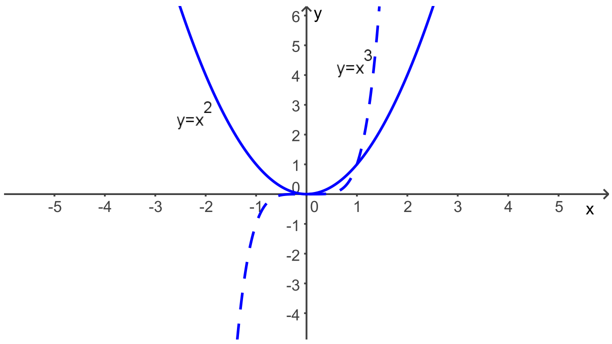
Rešenje:

Iz $f''(x) = 6x$ sledi da je $f''(x) < 0$ na intervalu $(-\infty, 0)$ pa je tu funkcija konkavna, dok je $f''(x) > 0$ na intervalu $(0, \infty)$ pa je tu funkcija konveksna.

Drugi izvod funkcije $g(x)$ je $g''(x) = 2$ i on je uvek veći od nule, što znači da je funkcija $g(x) = x^2$ na celom svom domenu definisanosti, tj. za svako $x \in \mathbb{R}$, konveksna.

30. Koristeći prethodni primer, ispitati da li funkcije $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^2$ imaju prevojne tačke.

Rešenje:



Slika 9.7. Funkcije $y = x^2$ i $y = x^3$

Kao što smo već videli $f''(x) = 6x = 0$, za $x = 0$, što znači da je $x = 0$ potencijalna prevojna tačka. Pošto je $f''(x) < 0$ na intervalu $(-\infty, 0)$ i $f''(x) > 0$ na intervalu $(0, \infty)$, to znači da je $x = 0$ prevojna tačka funkcije f.

Drugi izvod funkcije g je uvek pozitivan, tj. $g''(x) = 2$ pa nikad ne može biti nula i uvek postoji, što znači da nema mogućnosti za postojanje prevojne tačke (*slika 9.7*).

31. Da li funkcije $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ i $y = e^x$ imaju vertikalnu asimptotu?

Rešenje:

Funkcija $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ nije definisana u tački $x = 2$. Proverićemo šta se dešava sa graničnim vrednostima te funkcije kad x teži u 2 sleva i sa desna. Kako je

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty,$$

znači da je prava $x = 2$ vertikalna asimptota funkcije f.

Funkcija $y = e^x$ je definisana, za svako $x \in \mathbb{R}$, te stoga nema vertikalnu asimptotu.

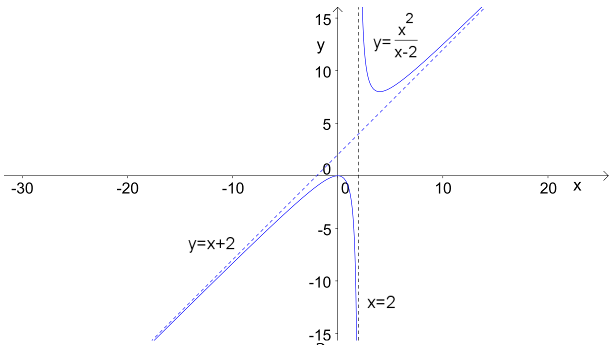
32. Odrediti kose asimptote funkcija $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ i $y = x^2$.

Rešenje:

Funkcija $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ ima kosu asimptotu. Kako je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = 1 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - 1 \cdot x\right) = 2,$$

to je prava $y = x + 2$ kosa asimptota funkcije $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ (*slika 9.8*).



Slika 9.8. Funkcija $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ i njene asimptote

Funkcija $y = x^2$ nema kosu asimptotu, jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \infty.$$

33. Ispitati da li funkcije $y = \dfrac{x^2}{x-2}, y = \dfrac{x}{x-2}$ i $y = e^x$ imaju horizontalnu asimptotu.

Rešenje:

Funkcija $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ nema horizontalnu asimptotu, jer je

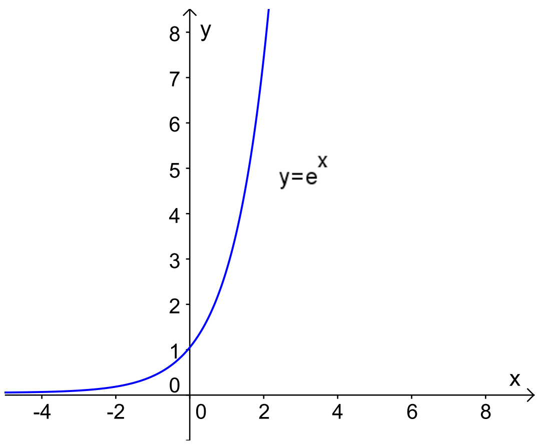
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-2} = \pm\infty.$$

Funkcija $y = \dfrac{x}{x-2}$ ima horizontalnu asimptotu $y = 1$, jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1.$$

Funkcija $y = e^x$ (*slika 9.9*) sleva ima horizontalnu asimptotu $y = 0$, dok sa desna nema horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty \text{ i } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$



Slika 9.9. Grafik funkcije $y = e^x$

Zadaci

1. Odrediti prvi izvod funkcija:

   (a) $y = x^5 + 3x^{\frac{1}{2}} - \arcsin x + 5\ln x$; (b) $y = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$;
   (c) $y = x^2 \sin x$; (d) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$; (e) $y = x - \sin x \cos x$;
   (f) $y = -3e^x \sin x$; (g) $y = \dfrac{x-5}{x+7}$; (h) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;
   (i) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; (j) $y = \dfrac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}$; (k) $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$;
   (l) $y = \dfrac{\ln x}{1-\ln x}$; (m) $f(t) = \dfrac{(1+t^2)\operatorname{arctg} t - t}{2}$; (n) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$.

2. Odrediti prvi izvod složenih funkcija:

   (a) $y = (x+5)^{\frac{3}{4}}$; (b) $y = 2\sin 6x$; (c) $y = x^2 e^{-2x}$;
   (d) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$; (e) $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$;
   (f) $y = \ln\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$; (g) $y = \ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$;
   (h) $y = \sin^4 x$; (i) $y = \dfrac{1}{2}\ln(\operatorname{tg} x) + \ln(\cos x)$;
   (j) $y = \sqrt{1+\sin x}(1-\sin x)$; (k) $y = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln\cos x$;
   (l) $y = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$; (m) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;
   (n) $y = \ln(\operatorname{arctg}(\dfrac{1+x}{1-x}))$; (o) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

3. Odrediti prvi izvod složenih funkcija:

   (a) $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1})$; (b) $y = e^{2x}\sqrt[3]{x^2+5}$;
   (c) $y = \dfrac{\ln 3x}{x}$; (d) $y = x\sin(3x)\ln x$; (e) $y = 3 + \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\cos 5x}$;
   (f) $y = (x^5 + 2^{3x})\arccos(x^2+5)$; (g) $y = x^{x+5}$;
   (h) $y = x^{x^3}$; (i) $y = (x^2-3)^x$; (j) $y = (1+\dfrac{1}{x})^{3x}$.

4. Odrediti izvod implicitno zadatih funkcija:

   (a) $2x - 3y + 3 = x^2 + 2y - 6x$; (b) $x^2 + y^2 = 4$;
   (c) $x^2 + xy + y^2 = 6$; (d) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;
   (e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5x$; (f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(g) $x\cos y + y = 5x$; (h) $xy - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 0$;

(i) $xy = 5(x+y) - 3^{xy}$; (j) $x^4 + 4x^2y^2 - 3xy^3 + 3x = 0$;

(k) $(y^2-9)^3 = (2x^3+3x-1)^2$; (l) $\sin(xy) = x$;

(m) $xy - tgy = 0$; (n) $\dfrac{3+x^2y^3}{1+y} - 5x\ln y = 9$;

(o) $\sqrt[3]{1+y} + \ln(xy) = \dfrac{x}{y}$; (p) $x^y = y^x$.

5. Odrediti izvod inverzne funkcije:

   (a) $f(x) = x^2 + 4x$; (b) $f(x) = x^3 + 6$; (c) $f(x) = e^{x-5}$;

   (d) $f(x) = \sqrt{x} + 3$; (e) $f(x) = \sqrt{x^5 - 6}$; (f) $f(x) = \ln(x+7)$.

6. Odrediti izvod funkcija datih u parametarskom obliku:

   (a) $x = t + t^2$, $y = t - t^3$; (b) $x = t(1-\cos t)$, $y = 1 + \sin t$;

   (c) $x = t^2 + 2t$, $y = 2t^3 - 6t$; (d) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1-\cos t)$;

   (e) $x = 2\cos^3 t$, $y = \sin^3 t$; (f) $x = a\cos^2\varphi$, $y = b\sin^2\varphi$;

   (g) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$; (h) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$.

7. Odrediti jednačine tangente i normale za sledeće funkcije:

   (a) $y = \sqrt{x}$ u tački $A(4,2)$; (b) $y = e^{x^2+1}$ u tački $A(1, e^2)$.

8. U kojim tačkama krive $y = x^3$ je koeficijent pravca tangente jednak 3?

9. Data je funkcija $y = x^2$. Odrediti:

   (a) jednačinu tangente paralelne sa $y = 4x - 5$;

   (b) jednačinu tangente normalne na $2x - 6y + 5 = 0$;

   (c) jednačinu tangente koja zaklapa ugao $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ sa pravom $3x - y + 1 = 0$.

10. Pod kojim uglom se seku krive $y = \dfrac{1}{x}$ i $y = \sqrt{x}$?

11. Odrediti parametar k tako da prava $y = kx + 1$ bude tangenta krive $y^2 = 4x$ i odrediti tačke dodira tangente i date krive.

12. Odrediti sledeće granične vrednosti:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x - \sin x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$;

    (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1}$.

13. Naći granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x \ln(x-1))$; (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}((\frac{\pi}{2}-x)\mathrm{tg}x)$.

14. Odrediti $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})$.

15. Naći granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

16. Naći granične vrednosti:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin x}{3x+\sin x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{x}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0}x(\ln(x+1)-\ln x)$; (f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\mathrm{tg}^2x)^{\mathrm{ctg}^2x}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x}}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos(ax)}-\sqrt[n]{\cos(bx)}}{x^2}$.

17. Za sledeće funkcije odrediti $f'(x), f''(x), f'''(x)$:

(a) $f(x)=\sqrt{3-5x}$; (b) $f(x)=\frac{2x-3}{3x+1}$.

18. Naći $f^{(j)}(x)$, $j\in\mathbb{N}$, ako je:

(a) $f(x)=e^x$; (b) $f(x)=\sin x$; (c) $f(x)=\cos x$.

19. Naći $(x^4)^{(4)}$ i $(x^{2004})^{(2004)}$.

20. Izvesti Maklorenove polinome za sledeće funkcije:

(a) $y=e^{-x^2}$; (b) $y=x\ln(1+x)$;

(c) $y=\sqrt{1+x}$; (d) $y=\sqrt{1+x^2}$.

21. Razviti polinom $5x^4-36x^3+99x^2-122x+57$ po stepenima od $(x-2)$, koristeći Tejlorov polinom.

22. Razviti polinom $x^5-25x^4+249x^3-1235x^2+3051x-2980$ po stepenima od $(x-5)$, koristeći Tejlorov polinom.

23. Izvesti aproksimacije sledećih funkcija za male vrednosti nezavisno promenljive $(x<1)$:

(a) $y=\sqrt[n]{1+x}$; (b) $y=$ tg x; (c) $y=$ arctg x.

24. Izračunati približne vrednosti navedenih funkcija kao vrednosti Makloreno-vog polinoma drugog stepena za eksponencijalnu funkciju i proceniti grešku.

    (a) $y = \sqrt[3]{e}$; (b) $y = \dfrac{1}{e}$.

25. Izračunati približno:

    (a) $\ln 3$ kao vrednost Maklorenovog polinoma petog stepena za funkciju $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

    (b) $\sin 1$ pomoću Maklorenovog polinoma petog stepena za funkciju $\sin x$.

26. Odrediti ekstremne vrednosti sledećih funkcija:

    (a) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; (b) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$; (c) $y = \ln^2 x$; (d) $y = x^2 e^x$.

27. Odrediti intervale monotonosti, konveksnosti, konkavnosti i prevojne tačke funkcija:

    (a) $y = x^3 - 3x$; (b) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

28. Naći asimptote sledećih funkcija:

    (a) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x-2}$; (b) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$; (c) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

29. Ispitati funkcije i nacrtati njihov grafik:

    (a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; (b) $y = x^4 - 4x^2 + 3$;

    (c) $y = x^2(3-x)$; (d) $f(x) = \dfrac{1+ax}{b-cx}$, $a < 0, b > 0, c < 0$.

30. Ispitati funkcije i nacrtati njihov grafik:

    (a) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; (b) $y = \dfrac{4x}{4-x^2}$;

    (c) $y = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$; (d) $y = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)}$;

    (e) $y = \dfrac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$; (f) $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$; (g) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$;

    (h) $y = \dfrac{6x-x^2-9}{x-2}$; (i) $y = \dfrac{x^2+x}{x-1}$; (j) $y = x - 2 - \dfrac{6}{x-1}$.

31. Ispitati funkcije i nacrtati njihov grafik:

    (a) $y = x^2 e^{-x}$; (b) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$; (c) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

    (d) $y = xe^x$; (e) $y = \dfrac{e^x}{x}$; (f) $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$.

32. Ispitati funkcije i nacrtati njihov grafik:

(a) $y = \ln(x^2-1)$; (b) $y = x\ln x$; (c) $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$;

(d) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; (e) $y = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$; (f) $y = \ln(x^2-3x+2)$.

Rešenja

1.

(a) $y' = 5x^4 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{5}{x}$; (b) $y' = 4x^3$;

(c) $y' = 2x\sin x + x^2\cos x$; (d) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

(e) $y' = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x$; (f) $y' = -3e^x \sin x - 3e^x\cos x$;

(g) $y' = \dfrac{12}{(x+7)^2}$; (h) $y' = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$; (i) $y' = \dfrac{(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$;

(j) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; (k) $y' = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$; (l) $y' = \dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$;

(m) $y' = f'(t) = t \text{ arctg } t$; (n) $y' = \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

2.

(a) $y' = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x+5}}$; (b) $y' = 12\cos(2x)$; (c) $y' = 2xe^{-2x}(1-x)$;

(d) $y' = -2e^{-x}\sin x$; (e) $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$; (f) $y' = \dfrac{a}{a^2-x^2}$;

(g) $y' = \dfrac{\text{ctg }(2x)}{(1-\sin(2x))}$; (h) $y' = 4\sin^3 x\cos x$; (i) $y' = \dfrac{1-2\sin^2 x}{\sin(2x)}$;

(j) $y' = \dfrac{-\cos x - 3\cos x \sin x}{2\sqrt{1+\sin x}}$; (k) $y' = \text{ tg } x\dfrac{\text{tg}^2 x - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$;

(l) $y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; (m) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(n) $y' = \dfrac{1}{(1+x^2)\text{ arctg } \frac{1+x}{1-x}}$; (o) $y' = \dfrac{2(1+x^2)}{1+x^4}$.

3.

(a) $y' = \dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$; (b) $y' = 2e^{2x}\sqrt[3]{x^2+5} + \dfrac{2}{3}\dfrac{e^{2x}}{(\sqrt[3]{x^2+5})^2}x$;

(c) $y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln(3x)}{x^2}$; (d) $y' = \sin(3x)\ln x + 3x\cos(3x)\ln x + \sin(3x)$;

(e) $y' = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2(x+\cos(5x))} - \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{(x+\cos(5x))^2}(1-5\sin(5x))$;

(f) $y' = (5x^4 + 3\cdot 2^{3x}\ln 2)\arccos(x^2+5) - 2(x^5+2^{3x})\dfrac{x}{\sqrt{(-24-x^4-10x^2)}}$;

(g) $y' = x^{x+5}(\ln x + \dfrac{x+5}{x})$; (h) $y' = x^{x^3}(3x^2\ln x + x^2)$;

(i) $y' = (x^2-3)^x(\ln(x^2-3) + 2\dfrac{x^2}{x^2-3})$;

(j) $y' = (1+\dfrac{1}{x})^{3x}(3\ln(1+\dfrac{1}{x}) - \dfrac{3}{x(1+\frac{1}{x})})$.

4.

(a) $y' = \dfrac{-2x+8}{5}$; (b) $y' = -\dfrac{x}{y}$; (c) $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$;

(d) $y' = \dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$; (e) $y' = 10\sqrt{y} - \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$; (f) $y' = -\dfrac{xb^2}{ya^2}$;

(g) $y' = \dfrac{\cos y - 5}{x\sin y - 1}$; (h) $y' = \dfrac{y-y^2-x^2}{x(y^2+x^2+1)}$; (i) $y' = \dfrac{5-y-3^{xy}y\ln 3}{x-5+3^{xy}x\ln 3}$;

(j) $y' = \dfrac{-4x^3-8xy^2+3y^3-3}{8x^2y-9xy^2}$; (k) $y' = \dfrac{(2x^3+3x-1)(2x^2+1)}{y(y^2-9)^2}$;

(l) $y' = \dfrac{\frac{1}{\cos(xy)} - y}{x}$; (m) $y' = \dfrac{-y}{x - \frac{1}{\cos^2 y}}$;

(n) $y' = -y\dfrac{2xy^3+2xy^4-5\ln y-10y\ln y-5y^2\ln y}{3x^2y^3+2x^2y^4-3y-5x-10xy-5xy^2}$;

(o) $y' = 3(\sqrt[3]{(1+y)})^2 y\dfrac{-y+x}{x(y^2+3(\sqrt[3]{(1+y)})^2y+3x(\sqrt[3]{(1+y)})^2)}$;

(p) Ne možemo direktno naći izvod implicitno zadate funkcije $x^y = y^x$. Zato je transformišemo u ekvivalentan izraz $\ln x^y = \ln y^x$, tj. $y\ln x = x\ln y$, kome lako nalazimo izvod. Dobijamo:

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}y'.$$

5. (a) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x+4} - 2$, $(f^{-1}(x))' = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$;

(b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-6}$, $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{3(\sqrt[3]{x-6})^2}$;

(c) $f^{-1}(x) = 5 + \ln x$, $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{x}$;

(d) $f^{-1}(x)=(x-3)^2$, $(f^{-1}(x))'=2(x-3)$;

(e) $f^{-1}(x)=(x^2+6)^{\frac{1}{5}}$, $(f^{-1}(x))'=\dfrac{2x}{5}(x^2+6)^{\frac{-4}{5}}$;

(f) $f^{-1}(x)=e^x-7$, $(f^{-1}(x))'=e^x$.

6.

(a) $y'=\dfrac{1-3t^2}{1+2t}$; (b) $y'=\dfrac{\cos t}{1-\cos t+t\sin t}$; (c) $y'=3(t-1)$;

(d) $y'=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$; (e) $y'=-\dfrac{\sin t}{2\cos t}$; (f) $y'=-\dfrac{b}{a}$;

(g) $y'=\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; (h) $y'=\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$.

7. (a) $t: y=\dfrac{x}{4}+1$, $n: y=-4x+18$;

(b) $t: y=2e^2x-e^2$, $n: y=-\dfrac{1}{2e^2}x+\dfrac{1}{2e^2}+e^2$.

8. $A(1,1)$, $B(-1,-1)$.

9. (a) Koeficijent tangente krive je $k=2x$, a da bi bila paralelna sa pravom $y=4x-5$ mora biti zadovoljeno da su im koeficijenti pravaca jednaki, tj. $2x=4$, odakle je $x=2$. To znači da tangenta dodiruje krivu u tački $P(2,2^2)$. Stoga je jednačina tangente $y-4=4(x-2)$, tj. $y=4x-4$;

(b) Prava $2x-6y+5=0$ ima koeficijent pravca $k_n=y'=\dfrac{1}{3}$. Tangenta koja je normalna na datu pravu ima koeficijent pravca $k_t=-\dfrac{1}{k_n}=-3$, a ujedno i $k_t=2x$, jer je to tangenta parabole $y=x^2$. Izjednačavanjem dobijamo $-3=2x$, što znači da tangenta dodiruje parabolu u tački $P(-\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4})$, pa je njena jednačina $t: y=-3x-\dfrac{9}{4}$;

(c) Koeficijent pravca prave $3x-y+1=0$ je 3, pa imamo $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3-k_t}{1+3k_t}$ odakle je $k_t=\dfrac{1}{2}$. Ujedno je i $k_t=2x$, što znači da je dodir parabole i tangente u tački $P(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{16})$. Jednačina tangente je $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

10. Prvo moramo naći presečnu tačku datih krivih. Ta tačka je $P(1,1)$. Zatim nadjemo koeficijente pravca tangenti obe krive u toj tački, a odatle lako sledi rezultat da je ugao pod kojim se seku krive $\alpha=\operatorname{arctg} 3$.

11. Tačka dodira je $T(1,2)$ i $k=1$, pa je $t: y=x+1$.

12.
(a) 3; (b) 1; (c) $-\frac{1}{3}$; (d) -2.

13.
(a) 0; (b) -1.

14. $\frac{1}{2}$.

15.
(a) 1; (b) 1; (c) 1.

16.
(a) 1; (b) $\frac{m}{n}$; (c) $\frac{1}{4}$; (d) $\frac{5}{\ln 10}$; (e) 1;
(f) 2; (g) $e^{-\frac{1}{2}}$; (h) e^3; (i) ∞; (j) $\frac{1}{2}(-\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n})$.

17. (a) $f'(x)=\frac{-5}{2\sqrt{3-5x}}$, $f''(x)=\frac{-25}{4(3-5x)^{\frac{3}{2}}}$, $f'''(x)=\frac{-375}{8(3-5x)^{\frac{5}{2}}}$;
(b) $f'(x)=\frac{11}{(3x+1)^2}$, $f''(x)=\frac{-66}{(3x+1)^3}$, $f'''(x)=\frac{594}{(3x+1)^4}$.

18. (a) $f^{(j)}(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$;
(b) $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}=\sin x \Rightarrow$ $f^{(4j)}(x)=\sin x$, $f^{(4j+1)}(x)=\cos x$, $f^{(4j+2)}(x)=-\sin x$ $f^{(4j+3)}(x)=-\cos x$;
(c) $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$, $f'''(x)=\sin x$, $f^{(4)}=\cos x \Rightarrow f^{(4j)}(x)$ $=\cos x$, $f^{(4j+1)}(x)=-\sin x$, $f^{(4j+2)}(x)=-\cos x$, $f^{(4j+3)}(x)=\sin x$.

19. $(x^4)^{(4)}=(4x^3)'''=(4\cdot 3x^2)''=(4\cdot 3\cdot 2x)'=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=4!$. Analogno je $(x^{2004})^{(2004)}=2004!$.

20. (a) Korišćenjem smene $t=-x^2$ dobijamo polinom $e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+r_n(t)$, tj. $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+r_n(x)$;
(b) $y=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)x=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$;

(c) $y=(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$= 1+\frac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)x^n}{2^n n!}$;

(d) $y=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{2!}x^4+\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{3!}x^6+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)x^{2n}}{2^n n!}$.

21. $5x^4-36x^3+99x^2-122x+57$

$= 1+2(x-2)+3(x-2)^2+4(x-2)^3+5(x-2)^4$.

22. $x^5-25x^4+249x^3-1235x^2+3051x-2980$

$= (x-5)^5-(x-5)^3+(x-5)+25$.

23.

(a) $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{x}{n}+\frac{1-n}{2n^2}x^2$; (b) $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}$;

(c) $\operatorname{arctg} x\approx x(1-\frac{x^2}{3})$.

24. (a) $\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{(\frac{1}{3})^2}{2!}\approx 1.389$.

Procena greške je $\sqrt[3]{e}-1.389=r_2(\frac{1}{3})=\frac{(\frac{1}{3})^3}{3!}e^{\xi}$, $0<\xi<\frac{1}{3}$, a kako je $(e^{\xi})_{max}=e^{\frac{1}{3}}\approx 1.4$ sledi $\sqrt[3]{e}-1.389\approx\frac{(\frac{1}{3})^3}{3!}1.4\approx 8.64\cdot 10^{-3}<0.01$;

(b) $e^{-1}\approx 1-1+\frac{(-1)^2}{2!}=0.5$.

Procena greške je $0.5-e^{-1}<|\frac{(-1)^3}{3!}|<0.17$.

25. (a) Iz jednačine $3=\frac{1+x}{1-x}$ nalazimo da je $x=\frac{1}{2}$, a kako je $\ln\frac{1+x}{1-x}$ $=\ln(1+x)-\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-r_6(x)-(x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-r_6(x))=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5})$ sledi da je $\ln 3=2(\frac{1}{2}+\frac{(\frac{1}{2})^3}{3}+\frac{(\frac{1}{2})^5}{5})\approx 1.096$;

(b) $\sin 1\approx 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\approx 0.84$.

26. (a) Tačke $(1,2),(-1,2)$ su tačke minimuma, dok je $(4,8)$ tačka maksimuma funkcije;
    (b) Tačka $(0,0)$ je maksimum;
    (c) Tačka $(e^{-2},\frac{4}{e^2})$ maksimum, a $(1,0)$ minimum;
    (d) Tačke $(-2,4e^{-2})$ i $(1,0)$ su minimumi.

27. (a) Za $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ funkcija raste, a za $x\in(-1,1)$ funkcija opada. Za $x<0$ funkcija je konkavna, a za $x>0$ je konveksna. Tačka $(0,0)$ je prevojna tačka;
    (b) Za $x\in(-1,1)$ funkcija raste, a za $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ opada. Za $x<0$ funkcija je konkavna, a za $x>0$ je konveksna. Tačka $(0,0)$ je prevojna tačka.

28. (a) Prava $x=2$ je vertikalna asimptota, a $y=x-3$ kosa;
    (b) Vertikalne asimptote su $x=1$ i $x=-1$, a kosa je $y=4x-1$;
    (c) Prava $x=0$ je vertikalna, a $y=1$ horizontalna asimptota.

29. (a) Funkcija može da se zapiše na sledeći način:

$$y=(x-1)^2(x-4).$$

○ Domen funkcije: $D=\mathbb{R}$.

○ Nule funkcije: $x=1$ i $x=4$.

○ Parnost funkcije: ni parna, ni neparna.

○ Znak funkcije:

	$(-\infty,1)$	$(1,4)$	$(4,\infty)$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
y	$-$	$-$	$+$

.

○ Monotonost i ekstremi funkcije: $y'=3(x-1)(x-3)$, pa je moguć ekstrem u $x=1$ i $x=3$.

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
y'	$+$	$-$	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija ima maksimum u tački $(1,0)$ i minimum u $(3,-4)$.

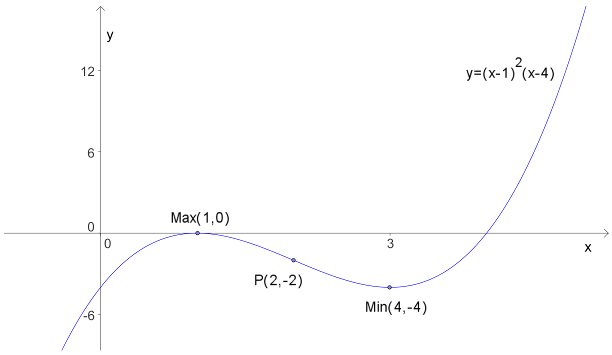
∘ Konkavnost, konveksnost, prevojne tačke funkcije: $y'' = 6(x-2)$, pa je moguć prevoj u $x = 2$.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\frown$	$\smile$

Prevojna tačka je $(2, -2)$.

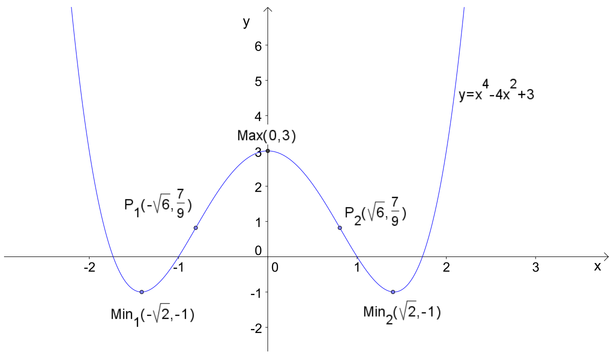
∘ Asimptote funkcije: nema.

∘ Grafik se nalazi na *slici 9.10*;



Slika 9.10. Grafik funkcije date u zadatku 24 (a)

(b) Videti *sliku 9.11*;

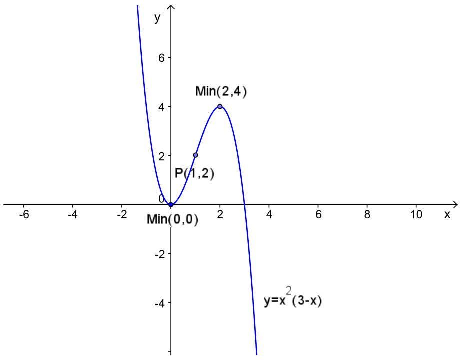


Slika 9.11. Grafik funkcije date u zadatku 24 (b)

(c) Videti *sliku 9.12*;

(d) ∘ Domen funkcije: $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{b}{c}\}$.

∘ Nule funkcije: $x = -\frac{1}{a}$.



Slika 9.12. Grafik funkcije date u zadatku 24 (c)

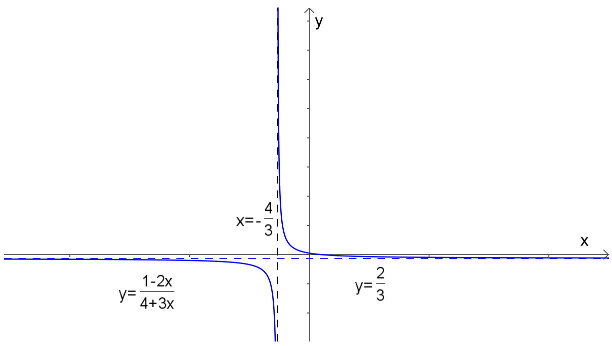
∘ Parnost funkcije: ni parna, ni neparna.

∘ Znak funkcije: za $x \in (\frac{b}{c}, -\frac{1}{a})$ je $f(x) > 0$, za $x \in (-\infty, \frac{b}{c}) \cup (-\frac{1}{a}, \infty)$ je $f(x) < 0$.

∘ Monotonost i ekstremi funkcije: funkcija opada na celom domenu i nema ekstrema.

∘ Konkavnost, konveksnost, prevojne tačke funkcije: za $x \in (\frac{b}{c}, +\infty)$ funkcija je konveksna, za $x \in (-\infty, \frac{b}{c})$ funkcija je konkavna. Nema prevojnih tačaka.

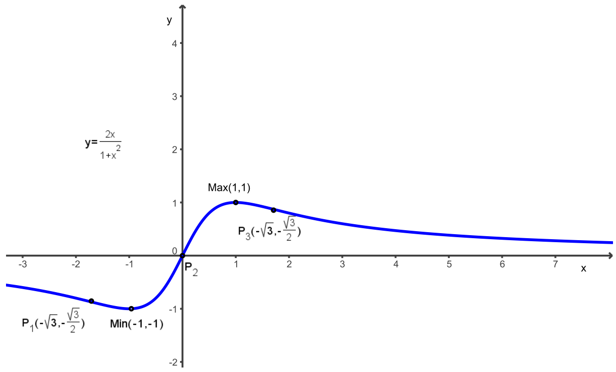
∘ Asimptote funkcije: vertikalna asimptota $x = \frac{b}{c}$ sa leve strane teži u $-\infty$, a sa desne u $+\infty$; horizontalna asimptota $y = -\frac{a}{c}$.



Slika 9.13. Grafik funkcije iz zadatka 24 (d)

∘ Na *slici 9.13.* je nacrtan grafik funkcije za vrednosti $a = -2, b = 4, c = -3$, tj. $y = \frac{1-2x}{4+3x}$.

30. (a) Videti *sliku 9.14*;



Slika 9.14. Grafik funkcije date u zadatku 25 (a)

(b) ○ Domen funkcije: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

○ Nule funkcije: $x = 0$.

○ Parnost funkcije: neparna.

○ Znak funkcije:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$4x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$4-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
y	$+$	$-$	$+$	$-$

.

○ Monotonost i ekstremi funkcije: $y' = \dfrac{4(4+x^2)}{(2-x)^2(2+x)^2}$, pa je moguć ekstrem u $x = -2$ i $x = 2$.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
y'	$+$	$+$	$+$
y	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Zaključujemo da funkcija nema ekstrema.

○ Konkavnost, konveksnost, prevojne tačke funkcije:

$$y'' = \frac{8(-x^3+2x^2+4x+8)}{(2-x)^3(2+x)^3},$$

pa je moguć prevoj u $x = 2$.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$(2-x)^3$	$+$	$+$	$-$
$(2+x)^3$	$-$	$+$	$+$
y''	$-$	$+$	$-$
y	$\frown$	$\smile$	$\frown$

Funkcija nema prevojnih tačaka.

○ Asimptote funkcije:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{4x}{4-x^2} = -\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to -2^-} \frac{4x}{4-x^2} = +\infty,$$

pa je $x = -2$ vertikalna asimptota. Takodje,

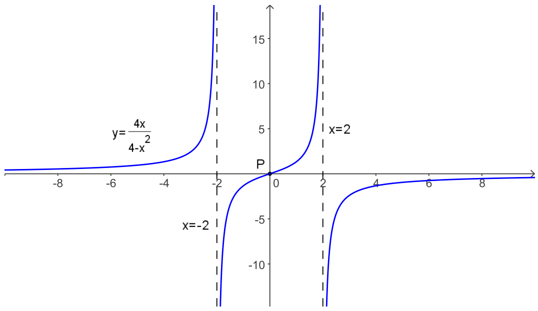
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{4x}{4-x^2} = -\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to 2^-} \frac{4x}{4-x^2} = +\infty,$$

pa je i $x = 2$ vertikalna asimptota. Iz

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0,$$

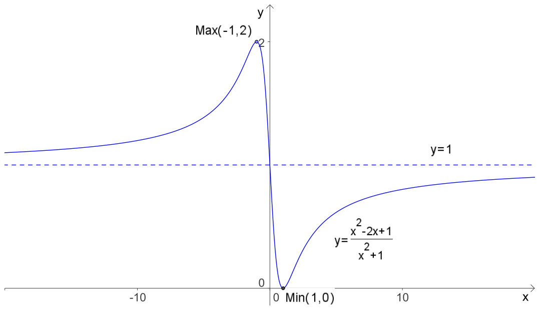
sledi da je $y = 0$ horizontalna asimptota.

○ Grafik se nalazi na *slici 9.15*;



Slika 9.15. Grafik funkcije date u zadatku 25 (b)

(c) Videti *sliku 9.16*;



Slika 9.16. Grafik funkcije date u zadatku 25 (c)

(d) ◦ Domen funkcije: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

◦ Nule funkcije: $x = 2$ i $x = -2$.

◦ Parnost funkcije: parna.

◦ Znak funkcije:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$3+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

.

◦ Monotonost i ekstremi funkcije: $y' = \dfrac{10x}{(-x^2+9)^2}$, pa je moguć ekstrem u $x = 0$.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
y'	$-$	$-$	$+$	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Ima minimum u tački $(0, \dfrac{-4}{9})$.

◦ Konkavnost, konveksnost, prevojne tačke funkcije: $y'' = \dfrac{30(x^2+3)}{(-x^2+9)^3}$.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
y''	$-$	$+$	$-$
y	$\frown$	$\smile$	$\frown$

Nema prevojnih tačaka.

◦ Asimptote funkcije:

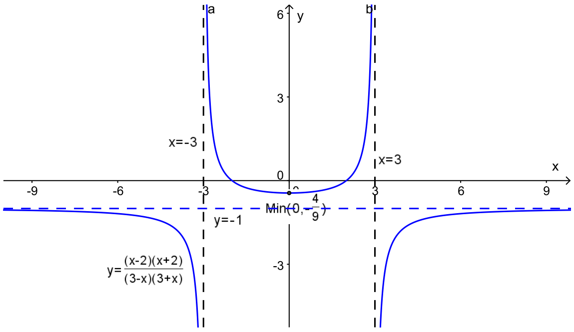
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)} = +\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to -3^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)} = -\infty,$$

pa je $x = -3$ vertikalna asimptota. Takodje,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)} = -\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to 3^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)} = +\infty,$$

pa je i $x = 3$ vertikalna asimptota. Iz

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)} = -1,$$

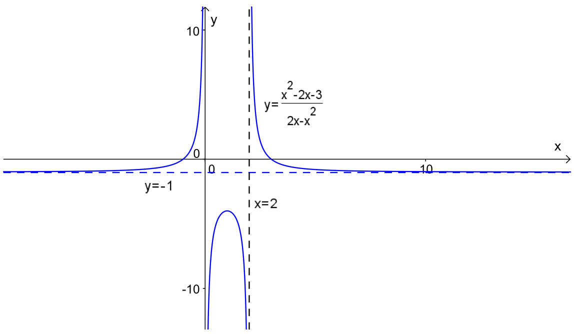


Slika 9.17. Grafik funkcije date u zadatku 25 (d)

sledi da je $y = -1$ horizontalna asimptota.

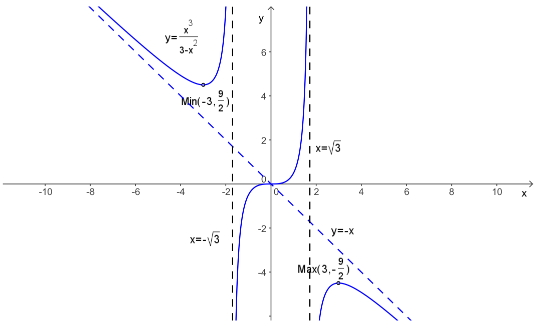
○ Grafik se nalazi na *slici 9.17*;

(e) Videti *sliku 9.18*;



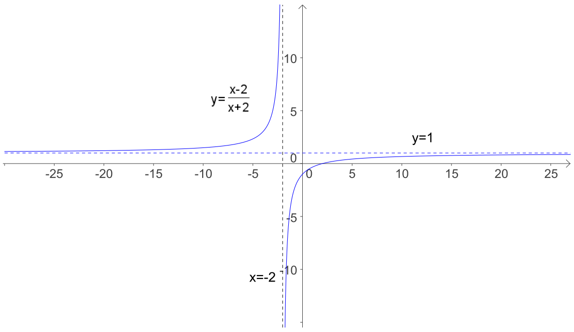
Slika 9.18. Grafik funkcije date u zadatku 25 (e)

(f) Videti *sliku 9.19*;



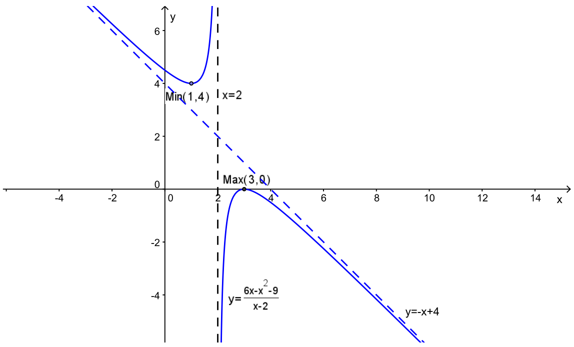
Slika 9.19. Grafik funkcije date u zadatku 25 (f)

(g) Videti *sliku 9.20*;



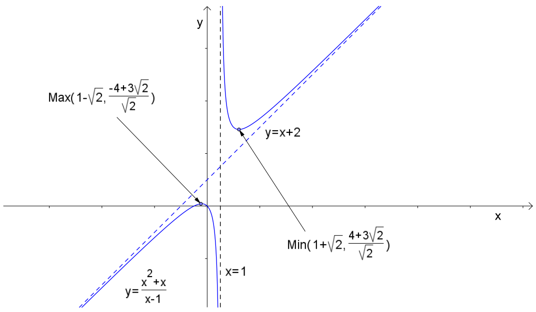
Slika 9.20. Grafik funkcije date u zadatku 25 (g)

(h) Videti *sliku 9.21*;



Slika 9.21. Grafik funkcije date u zadatku 25 (h)

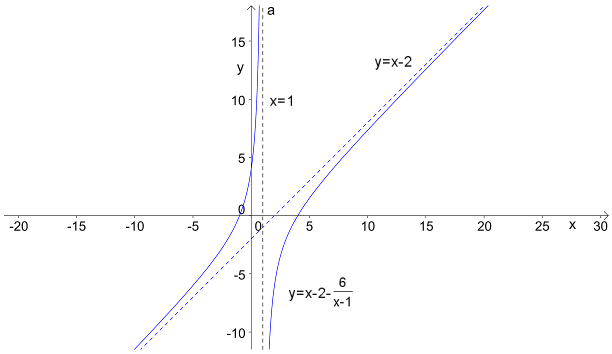
(i) Videti *sliku 9.22*;



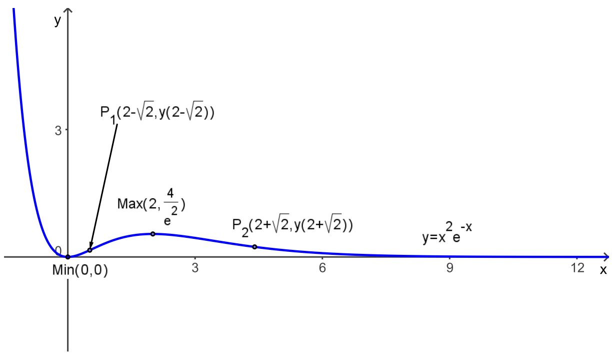
Slika 9.22. Grafik funkcije date u zadatku 25 (i)

(j) Videti *sliku 9.23*.

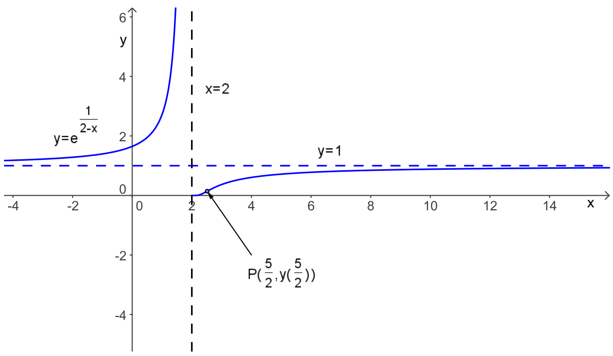
31. (a) Videti *sliku 9.24*;



Slika 9.23. Grafik funkcije date u zadatku 25 (j)



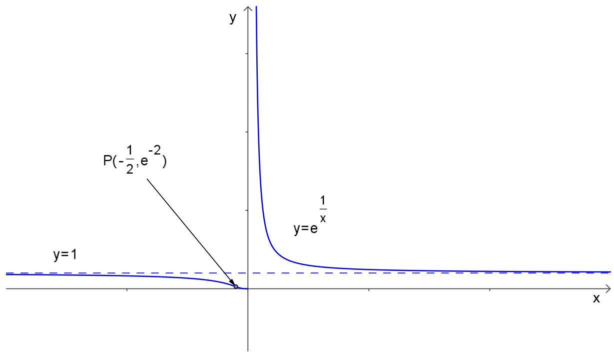
Slika 9.24. Grafik funkcije date u zadatku 26 (a)



Slika 9.25. Grafik funkcije date u zadatku 26 (b)

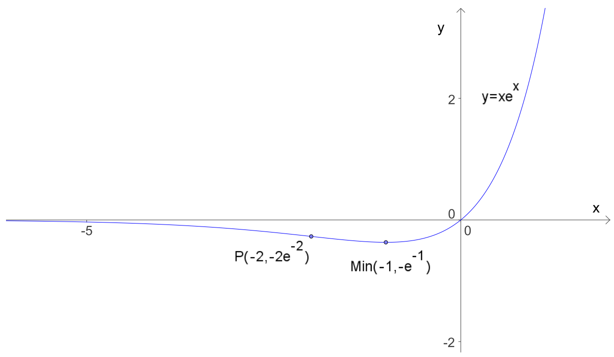
(b) Videti *sliku 9.25*;

(c) Videti *sliku 9.26*;



Slika 9.26. Grafik funkcije date u zadatku 26 (c)

(d) Videti *sliku 9.27*;



Slika 9.27. Grafik funkcije date u zadatku 26 (d)

(e) ∘ Domen funkcije: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

∘ Nule funkcije: nema.

∘ Parnost funkcije: ni parna, ni neparna.

∘ Znak funkcije:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
y	$-$	$+$

.

∘ Monotonost i ekstremi funkcije: $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, pa je moguć ekstrem u $x = 1$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
y'	$-$	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Ima minimum u tački $(1, e)$.

○ Konkavnost, konveksnost, prevojne tačke: $y'' = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\frown$	$\smile$

Nema prevojnih tačaka.

○ Asimptote funkcije:

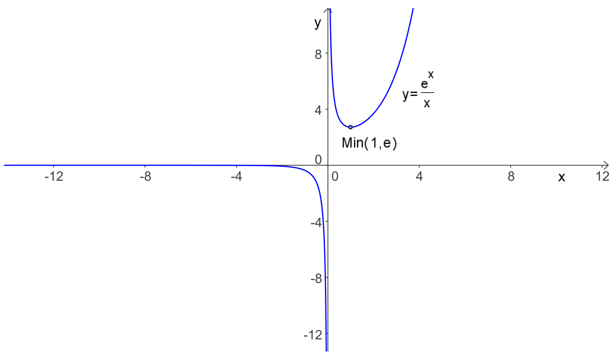
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty,$$

pa je $x = 0$ vertikalna asimptota. Iz

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \ \text{ i } \ \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0,$$

sledi da je $y = 0$ horizontalna asimptota sleva.

○ Grafik se nalazi na *slici 9.28*;



Slika 9.28. Grafik funkcije date u zadatku 26 (e)

(f) Videti *sliku 9.29*.

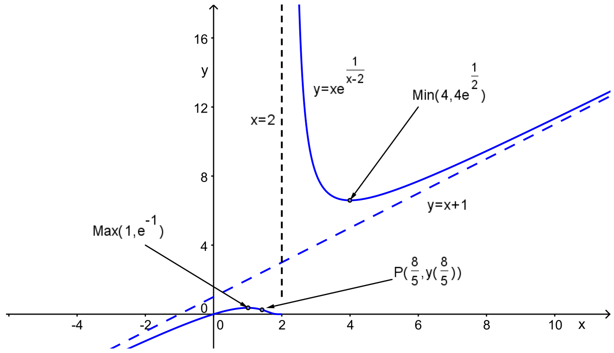
32. (a) ○ Domen funkcije: $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

○ Nule funkcije: $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$.

○ Parnost funkcije: ni parna, ni neparna.

○ Znak funkcije:

	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -1)$	$(1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
y	$+$	$-$	$-$	$+$



Slika 9.29. Grafik funkcije date u zadatku 26 (f)

○ Monotonost i ekstremi funkcije: $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$, ali $x = 0$ nije tačka mogućeg ekstrema jer ona ne pripada domenu funkcije.

	$(-\infty,-1)$	$(1,\infty)$
y'	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\nearrow$

Nema ekstrema.

○ Konkavnost, konveksnost, prevojne tačke funkcije: $y'' = \dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

	$(-\infty,-1)$	$(1,\infty)$
y''	$-$	$-$
y	$\frown$	$\frown$

Nema prevojne tačke.

○ Asimptote funkcije:

$$\lim_{x\to-1^-} \ln(x^2-1) = -\infty,$$

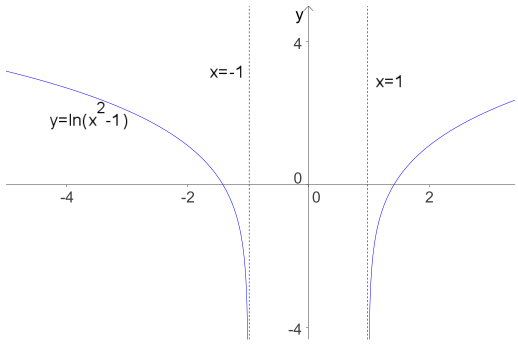
pa je $x = -1$ vertikalna asimptota sleva. Iz

$$\lim_{x\to 1^+} \ln(x^2-1) = -\infty$$

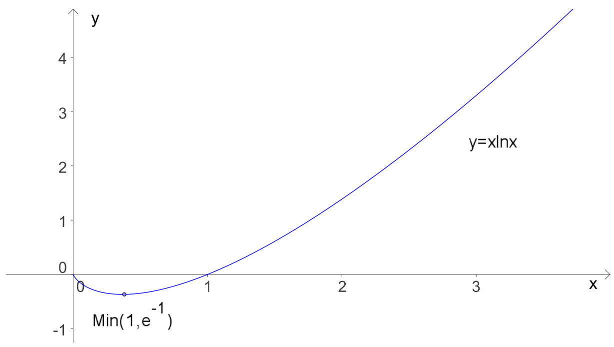
sledi da je $x = 1$ vertikalna asimptota sa desna. Funkcija nema horizontalnu, ni kosu asimptotu.

○ Grafik se nalazi na *slici 9.30*;

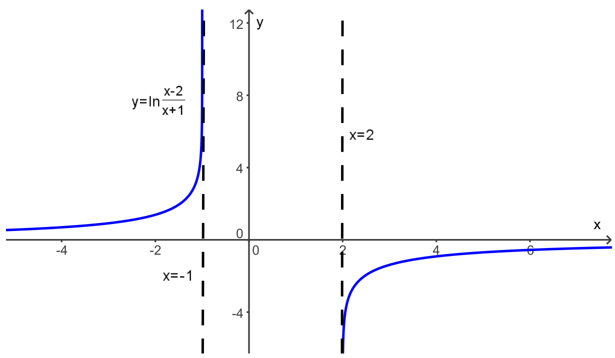
(b) Videti *sliku 9.31*;



Slika 9.30. Grafik funkcije date u zadatku 27 (a)



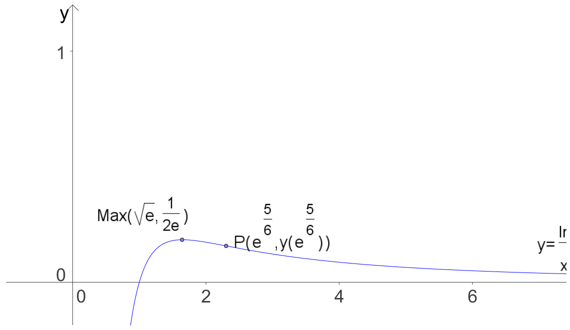
Slika 9.31. Grafik funkcije date u zadatku 27 (b)



Slika 9.32. Grafik funkcije date u zadatku 27 (c)

(c) Videti *sliku 9.32*;

(d) Videti *sliku 9.33*;



Slika 9.33. Grafik funkcije date u zadatku 27 (d)

(e) ∘ Domen funkcije: $D_f = \{x | x > 0\}$.

∘ Nule funkcije: $x = e$.

∘ Parnost funkcije: ni parna, ni neparna.

∘ Znak funkcije:

	$(0,e)$	(e,∞)
$1-\ln x$	$+$	$-$
y	$+$	$-$

.

∘ Monotonost i ekstremi funkcije: $y' = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$, pa je moguć ekstrem u $x = e^{\frac{3}{2}}$.

	$(0,e^{\frac{3}{2}})$	$(e^{\frac{3}{2}},\infty)$
$-3+2\ln x$	$-$	$+$
x^3	$+$	$+$
y'	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\nearrow$

U tački $(e^{\frac{3}{2}}, -\dfrac{1}{2e^3})$ funkcija ima minimum.

∘ Konkavnost, konveksnost, prevojne tačke funkcije: $y'' = \dfrac{11-6\ln x}{x^4}$, pa je moguć prevoj u $x = e^{\frac{11}{6}}$.

	$(0,e^{\frac{11}{6}})$	$(e^{\frac{11}{6}},\infty)$
y''	$+$	$-$
y	$\smile$	$\frown$

Prevojna tačka je $(e^{\frac{11}{6}}, -\frac{5}{6e^{\frac{11}{3}}})$.

○ Asimptote funkcije:

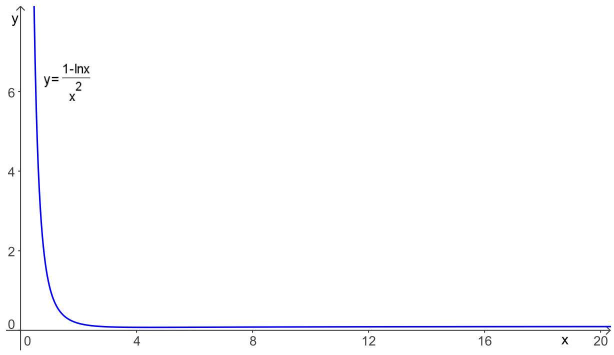
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x^2} = +\infty,$$

pa je $x = 0$ vertikalna asimptota. Iz

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\ln x}{x^2} = 0,$$

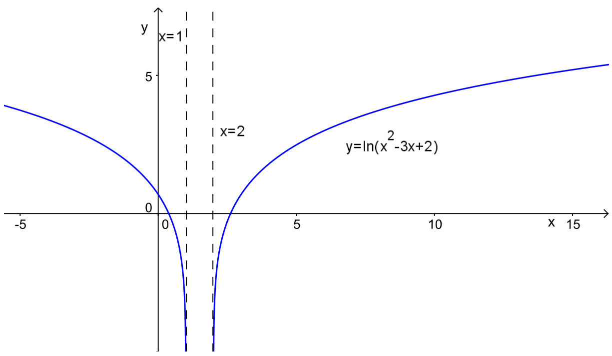
sledi da je $y = 0$ horizontalna asimptota.

○ Grafik se nalazi na *slici 9.34*;



Slika 9.34. Grafik funkcije date u zadatku 27 (e)

(f) Videti *sliku 9.35*.



Slika 9.35. Grafik funkcije date u zadatku 27 (f)

Glava 10

Neodredjeni integral

• Funkcija $F(x)$ je **primitivna funkcija** za funkciju $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, na intervalu (a,b), ako važi:

$$F^{'}(x)=f(x),\quad x\in(a,b).$$

• Skup svih primitivnih funkcija za funkciju $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, na intervalu (a,b), zovemo **neodredjen integral** funkcije $f(x)$ i označavamo ga sa:

$$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C,}$$

gde je $f(x)$ podintegralna funkcija, dx diferencijal promenljive x, a C je konstanta.
• Važi da je:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x).$$

• **Osobine neodredjenog integrala:**

(a) $\int A\,f(x)\,dx=A\int f(x)\,dx,\quad A\in\mathbb{R};$

(b) $\int \big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

$\int dx = x + C$
$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha} + C, \quad \alpha \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\|k \in \mathbb{Z}\}$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\|k \in \mathbb{Z}\}$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C,\ \|x\| < 1$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln\|x + \sqrt{1+x^2}\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln\|x + \sqrt{x^2-1}\| + C, \quad \|x\| > 1$

Tabela 10.1. Osnovni neodredjeni integrali

• **Metoda smene.** U podintegralnoj funkciji možemo primeniti smenu $t = g(x)$, pa uz jednakost $dt = g'(x)\,dx$ imamo da je

$$\boxed{\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt.}$$

• **Parcijalna integracija.** Koristimo formulu

$$\boxed{\int u(x)\,dv = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du,}$$

gde je $dv = v'(x)dx,\ du = u'(x)dx.$

• **Integracija racionalnih funkcija.** Ukoliko za podintegralnu funkciju imamo racionalnu funkciju oblika $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n < m$, tada prvo rastavimo datu funkciju na parcijalne razlomke, čime problem raščlanjujemo na više lakših integrala. Rastavljanje racionalnih funkcija na parcijalne razlomke je detaljno objašnjeno u poglavlju **Polinomi i racionalne funkcije**. U slučaju da je $n \geq m$, tada podelimo polinome $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ i primenimo navedeni postupak.

• **Integrali trigonometrijskih funkcija.** To su integrali oblika

$$\boxed{\int \sin^m x \cos^n x\, dx, \ \ m,n \in \mathbb{N}.}$$

Za njihovo rešavanje koriste se sledeći trigonometrijski identiteti:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1,} \quad \boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},} \quad \boxed{\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,}$$

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x,} \quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}} \ \text{ i } \ \boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.}$$

• **Integrali trigonometrijskih racionalnih funkcija.** Posmatramo integrale oblika

$$\boxed{\int \mathbf{R}(\sin x, \cos x)\, dx,}$$

gde je **R** oznaka razlomljene racionalne funkcije. Smenom:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

dati integral se svodi na integral racionalne funkcije.

• **Metoda Ostrogradskog.** Posmatramo integrale oblika

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx,}$$

gde je $P_n(x)$ polinom stepena $n > 1$. Ovaj tip integrala rešava se na sledeći način:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx = \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot Q_{n-1}(x) + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ proizvoljan polinom stepena $n-1$, čije koeficijente treba da odredimo, λ je nepoznata konstanta i njih izračunavamo koristeći relaciju $(\int f(x)\, dx)' = f(x)$.

• **Integrali iracionalnih funkcija.** Označimo sa **R** razlomljenu racionalnu funkciju. Integrale oblika:

$$\boxed{\int \mathbf{R}(x,\ \sqrt[n]{ax+b})\,dx,}\ \boxed{\int \mathbf{R}\Big(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,dx,}\ \boxed{\int \mathbf{R}(x,\ \sqrt[n]{ax+b},\ \sqrt[m]{ax+b})\,dx,}$$

respektivno rešavamo sledećim smenama:

$$\boxed{\sqrt[n]{ax+b}=t,}\ \boxed{\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,}\ \boxed{\sqrt[s]{ax+b}=t,}$$

gde je $s=NZS\{n,m\}$. Iz tih jednakosti izrazimo x preko t i dx izrazimo preko dt. Kada datu smenu uvrstimo u početni integral dobijemo integral racionalne funkcije po t, tj. $\int \mathbf{R}(t)dt$, koji znamo da računamo.

Primeri

1. Data je funkcija $f(x)=2x$. Odrediti njenu primitivnu funkciju $F(x)$.

   Rešenje:

   Tražena funkcija je $F(x)=x^2$, jer važi:

   $$F'(x)=(x^2)'=2x=f(x).$$

   Medjutim, primetimo da su i funkcije $F(x)=x^2+1,\ F(x)=x^2+2,\ldots$ takodje primitivne funkcije, jer i za njih važi:

   $$(x^2+1)'=2x,\quad (x^2+2)'=2x,\ldots$$

   U stvari, za svaku funkciju oblika $F(x)=x^2+C$, gde smo sa C označili proizvoljnu konstantu $C\in\mathbb{R}$, važi:

   $$F'(x)=(x^2+C)'=2x=f(x),$$

   odakle zaključujemo da je

   $$\int 2x\,dx=x^2+C.$$

   Ovo možemo uopštiti i reći da za funkciju $f(x)$ i njenu primitivnu funkciju $F(x)$ važi

   $$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C,}$$

   tj. da za jednu funkciju $f(x)$ možemo naći beskonačno mnogo primitivnih funkcija $F(x)$, koje se razlikuju do na konstantu.

2. Koristeći *tabelu 10.1.* osnovnih neodredjenih integrala i njihove osobine, rešiti sledeće integrale:

(a) $\int \left(\sin x + 4e^x - \frac{3}{x}\right) dx$; (b) $\int (3x^3 + 5x^2 - 4x + 7)\, dx$;

(c) $\int \frac{x^4 - x^3 - 8x^2 + x - 2}{x^2}\, dx$; (d) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} - \sqrt[2005]{x^{2004}}\right) dx$;

(e) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$; (f) $\int \frac{3\sin^2 x + 5}{\cos^2 x}\, dx$; (g) $\int \frac{2^{3x}}{3^{2x}}\, dx$.

Rešenje:

(a)

$$\int \left(\sin x + 4e^x - \frac{3}{x}\right) dx = \int \sin x\, dx + \int 4e^x\, dx - \int \frac{3}{x}\, dx$$

$$= \int \sin x\, dx + 4\int e^x\, dx - 3\int \frac{1}{x}\, dx = -\cos x + 4e^x - 3\ln|x| + C;$$

(b)

$$\int (3x^3 + 5x^2 - 4x + 7)\, dx = \int 3x^3\, dx + \int 5x^2\, dx - \int 4x\, dx + \int 7\, dx$$

$$= 3\int x^3 dx + 5\int x^2 dx - 4\int x\, dx + 7\int dx = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 7x + C;$$

(c)

$$\int \frac{x^4 - x^3 - 8x^2 + x - 2}{x^2}\, dx = \int x^2\, dx - \int x\, dx - 8\int dx + \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$-2\int x^{-2}\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 8x + \ln|x| + \frac{2}{x} + C;$$

(d)

$$\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} - \sqrt[2005]{x^{2004}}\right) dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx + \int x^{-\frac{4}{5}}\, dx - \int x^{\frac{2004}{2005}}\, dx$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + 5\sqrt[5]{x} - \frac{2005}{4009}\sqrt[2005]{x^{4009}} + C;$$

(e)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2}\, dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C;$$

(f)

$$\int \frac{3\sin^2 x+5}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{3(1-\cos^2 x)+5}{\cos^2 x}\,dx = 8\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - 3\int dx$$
$$= 8\,\mathrm{tg}\,x - 3x + C;$$

(g)

$$\int \frac{2^{3x}}{3^{2x}}\,dx = \int \frac{8^x}{9^x}\,dx = \int \left(\frac{8}{9}\right)^x dx = \frac{1}{\ln\frac{8}{9}}\left(\frac{8}{9}\right)^x + C.$$

3. Koristeći se metodom smene rešiti integrale:

(a) $\int \sin(5x)\,dx$; (b) $\int e^{-4x+7}\,dx$; (c) $\int \frac{3}{7x+8}\,dx$;

(d) $\int \frac{x}{x-1}\,dx$; (e) $\int \frac{6}{(5-x)^2}\,dx$; (f) $\int x\cos(3x^2+2)\,dx$;

(g) $\int (x-1)\,e^{x^2-2x+1}\,dx$; (h) $\int \frac{-x+2}{x^2-4x-7}\,dx$; (i) $\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$;

(j) $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+10}\,dx$; (k) $\int \frac{x^2+5x-3}{(x-2)^2}\,dx$; (l) $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$;

(m) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$; (n) $\int \frac{\sqrt{2\sqrt{x}+5}}{\sqrt{x}}\,dx$;

(o) $\int \sqrt{x}\sqrt{2\sqrt{x}+5}\,dx$; (p) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; (q) $\int \frac{\ln^{2005} x}{x}\,dx$;

(r) $\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,dx$; (s) $\int \frac{2^{\mathrm{tg}\,x}}{\cos^2 x}\,dx$.

Rešenje:

(a)

$$\int \sin(5x)\,dx = \left[\begin{array}{c} t=5x \\ dt=5\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{5}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{5}\cos t + C$$
$$= -\frac{1}{5}\cos(5x) + C;$$

(b)

$$\int e^{-4x+7}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=-4x+7 \\ dt=-4\,dx \end{array}\right] = -\frac{1}{4}\int e^t\,dt = -\frac{1}{4}e^t + C$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-4x+7} + C;$$

(c)

$$\int \frac{3}{7x+8}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 7x+8 \\ dt = 7\,dx \end{array}\right] = \frac{3}{7}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{3}{7}\ln|t| + C$$
$$= \frac{3}{7}\ln|7x+8| + C;$$

(d)

$$\int \frac{x}{x-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x-1 \\ x = t+1 \\ dt = dx \end{array}\right] = \int \frac{t+1}{t}\,dt = \int dt + \int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= t + \ln|t| + C = x - 1 + \ln|x-1| + C;$$

(e)

$$\int \frac{6}{(5-x)^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 5-x \\ dt = -dx \end{array}\right] = -6\int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{6}{t} + C = \frac{6}{5-x} + C;$$

(f)

$$\int x\cos(3x^2+2)\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 3x^2+2 \\ dt = 6x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{6}\int \cos t\,dt$$
$$= \frac{1}{6}\sin(3x^2+2) + C;$$

(g)

$$\int (x-1)\,e^{x^2-2x+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2-2x+1 \\ dt = 2(x-1)\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int e^t\,dt$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2-2x+1} + C;$$

(h)

$$\int \frac{-x+2}{x^2-4x-7}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x^2-4x-7 \\ dt = -2(-x+2)\,dx \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\ln|x^2-4x-7| + C;$$

(i)

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}\,dx$$
$$= \left[\begin{array}{c} t = \frac{x+1}{3} \\ dt = \frac{1}{3}dx \end{array}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C;$$

(j)

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = x^2+2x+10 \\ dt = (2x+2)\,dx \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \text{primer} \\ \text{pod (i)} \end{array}\right]$$

$$= \ln(x^2+2x+10) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C;$$

(k)

$$\int \frac{x^2+5x-3}{(x-2)^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dt = dx \end{array}\right] = \int \frac{(t+2)^2+5(t+2)-3}{t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t^2+9t+11}{t^2}\,dt = \int dt + 9\int \frac{1}{t}\,dt + 11\int \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$= t + 9\ln|t| - 11\,\frac{1}{t} + C = x-2+9\ln|x-2| - \frac{11}{x-2} + C;$$

(l)

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = e^x-1 \\ dt = e^x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|e^x-1| + C;$$

(m)

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x + \cos x \\ dt = -(\sin x - \cos x)\,dx \end{array}\right] = -\int \frac{1}{t}\,dt$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + C;$$

(n)

$$\int \frac{\sqrt{2\sqrt{x}+5}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 2\sqrt{x}+5 \\ dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \end{array}\right] = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\,t\sqrt{t} + C$$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{x}+5)\sqrt{2\sqrt{x}+5} + C;$$

(o)

$$\int \sqrt{x}\sqrt{2\sqrt{x}+5}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 2\sqrt{x}+5 \\ \sqrt{x} = \frac{t-5}{2} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \end{array}\right] = \int \sqrt{t}\left(\frac{t-5}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int (t^{\frac{5}{2}} - 10t^{\frac{3}{2}} + 25t^{\frac{1}{2}})\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - 4t^{\frac{5}{2}} + \frac{50}{3}t^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{14}(2\sqrt{x}+5)^{\frac{7}{2}} - (2\sqrt{x}+5)^{\frac{5}{2}} + \frac{25}{6}(2\sqrt{x}+5)^{\frac{3}{2}} + C;$$

(p)

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array}\right] = \int t\,dt = \frac{1}{2}\ln^2|x| + C;$$

(q)

$$\int \frac{\ln^{2005} x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array}\right] = \int t^{2005}\,dt = \frac{1}{2006}\ln^{2006}|x| + C;$$

(r)

$$\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln(\ln x) \\ dt = \frac{1}{x\ln x}\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln\Big|\ln\big|\ln|x|\big|\Big| + C;$$

(s)

$$\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{array}\right] = \int 2^t\,dt = \frac{1}{\ln 2}2^t + C = \frac{1}{\ln 2}2^{\operatorname{tg} x} + C.$$

4. Koristeći formulu za parcijalnu integraciju izračunati sledeće integrale:

(a) $\int x\sin x\,dx$; (b) $\int (2x-5)\cos x\,dx$; (c) $\int x^2 e^x\,dx$;

(d) $\int (3x^2-5x+6)\,e^{4x-1}\,dx$; (e) $\int x\ln x\,dx$; (f) $\int x^{2005}\ln x\,dx$;

(g) $\int \ln x\,dx$; (h) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; (i) $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$;

(j) $\int e^x\sin x\,dx$; (k) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; (l) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Rešenje:

(a)

$$\int x\sin x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x,\ du=dx \\ dv=\sin x\,dx,\ v=-\cos x \end{array}\right] = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C;$$

(b)

$$\int (2x-5)\cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=2x-5,\ du=2\,dx \\ dv=\cos x\,dx,\ v=\sin x \end{array}\right]$$

$$= (2x-5)\sin x - 2\int \sin x\,dx = (2x-5)\sin x + 2\cos x + C;$$

(c)

$$\int x^2 e^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x^2,\ du=2x\,dx \\ dv=e^x\,dx,\ v=e^x \end{array}\right]$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=x,\ du=dx \\ dv=e^x\,dx,\ v=e^x \end{array}\right]$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x\,dx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C;$$

(d)

$$\int (3x^2-5x+6)e^{4x-1}\,dx = \left[\begin{array}{c} u=3x^2-5x+6,\ du=(6x-5)\,dx \\ dv=e^{4x-1}\,dx,\ v=\frac{1}{4}e^{4x-1} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{4}(3x^2-5x+6)e^{4x-1} - \frac{1}{4}\int (6x-5)e^{4x-1}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} u=6x-5,\ du=6\,dx \\ dv=e^{4x-1}\,dx,\ v=\frac{1}{4}e^{4x-1} \end{array}\right] = \frac{1}{4}(3x^2-5x+6)e^{4x-1}$$

$$-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}(6x-5)e^{4x-1} - \frac{3}{2}\int e^{4x-1}\,dx\right] = \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{61}{32}\right)e^{4x-1} + C;$$

(e)

$$\int x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx,\ v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C;$$

(f)

$$\int x^{2005}\ln x dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x,\, du=\frac{1}{x}dx \\ dv = x^{2005}dx, v=\frac{x^{2006}}{2006} \end{array}\right] = \frac{x^{2006}}{2006}\ln x - \int \frac{x^{2006}}{2006}\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^{2006}}{2006}\ln x - \frac{1}{2006}\int x^{2005}\,dx = \frac{x^{2006}}{2006}\ln x - \frac{x^{2006}}{(2006)^2} + C;$$

(g)

$$\int \ln x\, dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx,\ v=x \end{array}\right] = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C;$$

(h)

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = \left[\begin{array}{c} u=\operatorname{arctg} x, du=\frac{1}{1+x^2}dx \\ dv=dx, v=x \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} t=1+x^2 \\ dt=2xdx \end{array}\right] = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C;$$

(i)

$$\int x\operatorname{arctg} x\, dx = \left[\begin{array}{c} u=\operatorname{arctg} x,\ du=\frac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv=x\,dx,\ v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right]$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C;$$

(j)

$$\int e^x \sin x\, dx = \left[\begin{array}{c} u=e^x,\ du=e^x\,dx \\ dv=\sin x\,dx,\ v=-\cos x \end{array}\right]$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\, dx = \left[\begin{array}{c} u=e^x,\ du=e^x\,dx \\ dv=\cos x\,dx,\ v=\sin x \end{array}\right]$$

$$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx.$$

Ako uporedimo početni integral i poslednji izraz, imamo da je

$$\int e^x\sin x\,dx = (\sin x - \cos x)e^x - \int e^x\sin x\,dx,$$

što ako integral s desne strane prebacimo na levu postaje

$$2\int e^x \sin x\,dx = (\sin x - \cos x)\,e^x,$$

odakle dobijamo da je konačno rešenje:

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\,e^x + C;$$

(k) Uradimo prvo metodom smene naredni integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Izračunati integral upotrebićemo u narednom radu:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int x\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \begin{bmatrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{bmatrix} \\ &= \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Uporedimo li integral koji želimo da rešimo sa poslednjim izrazom imamo da je:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C;$$

(l) Imamo da je

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ &= \begin{bmatrix} u = x,\ du = dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,\ v = \sqrt{1+x^2} \end{bmatrix} \\ &= \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Uporedimo li početni i krajnji izraz imamo da je

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln|x + \sqrt{1+x^2}| + x\sqrt{1+x^2}\Big) + C.$$

5. Rešiti integrale racionalnih funkcija:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2-3x-10}\,dx$; (b) $\displaystyle\int \frac{12x^2+22x-30}{x^3+4x^2-15x-18}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{5x^2-13x+2}{x^3-2x^2-4x+8}\,dx$; (d) $\displaystyle\int \frac{9x+19}{x^3+9x^2+28x+40}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int \frac{2x^5+4x^4-10x^3-4x^2-5x+5}{x^6+x^5+5x^4+5x^3}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int \frac{x^5+4x^4+9x^3+8x^2+3x-1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx$; (g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

Rešenje:

(a) Da bi rešili postavljeni integral prvo ćemo podintegralnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\frac{4x+1}{x^2-3x-10} = \frac{4x+1}{(x-5)(x+2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-5B}{(x-5)(x+2)}.$$

Iz jednakosti početnog i krajnjeg razlomka i jednakosti imenioca u ovim razlomcima, sledi da su i brojioci jednaki, tj. da je

$$4x+1 = (A+B)x+2A-5B.$$

Jednakost navedenih polinoma dovodi nas do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} A+B &= 4 \\ 2A-5B &= 1, \end{aligned}$$

čija su rešenja $A=3$ i $B=1$. Sada lako možemo rešiti početni integral:

$$\int \frac{4x+1}{x^2-3x-10}\,dx = 3\int \frac{1}{x-5}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = x-5 \\ dt = dx \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} s = x+2 \\ ds = dx \end{array}\right] = 3\ln|x-5| + \ln|x+2| + C;$$

(b) Sredićemo prvo podintegralnu funkciju tako što ćemo faktorisati polinom u imeniocu, a zatim datu racionalnu funkciju rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\frac{12x^2+22x-30}{x^3+4x^2-15x-18} = \frac{12x^2+22x-30}{(x+1)(x-3)(x+6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+6}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(3A+7B-2C)x-18A+6B-3C}{(x+1)(x-3)(x+6)}.$$

Rešimo li sistem jednačina:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 12 \\ 3A+7B-2C &= 22 \\ -18A+6B-3C &= -30 \end{aligned}$$

dolazimo do rešenja $A=2,\ B=4$ i $C=6$ i imamo integral:

$$\int \frac{12x^2+22x-30}{x^3+4x^2-15x-18}\,dx = 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$+6\int \frac{1}{x+6}\,dx = 2\ln|x+1|+4\ln|x-3|+6\ln|x+6|+C;$$

(c) Kao i u prethodnim zadacima imamo:

$$\frac{5x^2-13x+2}{x^3-2x^2-4x+8} = \frac{5x^2-13x+2}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(-4A+C)x+4A-4B+2C}{(x+2)(x-2)^2}.$$

Traženi koeficijenti su $A=3,\ B=2$ i $C=-1$, pa imamo integral

$$\int \frac{5x^2-13x+2}{x^3-2x^2-4x+8}\,dx = 3\int \frac{1}{x+2}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \left[\begin{array}{c} t=x+2 \\ dt=dx \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} s=x-2 \\ ds=dx \end{array}\right] = 3\ln|x+2|+2\ln|x-2| - \int \frac{1}{s^2}\,ds$$

$$= 3\ln|x+2|+2\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C;$$

(d) Podintegralna funkcija je

$$\frac{9x+19}{x^3+9x^2+28x+40} = \frac{9x+19}{(x+5)(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x+5}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+8},$$

gde je $A=-2,\ B=2$ i $C=7$, te je

$$\int \frac{9x+19}{x^3+9x^2+28x+40}\,dx = -2\int \frac{1}{x+5}\,dx + \int \frac{2x+7}{x^2+4x+8}\,dx$$

$$= \begin{bmatrix} t = x+5 \\ dt = dx \end{bmatrix} = -2\ln|x+5| + \int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx$$

$$+3\int \frac{1}{(x+2)^2+4}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2+4x+8 \\ dt = (2x+4)\,dx \end{bmatrix} = -2\ln|x+5|$$

$$+\ln(x^2+4x+8) + \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}\,dx = \begin{bmatrix} t = \frac{x+2}{2} \\ dt = \frac{1}{2}dx \end{bmatrix}$$

$$= -2\ln|x+5| + \ln(x^2+4x+8) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C;$$

(e) Iz

$$\frac{2x^5+4x^4-10x^3-4x^2-5x+5}{x^6+x^5+5x^4+5x^3} = \frac{2x^5+4x^4-10x^3-4x^2-5x+5}{x^3\,(x+1)\,(x^2+5)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+5}$$

dolazimo do sistema jednačina:

$$\begin{aligned} A+D+E &= 2 \\ A+B+E+F &= 4 \\ 5A+B+C+5D+F &= -10 \\ 5A+5B+C &= -4 \\ 5B+5C &= -5 \\ 5C &= 5, \end{aligned}$$

sa rešenjima: $A = 1, B = -2, C = 1, D = -3, E = 4$ i $F = 1$. Početni integral možemo rastaviti na sledeći način:

$$\int \frac{2x^5+4x^4-10x^3-4x^2-5x+5}{x^6+x^5+5x^4+5x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$+\int \frac{1}{x^3}\,dx - 3\int \frac{1}{x+1}\,dx + 4\int \frac{x}{x^2+5}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s = x^2+5 \\ ds = 2x\,dx \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m = \frac{x}{\sqrt{5}} \\ dm = \frac{1}{\sqrt{5}}dx \end{bmatrix}$$

$$= \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} - 3\ln|x+1| + 2\ln(x^2+5) + \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C;$$

(f) Kako je u podintegralnoj funkciji stepen polinoma u brojiocu veći od stepena polinoma u imeniocu, prvo ćemo podeliti date polinome:

$$\frac{x^5+4x^4+9x^3+8x^2+3x-1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1} = x+1+\frac{2x^3+x^2-x-2}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}.$$

Sada rastavljamo dobijenu racionalnu funkciju:

$$\frac{2x^3+x^2-x-2}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1} = \frac{2x^3+x^2-x-2}{(x+1)^2\,(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Traženi koeficijenti su $A=1, B=-2, C=1$ i $D=-1$, pa je:

$$\int \frac{x^5+4x^4+9x^3+8x^2+3x-1}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$-2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \begin{bmatrix} t=x+1 \\ dt=dx \\ x=t-1 \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}+x$$

$$+\int \frac{1}{t}\,dt - 2\int \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \begin{bmatrix} s=x^2+x+1 \\ ds=(2x+1)\,dx \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m=\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\ dm=\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}+x+\ln|x+1|$$

$$+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C;$$

(g)

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x^2+1} \\ dt=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt$$

$$= \int dt + \int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$$

6. Rešiti sledeće integrale trigonometrijskih funkcija:

(a) $\int \operatorname{tg} x\,dx$; (b) $\int \sin^3 x \cos x\,dx$;

(c) $\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx$; (d) $\int \sin^2 x\,dx$; (e) $\int \cos^2 x\,dx$;

(f) $\int \sin^3 x\,dx$; (g) $\int \cos^3 x\,dx$; (h) $\int \sin^4 x\,dx$;

(i) $\int \cos^4 x\,dx$; (j) $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$;

(k) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; (l) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; (m) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Rešenje:

(a)

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right] = -\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$$

(b)

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C;$$

(c)

$$\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x\,dx$$
$$= \int \cos^4 x\,(1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int (\cos^4 x - \cos^6 x)\sin x\,dx$$
$$= \left[\begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{array}\right] = -\int (t^4 - t^6)\,dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C$$
$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C;$$

(d)

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,dx - \int \frac{\cos(2x)}{2}\,dx$$
$$= \left[\begin{array}{c} t = 2x \\ dt = 2dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C;$$

(e)

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C;$$

(f)

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$$= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{bmatrix}$$

$$= -\cos x + \int t^2\,dt = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C;$$

(g)

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\,dx - \int \sin^2 x \cos x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

(h)

$$\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int dx$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C;$$

(i)

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C;$$

(j) *I način.*

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \int \sin^2 x\,dx - \int \sin^4 x\,dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C;$$

II način.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{4}\sin^2(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos(4x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C;$$

(k)

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int dx$$
$$= \mathrm{tg}\,x - x + C;$$

(l)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{array}\right] = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt$$
$$= \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C;$$

(m)

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array}\right] = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin(2\arcsin\frac{x}{2}) + C.$$

7. Rešiti sledeće integrale trigonometrijskih racionalnih funkcija:

(a) $\int \frac{dx}{\cos x}$; (b) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$;

(c) $\int \frac{\sin x + \cos x}{1+\cos x}\,dx$; (d) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x \sin x}\,dx$.

Rešenje:

(a) Koristeći smenu $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ dobijamo:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt.$$

Vidimo da smo početni integral datom smenom sveli na integral racionalne funkcije, pa dalje rešavamo na već poznat način:

$$\int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \frac{A}{1-t}\,dt + \int \frac{B}{1+t}\,dt.$$

Rešavajući sistem:

$$\begin{array}{rcl} A+B &=& 2 \\ A-B &=& 0 \end{array}$$

izračunavamo da je $A = B = 1$, pa je početni integral

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + C = \ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right| + C;$$

(b) Imamo da je

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = [\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t] = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{4t}{(3+t^2)(1+t^2)}\,dt = 4\Big(\int \frac{At+B}{3+t^2}\,dt + \int \frac{Ct+D}{1+t^2}\,dt\Big),$$

odakle rešavajući sistem dobijamo da je $A = -\frac{1}{2}, B = 0, C = \frac{1}{2}, D = 0,$ pa je

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = -2\int \frac{t}{3+t^2}\,dt + 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= \ln\frac{1+t^2}{3+t^2} + C = \ln\frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{3+tg^2\frac{x}{2}} + C;$$

(c) Izvršimo li poznatu smenu, imamo da je

$$\int \frac{\sin x+\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2} = -\int \frac{t^2-2t-2}{t^2+1}\,dt.$$

Polinom u brojiocu i imeniocu razlomka su istog stepena, pa nakon deljenja dobijamo:

$$-\int \frac{t^2-2t-2}{t^2+1}\,dt = -\int dt + 2\int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = -t + \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

$$+2\int \frac{dt}{1+t^2} = -t + \ln(1+t^2) + 2\ \mathrm{arctgt}\ + C$$

$$= -\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \ln(1+\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}) + x + C;$$

(d)

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x\sin x}\,dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{2t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{t^2}{4} + C = \frac{1}{2}\ln|tg\frac{x}{2}| - \frac{1}{4}\cdot tg^2\frac{x}{2} + C.$$

8. Koristeći metod Ostrogradskog izračunati sledeće integrale:

(a) $\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$; (b) $\int \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$; (c) $\int \frac{2x^2-6}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

Rešenje:

(a) U ovom primeru $P_n(x) = 3x^3 + 5$, odnosno stepen polinoma je $n = 3$, pa će $Q_{n-1}(x)$ biti proizvoljan polinom stepena $n-1 = 2$, tj. $Q_{n-1}(x) = Ax^2 + Bx + C$, gde su A, B, C koeficijenti koje treba da odredimo. Koristeći sada formulu za izračunavanje ovakvog tipa integrala početni integral ćemo prikazati u sledećem obliku :

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Diferencirajući levu i desnu stranu jednačine dobijamo:

$$(\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}dx)' = ((Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4})' + (\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}})'.$$

Koristeći formulu za izvod proizvoda i činjenicu da je izvod integrala sama podintegralna funkcija dobijamo:

$$\frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+4} + (Ax^2+Bx+C) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Sada ćemo levu i desnu stranu pomnožiti sa $\sqrt{x^2+4}$, pa dobijamo da je

$$3x^3+5 = (2Ax+B)\sqrt{x^2+4} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + \lambda.$$

Na osnovu jednakosti dva polinoma vidimo da je $A = 1$, $B = 0$, $C = -8$ i $\lambda = 5$. Kada date vrednosti uvrstimo u početnu formulu dobijamo:

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}dx = (x^2-8)\sqrt{x^2+4} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Ostaje nam da izračunamo još $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{x}{2})^2+1}}$, pa koristeći smenu $\frac{x}{2} = t, \frac{1}{2}dx = dt$ konačno dobijamo:

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}dx = (x^2-8)\sqrt{x^2+4} + 5\ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right| + C;$$

(b) Primenjujući isti postupak kao pod (a) dobijamo:

$$\int \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+2x-3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}},$$

pa tražeći izvod leve i desne strane izračunavamo da je $A = \frac{1}{2}, B = \frac{7}{2}$ i $\lambda = 4$, te je

$$\int \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = (\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})\sqrt{x^2+2x-3}+4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

Ostaje još da se izračuna:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{x+1}{2})^2-1}}.$$

Koristeći smenu $\frac{x+1}{2} = t, \frac{1}{2}dx = dt$, dobijamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left|\frac{x+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}\right|.$$

Konačno,

$$\int \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = (\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})\sqrt{x^2+2x-3}$$
$$+4\ln\left|\frac{x+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}\right|+C;$$

(c) Imamo da je

$$\int \frac{2x^2-6}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

gde je $A = 1$, $B = -3$ i $\lambda = -5$. Dakle,

$$\int \frac{2x^2-6}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = (x-3)\sqrt{x^2+2x+2}-5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$
$$= (x-3)\sqrt{x^2+2x+2}-5\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

9. Rešiti integrale iracionalnih funkcija:

(a) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$; (b) $\int \sqrt{\frac{8x+2}{2x-3}}\,dx$; (c) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx$;

(d) $\int \frac{x}{\sqrt{x}+5}\,dx$; (e) $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}+3}\,dx$; (f) $\int \frac{x^2+3x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$;

(g) $\int \frac{x^{12}+5}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$; (h) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Rešenje:

(a) Za izračunavanje ovog integrala koristi se smena $\sqrt{x+4}=t$. Iz te smene izražavamo x, tj. $x=t^2-4$ i odatle računamo $dx=2tdt$. Sada datu smenu uvrstimo u početni integral i dobijamo:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx=\int \frac{2t^2}{t^2-4}\,dt.$$

Integral koji smo dobili je integral racionalne funkcije, ali kako su stepeni polinoma u brojiocu i imeniocu jednaki prvo ćemo izvršiti deljenje. Tako dobijamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= \int \frac{2t^2}{t^2-4}\,dt=\int 2\,dt+\int \frac{8t}{(t-2)(t+2)}\,dt\\ &= 2t+\int \frac{A}{t-2}\,dt+\int \frac{B}{t+2}\,dt,\end{aligned}$$

odakle, na već poznati način, izračunavamo da je $A=2$ i $B=-2$, pa je rešenje početnog integrala:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= 2t+2\ln|t-2|-2\ln|t+2|+C\\ &= 2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C;\end{aligned}$$

(b) Koristićemo smenu $\sqrt{\dfrac{8x+2}{2x-3}}=t$, odakle je $x=\dfrac{2+3t^2}{2t^2-8}$, pa je $dx=\dfrac{-14t}{(t^2-4)^2}\,dt$. Kada datu smenu uvrstimo u integral dobijamo:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{8x+2}{2x-3}}\,dx &= -\int \frac{14t^2}{(t^2-4)^2}\,dt=\int \frac{A}{t-2}\,dt+\int \frac{B}{(t-2)^2}\,dt\\ &\quad+\int \frac{C}{t+2}\,dt+\int \frac{D}{(t+2)^2}\,dt,\end{aligned}$$

gde je $A=-\dfrac{7}{4}, B=-\dfrac{7}{2}, C=\dfrac{7}{4}$ i $D=-\dfrac{7}{2}$. Konačno,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{8x+2}{2x-3}}\,dx &= \frac{7}{4}\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|+\frac{7}{2(t-2)}+\frac{7}{2(t+2)}+C\\ &= \frac{7}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{8x+2}{2x-3}}+2}{\sqrt{\frac{8x+2}{2x-3}}-2}\right|+\frac{7}{2(\sqrt{\frac{8x+2}{2x-3}}-2)}+\frac{7}{2(\sqrt{\frac{8x+2}{2x-3}}+2)}+C;\end{aligned}$$

(c) Koristeći smenu $\sqrt{x+1}=t$, $x=t^2-1$ i $dx=2t\,dt$ dobijamo:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx=\int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}\,dt=\int \frac{A}{t-1}\,dt+\int \frac{B}{(t-1)^2}\,dt$$

$$+\int \frac{C}{t+1}\,dt+\int \frac{D}{(t+1)^2}\,dt,$$

gde je $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}$ i $D=\frac{1}{2}$, pa je

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2(t-1)}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|-\frac{1}{2(\sqrt{x+1}-1)}-\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)}+C;$$

(d) Za ovaj primer smena je $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, pa primenjujući sada već poznati postupak izračunavamo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+5}\,dx=\int \frac{2t^3}{t+5}\,dt=\int (2t^2-10t+50-\frac{250}{t+5})\,dt$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}}{3}-5x+50\sqrt{x}-250\ln|\sqrt{x}+5|+C;$$

(e)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}+3}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x+2} \\ x=t^2-2 \\ dx=2t\,dt \end{array}\right]=\int \frac{2t^3-4t}{t+3}\,dt$$

$$=\int (2t^2-6t+14-\frac{42}{t+3})\,dt=\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-3(x+2)+14\sqrt{x+2}$$

$$-42\ln|\sqrt{x+2}+3|+C;$$

(f)

$$\int \frac{x^2+3x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=\sqrt[3]{x-1} \\ x=t^3+1 \\ dx=3t^2\,dt \end{array}\right]=\int \frac{(t^3+1)^2+3(t^3+1)}{t}3t^2\,dt$$

$$=3(\frac{t^8}{8}+t^5+2t^2)+C=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x-1)^2}(x+3)^2+C;$$

(g) Sada je smena $\sqrt[12]{x}=t$ jer je $12=NZS\{3,4\}$, pa je $x=t^{12}$, $\sqrt[3]{x}=t^4$, $\sqrt[4]{x}=t^3$ i $dx=12t^{11}dt$:

$$\int \frac{x^{12}+5}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx=\int \frac{(t+5)\cdot 12t^{11}}{t^4+t^3}\,dt=12\Big(\frac{\sqrt[12]{x^9}}{9}+\frac{\sqrt[12]{x^8}}{2}-\frac{4\sqrt[12]{x^7}}{7}$$

$$+\frac{2\sqrt{x}}{3}-\frac{4\sqrt[12]{x^5}}{5}+\sqrt[3]{x}-\frac{4\sqrt[4]{x}}{3}+2\sqrt[6]{x}-4\sqrt[12]{x}+4\ln|\sqrt[12]{x}+1|\Big)+C;$$

(h)

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx=[\sqrt[6]{x}=t,\, dx=6t^5dt]=6\int \frac{t^{11}+3t^5}{t^2(t+1)}\,dt$$

$$=6\int \frac{t^9+3t^3}{t+1}\,dt=\frac{\sqrt{x^3}}{9}-\frac{\sqrt[3]{x^4}}{8}+\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{x}{6}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{4\sqrt{x}}{3}$$

$$-2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[6]{x}-4\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

Zadaci

1. $\int \frac{-3x^2+2x+5}{x}\,dx$; 2. $\int \frac{(x-2)^4}{2x^2}\,dx$; 3. $\int \frac{2x^2}{(x-2)^4}\,dx$;

4. $\int \frac{(x-1)^{2006}-(2x-2)^{2007}}{(3x-3)^{2008}}\,dx$; 5. $\int (x+5)\sin x\,dx$;

6. $\int (x^2-3x+2)\cos(4x+1)\,dx$; 7. $\int e^{2x+4}\cos(3x-2)\,dx$;

8. $\int \arcsin x\,dx$; 9. $\int x^2\arcsin(x^3-7)\,dx$; 10. $\int e^x\operatorname{arctg} e^x\,dx$;

11. $\int \frac{e^x\operatorname{arctg} e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; 12. $\int x(x^2+3)\,e^{x^2+1}\,dx$; 13. $\int 3^x\operatorname{tg} 3^x\,dx$;

14. $\int 4^x e^{2^x}\,dx$; 15. $\int \frac{\cos(\ln(\ln(\ln x)))}{x\ln x\ln(\ln x)}\,dx$; 16. $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$;

17. $\int \frac{e^{\sqrt{x}+1}\cos(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx$; 18. $\int xe^{x^2+3}\sin(x^2+4)\,dx$;

19. $\int \frac{\sin(\sqrt{x}+5)}{\sqrt{x}}\,dx$; 20. $\int \sqrt{x}\sin(\sqrt{x}+5)\,dx$; 21. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

22. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}\,dx$; 23. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+9}\,dx$; 24. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}+3}\,dx$;

25. $\int \frac{20\sqrt{x}-14}{x(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+2)}\,dx$; 26. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$; 27. $\int \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx$;

28. $\int e^x e^{e^x}\,dx$; 29. $\int e^{3x}e^{e^x}\,dx$; 30. $\int e^x\sin(e^x+2)\,dx$;

31. $\int e^{2x}\cos(e^x)\,dx$; 32. $\int e^{3x}\sin(e^x+1)\,dx$; 33. $\int \sin x\cos(\cos x)\,dx$;

34. $\int \cos x\cos^2(\sin x)\,dx$; 35. $\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$; 36. $\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$;

37. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 38. $\int (1+\sin x)^2\,dx$; 39. $\int (2+3\cos x)^3\,dx$;

40. $\int \frac{(1+4\sin^2 x)^2}{\sin^2 x}\,dx$; 41. $\int \frac{(1+4\cos^2 x)^2}{\sin^2 x}\,dx$; 42. $\int \frac{\sqrt[13]{\operatorname{tg}^{12} x}}{\cos^2 x}\,dx$;

43. $\int \sqrt{4-9x^2}\,dx$; 44. $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$; 45. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$;

46. $\int \frac{3x+3}{x^2+4x-5}\,dx$; 47. $\int \frac{x+2}{x^2+4x-5}\,dx$; 48. $\int \frac{3x+3}{x^2+4x+5}\,dx$;

49. $\int \frac{x^3+6x^2+15x+17}{x^2+5x+6}\,dx$; 50. $\int \frac{x^2-6x+2}{x^3-x^2-14x+24}\,dx$;

51. $\int \frac{x+7}{x^2+4x+4}\,dx$; 52. $\int \frac{2x^2-x}{x^3-x^2-5x-3}\,dx$;

53. $\int \frac{6x^2+5x+9}{x^3+5x^2+7x-13}\,dx$; 54. $\int \frac{4x^4+2x^3+9x^2-4x-20}{x^5+3x^4-10x^3}\,dx$;

Rešenja

1. $-\frac{3}{2}x^2+2x+5\ln|x|+C$;

2. $\frac{1}{6}x^3-2x^2+12x-16\ln|x|-\frac{8}{x}+C$;

3. $-\frac{2}{x-2}-\frac{4}{(x-2)^2}-\frac{8}{3(x-2)^3}+C$;

4. $-\frac{1}{3^{2008}(x-1)}-\frac{2^{2007}}{3^{2008}}\ln|x-1|+C$;

5. $\sin x-(x+5)\cos x+C$;

6. $\dfrac{1}{4}(x^2-3x+2)\sin(4x+1)+\dfrac{1}{16}(2x-3)\cos(4x+1)-\dfrac{1}{32}\sin(4x+1)+C$;

7. $\dfrac{1}{13}e^{2x+4}\big(3\sin(3x-2)+2\cos(3x-2)\big)+C$;

8. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

9. $\dfrac{1}{3}(x^3-7)\arcsin(x^3-7)+\dfrac{1}{3}\sqrt{1-(x^3-7)^2}+C$;

10. $e^x\operatorname{arctg}e^x-\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$;

11. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 e^x+C$;

12. $\dfrac{1}{2}(x^2+2)e^{x^2+1}+C$;

13. $-\dfrac{1}{\ln 3}\ln|\cos 3^x|+C$;

14. $\dfrac{1}{\ln 2}e^{2^x}(2^x-1)+C$;

15. $\sin(\ln|\ln|\ln x||)+C$;

16. $\ln|\ln x|+C$;

17. . $e^{\sqrt{x}+1}\big(\sin(\sqrt{x}+1)+\cos(\sqrt{x}+1)\big)+C$;

18. $\dfrac{1}{4}e^{x^2+3}\big(\sin(x^2+4)-\cos(x^2+4)\big)+C$;

19. $-2\cos(\sqrt{x}+5)+C$;

20. $-2x\cos(\sqrt{x}+5)+4\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}+5)+4\cos(\sqrt{x}+5)+C$;

21. $2(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-\sqrt{x})+C$;

22. $\ln^2\sqrt{x}+C$;

23. $2\sqrt{x}-6\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{3}+C$;

24. $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+22\sqrt{x}-66\ln(\sqrt{x}+3)+C$;

25. $2\ln\left|\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-7)^2}{(\sqrt{x}+2)^3}\right|+C;$

26. $\mathrm{arctg}\,(e^x)+C;$

27. $-\dfrac{1}{2}\ln(e^x+1)+\dfrac{1}{2}\ln|e^x-1|+C;$

28. $e^{e^x}+C;$

29. $e^{e^x}(e^{2x}-2e^x+2)+C;$

30. $-\cos(e^x+2)+C;$

31. $e^x\sin(e^x)+\cos(e^x)+C;$

32. $(-e^{2x}+2)\cos(e^x+1)+2e^x\sin(e^x+1)+C;$

33. $-\sin(\cos x)+C;$

34. $\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{4}\sin(2\sin x)+C;$

35. $2\,\mathrm{tg}\,x-x+C;$

36. . $\mathrm{tg}\,x+\dfrac{1}{\cos x}+C;$

37. $-\mathrm{ctg}\,x-x+C;$

38. $\dfrac{3}{2}x-2\cos x-\dfrac{1}{4}\sin(2x)+C;$

39. $35x+63\sin x+\dfrac{27}{2}\sin(2x)-9\sin^3 x+C;$

40. $-\mathrm{ctg}\,x+16x-4\sin(2x)+C;$

41. $-25\mathrm{ctg}\,x-32x-4\sin(2x)+C;$

42. $\dfrac{13}{25}\sqrt[13]{\mathrm{tg}^{25}x}+C;$

43. $\dfrac{2}{3}\arcsin\left(\dfrac{3x}{2}\right)+\dfrac{1}{3}\sin\left(2\arcsin\left(\dfrac{3x}{2}\right)\right)+C;$

44. $-\dfrac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2}+C;$

45. $\dfrac{1}{8}\arcsin x-\dfrac{1}{32}\sin(4\arcsin x)+C;$

46. $\ln|x-1|(x+5)^2+C$;

47. $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x-5|+C$;

48. $\frac{3}{2}\ln|x^2+4x+5|-3\,\mathrm{arctg}(x+2)+C$;

49. $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x+2|^3|x+3|+C$;

50. $\ln\left|\frac{(x-2)(x+4)}{(x-3)}\right|+C$;

51. $\ln|x+2|-\frac{5}{x+2}+C$;

52. $\frac{15}{16}\ln|x-3|+\frac{17}{16}\ln|x+1|+\frac{3}{4}\frac{1}{x+1}+C$;

53. $\ln|x-1|+\frac{5}{2}\ln(x^2+6x+13)-\frac{11}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right)+C$;

54. $-\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{99}{35}\ln|x+5|+\frac{11}{7}\ln|x-2|+C$;

Glava 11

Odredjeni integral

• Odredjeni integral funkcije $f(x)$, u granicama $x = a$ do $x = b$, označava se sa

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx.}$$

Vrednosti a i b zovemo **donja**, odnosno **gornja granica** odredjenog integrala, a funkciju f **podintegralna funkcija** odredjenog integrala.
• Neka je f integrabilna funkcija na intervalu $[a,b]$ i neka $c \in [a,b]$. Tada važe sledeće osobine:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0,$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx,$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$
4. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx.$

• **Osnovna teorema integralnog računa.** Neka je f neprekidna funkcija nad intervalom $[a,b]$, a G njena primitivna funkcija, odnosno $G'(x) = f(x)$ ili $\int f(x)\, dx = G(x) + C$, za sve $x \in [a,b]$. Tada važi Njutn-Lajbnicova formula:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = G(x)|_a^b = G(b) - G(a).}$$

• **Smena promenjivih.** Kod izračunavanja odredjenog integrala metodom smene, granice možemo ubaciti tek pošto rešimo neodredjen integral. Pored toga, smena se može izvršiti na sledeći način:

neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje, a $\phi : [c,d] \to [a,b]$ monotona funkcija koja ima neprekidan prvi izvod. Tada posle smene $x = \phi(t)$ dobijamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi^{'}(t)\,dt,$$

gde je $a = \phi(c)$ i $b = \phi(d)$.

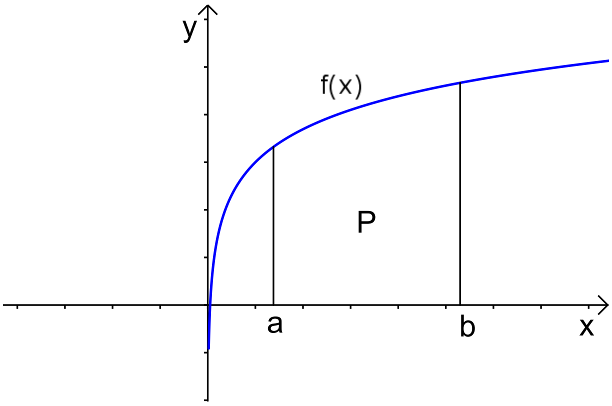
• **Parcijalna integracija.** Pri rešavanju odredjenog integrala možemo koristiti i parcijalnu integraciju. Ako su u i v diferencijabilne funkcije na intervalu $[a,b]$, tada važi formula

$$\int_a^b u(x)\,dv = u(x)\,v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,du.$$

Primena odredjenog integrala

• Neka je funkcija $f(x)$ pozitivna na intervalu $[a,b]$. Površina figure koja je od gore ograničena funkcijom $f(x)$, od dole $x-$ osom od tačke $x = a$ do tačke $x = b$, a sa strane pravama $x = a$ i $x = b$ (*slika 11.1*), računa se pomoću odredjenog integrala na sledeći način:

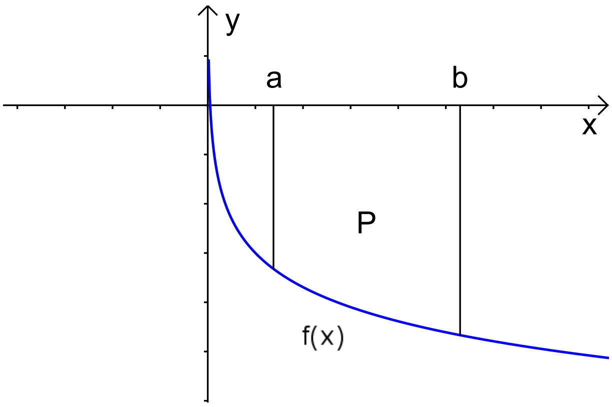
$$\boxed{P = \int_a^b f(x)\,dx.}$$



Slika 11.1. Površina ispod krive

• Ako je grafik funkcije $y = f(x)$ ispod $x-$ ose, od $x = a$ do $x = b$ (videti *sliku 11.2*), tada je površina figure:

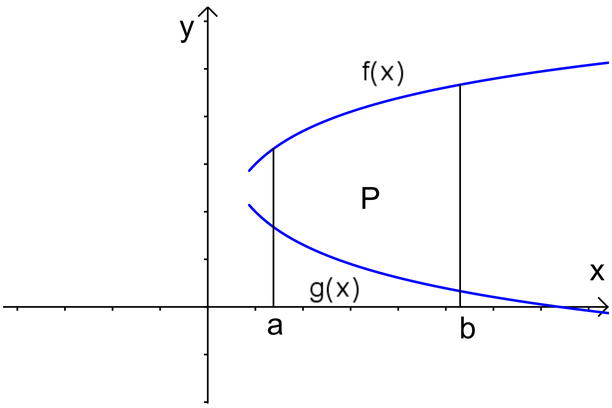
$$\boxed{P = -\int_a^b f(x)\,dx.}$$



Slika 11.2. Površina lika $f(x) < 0,\ x \in [a,b]$

• Ukoliko figura, čiju površinu računamo, nije od dole ograničena $x-$ osom nego funkcijom g na intervalu $[a,b]$, odnosno $g(x) \le f(x)$, za svako $x \in [a,b]$, kao što je slučaj na *slici 11.3*, tada je površina

$$\boxed{P = P_1 - P_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.}$$



Slika 11.3. Površina ravnog lika

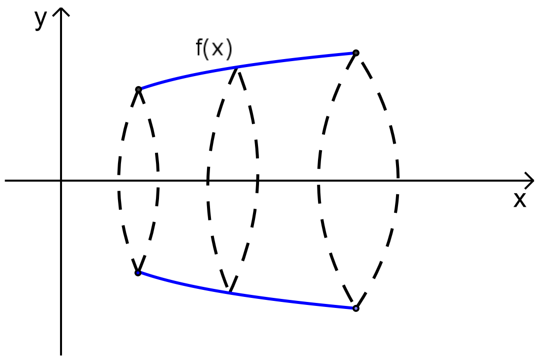
• Površina figure koja je od dole ograničena $x-$ osom, od gore na intervalu $x \in (a,c)$ grafikom funkcije $y = f(x)$, a na intervalu $x \in (c,b)$ grafikom funkcije $y =$

$g(x)$ je

$$\boxed{P = P_1 + P_2 = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx.}$$

• **Zapreminu** tela koje nastaje rotiranjem krive $y = f(x)$ oko $x-$ ose na intervalu $[a,b]$ (*slika 11.4*), izračunavamo na sledeći način:

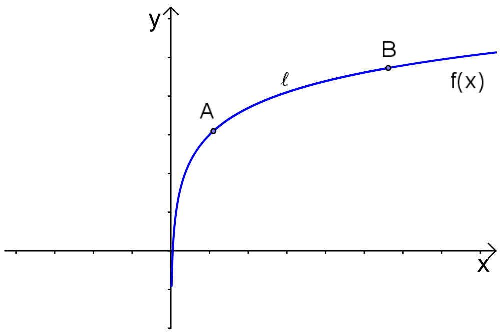
$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx.}$$



Slika 11.4. Zapremina koja nastaje rotiranjem krive

• **Dužina luka** (l) krive $f(x)$ od tačke $A(a, f(a))$ do tačke $B(b, f(b))$, prikazanog na *slici 11.5*, računa se uz pomoć odredjenog integrala

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.}$$



Slika 11.5. Dužina luka krive

• **Površinu** tela koje nastaje rotiranjem krive $y = f(x)$ oko $x-$ ose na intervalu $[a,b]$ izračunavamo pomoću odredjenog integrala:

$$\boxed{P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.}$$

Primeri

1. Odrediti vrednosti sledećih odredjenih integrala:

   (a) $\int_{-1}^{2}(x^3+x-1)\,dx$; (b) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+2)\,dx$; (c) $\int_{\ln 5}^{5}(e^x-5)\,dx$.

   Rešenje:

   (a) $\int_{-1}^{2}(x^3+x-1)\,dx = \frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\Big|_{-1}^{2} = (4+2-2)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right) = \frac{9}{4}$;

   (b) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+2)\,dx = -\cos x+2x|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2}+\pi-(-\cos\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})$
   $= \frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}$;

   (c) $\int_{\ln 5}^{5}(e^x-5)\,dx = e^x-5x|_{\ln 5}^{5} = e^5-25-\left(e^{\ln 5}-5\ln 5\right)$
   $= e^5+5\ln 5-30.$

2. Koristeći metodu smene izračunati sledeće odredjene integrale:

   (a) $\int_0^3 \frac{1}{x+2}\,dx$; (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

   Rešenje:

   (a) *I način.* Metodom smene rešimo neodredjeni integral:
   $\int \frac{1}{x+2}\,dx = \begin{bmatrix} t = x+2 \\ dx = dt \end{bmatrix} = \ln(x+2)+C$, a zatim u tako dobijeno rešenje ubacimo granice:
   $\int_0^3 \frac{1}{x+2}\,dx = \ln(x+2)|_0^3 = \ln 5-\ln 2.$

II način. Uvodimo smenu $t = x+2$ i odmah menjamo granice. Donja granica $x = 0$ sada postaje $t = 0+2 = 2$, dok gornja granica $x = 3$ postaje $t = 3+2 = 5$, odnosno
$\int_0^3 \frac{1}{x+2}\,dx = \int_2^5 \frac{1}{t}\,dt = \ln t|_2^5 = \ln 5 - \ln 2.$

U oba navedena načina moramo paziti da kada ubacujemo granice one odgovaraju promenljivoj koju konkretizuju;

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \\ 0 \to 1, \frac{\pi}{4} \to \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2}\,dt = \left.\frac{1}{t}\right|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1.$

3. Koristeći parcijalnu integraciju rešiti sledeće integrale:

   (a) $\int_0^{\ln 2} x e^x\,dx;$ (b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx.$

   Rešenje:

   (a) $\int_0^{\ln 2} x e^x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = e^x\,dx, v = e^x \end{bmatrix} = x e^x|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx$
   $= 2\ln 2 - e^x|_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1;$

   (b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2, du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\,dx, v = \sin x \end{bmatrix} = x^2 \sin x|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$
   $-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin x\,dx, v = -\cos x \end{bmatrix} = \frac{17\pi^2}{72} + 2x\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$
   $-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{17\pi^2}{72} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{17\pi^2}{72} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1.$

4. Koristeći odredjeni integral izračunati površine ravnih likova koji su ograničeni sa:

   (a) parabolom $y = -x^2 + 6x - 5$ i $x-$ osom;

   (b) parabolom $y = -x^2 + 6x - 5$ i pravama $x = 2, x = 4$ i $y = 0$;

   (c) parabolom $y = -x^2 + 6x - 5$ i pravama $x = 2$ i $y = 0$, tako da tačka $(3,1)$ pripada figuri;

   (d) krivom $y = \ln x$, pravom $x = e$ i $x-$ osom;

   (e) sinusoidom $y = \sin x$ i pravama $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{4}$ i $y = 0$;

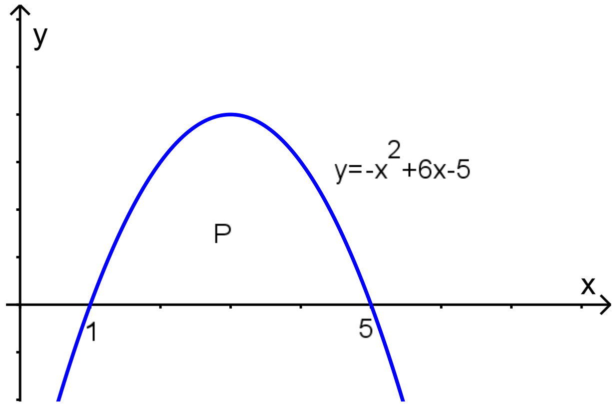
(f) krivama $y = x^3, x = 2, x = 3$ i $x-$ osom;

(g) krivama $y = e^x, x = 1, x = 4$ i $y = 0$;

(h) krivama $y = \frac{1}{x}, x = 3, x = 6$ i $y = 0$.

Rešenje:

(a) Parabola $y = -x^2 + 6x - 5$ i $x-$osa ograničavaju figuru datu na *slici 11.6.*



Slika 11.6. Površina tražena u primeru 4 (a)

Formiramo odredjeni integral čija vrednost je upravo tražena površina:
$$\int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\Big|_1^5 = \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{32}{3};$$

(b) Površinu dobijamo iz odredjenog integrala:
$$\int_2^4 (-x^2 + 6x - 5)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\Big|_2^4 = \frac{20}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3};$$

(c) Dobijamo odredjeni integral:
$$\int_2^5 (-x^2 + 6x - 5)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\Big|_2^5 = \frac{25}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 9;$$

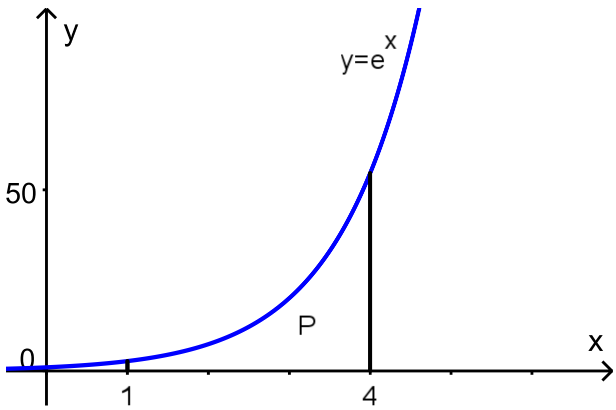
(d) Znamo da funkcija $y = \ln x$ seče $x-$ osu u tački 1, pa dobijamo oblast čiju površinu računamo koristeći parcijalnu integraciju:
$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x|_1^e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1;$$

(e) $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x\,dx = -\cos x|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\cos\frac{3\pi}{4} - \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

(f) $\int_2^3 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_2^3 = \frac{81}{4} - 4 = \frac{65}{4}$;

(g) Data eksponencijalna funkcija i prave ograničavaju figuru (*slika 11.7*) i površina je

$\int_1^4 e^x\,dx = e^x|_1^4 = e^4 - e \approx 51,88$;



Slika 11.7. Površina tražena u primeru 4 (g)

(h) $\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_3^6 = \ln 6 - \ln 3 = \ln 2 \approx 0,69.$

5. Naći površine figura ograničenih krivama:

(a) $y = x, y = -4x + 20, x = 2, y = 0$;

(b) $y = x^2 - 12x + 36, y = x^2, y = 0$;

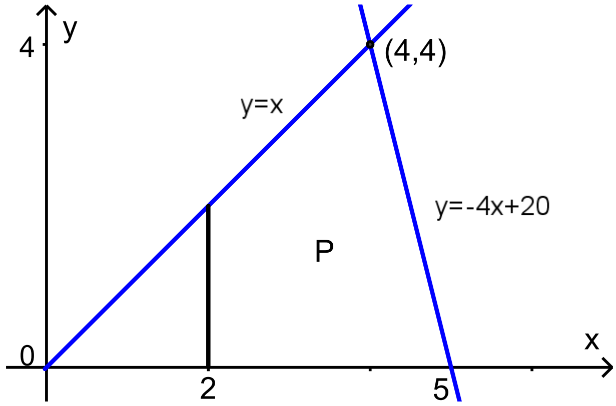
(c) $y = x^2 - 12x + 36, y = x^2, y = 4, y = 0$;

(d) $y = \cos x, y = \frac{1}{2}, y = 0$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Rešenje:

(a) Date prave ograničavaju tri oblasti, ali samo označenu oblast oivičavaju sve četiri prave (*slika 11.8*). Presečnu tačku pravih $y = x$ i $y = -4x + 20$ dobijamo iz sistema jednačina koji sačinjavaju jednačine ovih pravih i ona je $x = 4$. Površina je

$$P = P_1 + P_2 = \int_2^4 x\,dx + \int_4^5 (-4x + 20)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_2^4 -2x^2 + 20x|_4^5 = 8;$$



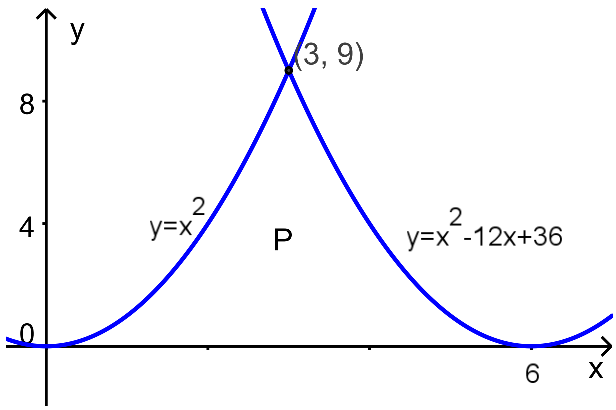
Slika 11.8. Površina tražena u primeru 5 (a)

(b) Iz sistema jednačina:

$$\begin{aligned} y &= x^2-12x+36 \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

dobijamo da je $x=4$ presečna tačka datih parabola, što vidimo i na *slici 11.9.* Površina je

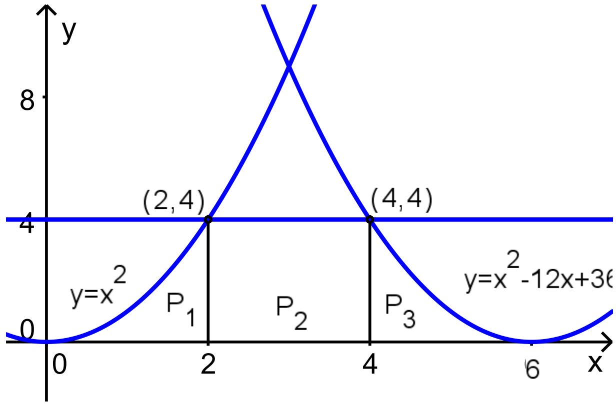
$$P = P_1+P_2 = \int_0^3 x^2\,dx + \int_3^6 (x^2-12x+36)\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + +\frac{x^3}{3} - 6x^2+36x\Big|_3^6 = 18;$$



Slika 11.9. Površina tražena u primeru 5 (b)

(c) Posmatramo oblast prakazanu na *slici 11.10.* Tačke $x=2$ i $x=4$ su dobijene iz preseka prave $y=4$ i parabola $y=x^2$, odnosno $y=x^2-12x+36$ i površina je

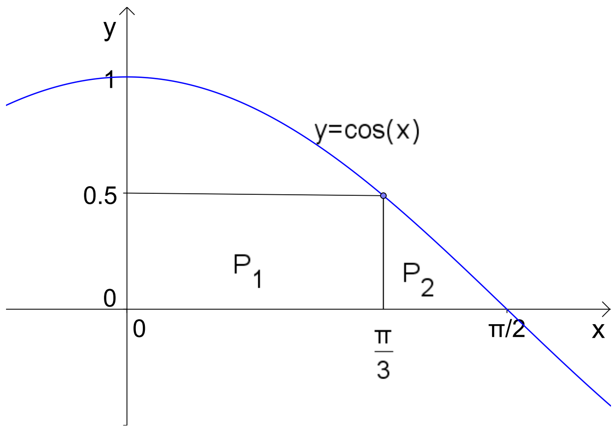
$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^4 4\,dx + \int_4^6 (x^2 - 12x + 36)\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 + 4x|_2^4 + \frac{x^3}{3} - 6x^2 + 36x\bigg|_4^6 = \frac{40}{3};$$



Slika 11.10. Površina tražena u primeru 5 (c)

(d) Tražena oblast je data na *slici 11.11*, gde je granica izmedju oblasti P_1 i P_2 dobijena iz jednačine $\cos x = \frac{1}{2}$, koja ima beskonačno mnogo rešenja oblika $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, od kojih samo $x = \frac{\pi}{3}$ pripada intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Površina je

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{1}{2}x\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + \sin x|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



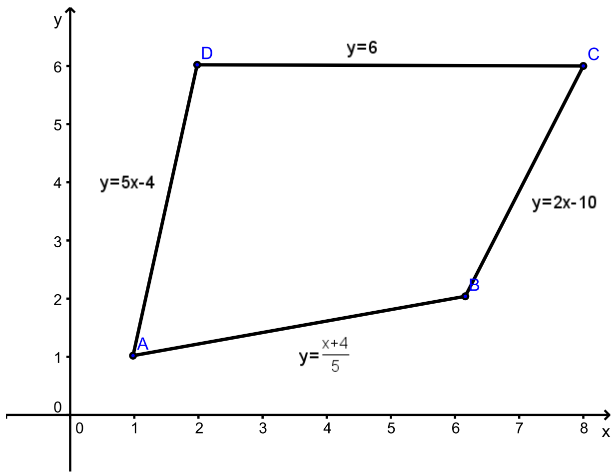
Slika 11.11. Površina tražena u primeru 5 (d)

6. Odrediti površinu:

   (a) četvorougla $ABCD$, ako je $A(1,1), B(6,2), C(8,6)$ i $D(2,6)$;
   (b) oblasti ograničene krivama $y = -x^2 + 5x, y = 5x, y = -5x + 25$;
   (c) figure koju oivičavaju krive $y = e^x, y = 2^x, y = 2$ i $y = 8$;
   (d) oblasti ograničene krivama $y = e^{3x}, y = e^{2x}, y = e^3$ i $y = e^2$;
   (e) figure koja je ograničena krivama $y = \operatorname{tg} x, x = 0, y = \sqrt{3}$ i $y = 1$, za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Rešenje:

(a) Traženi četvorougao je dat na *slici 11.12*.



Slika 11.12. Površina tražena u primeru 6 (a)

Jednačine prava koje sadrže stranice četvorougla $ABCD$ su:

$$p_{AB} : y = \frac{x+4}{5},\ p_{BC} : y = 2x - 10,\ p_{CD} : y = 6,\ p_{DA} : y = 5x - 4.$$

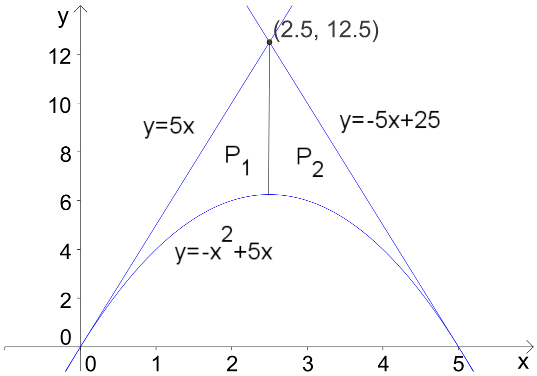
Formiramo odredjene integrale koji nas dovode do površine:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \int_1^2 (5x-4)dx - \int_1^2 \frac{x+4}{5} dx + \int_2^6 6dx - \int_2^6 \frac{x+4}{5} dx + \int_6^8 6\,dx - \int_6^8 (2x-10)\,dx = \int_1^2 (5x-4)\,dx - \int_1^6 \frac{x+4}{5}\,dx + \int_2^8 6\,dx - \int_6^8 (2x-10)\,dx = \frac{5}{2}x^2 - 4x\bigg|_1^2 - \frac{x^2}{10} - \frac{4}{5}x\bigg|_1^6 + 6x|_2^8 - x^2 + 10x|_6^8 = 24;$$

(b) Date prave su tangente parabole $y=-x^2+5x$ u tačkama $(0,0)$, odnosno $(5,0)$ (*slika 11.13*). Kako se prave seku u tački $x=\frac{5}{2}$, imamo integrale:

$$P=P_1+P_2=\int_0^{\frac{5}{2}} 5x\,dx-\int_0^{\frac{5}{2}}(-x^2+5x)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^{5}(-5x+25)\,dx$$

$$-\int_{\frac{5}{2}}^{5}(-x^2+5x)\,dx=\frac{5}{2}x^2\Big|_0^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}x^2+25x\Big|_{\frac{5}{2}}^{5}+\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2\Big|_0^{5}=\frac{125}{12};$$

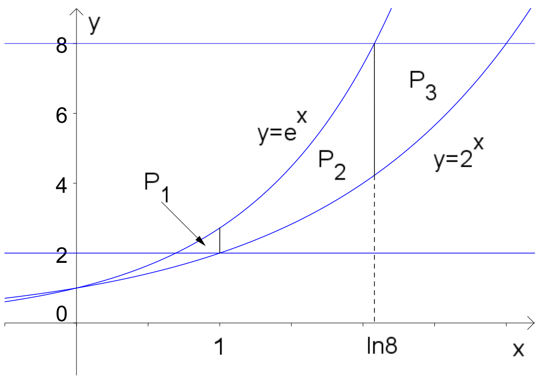


Slika 11.13. Površina tražena u primeru 6 (b)

(c) $$P=P_1+P_2+P_3=\int_{\ln 2}^{1} e^x\,dx-\int_{\ln 2}^{1} 2\,dx+\int_{1}^{\ln 8} e^x\,dx-\int_{1}^{\ln 8} 2^x\,dx$$

$$+\int_{\ln 8}^{3} 8\,dx-\int_{\ln 8}^{3} 2^x\,dx=e^x\Big|_{\ln 2}^{\ln 8}-\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_1^3-2x\Big|_{\ln 2}^{1}+8x\Big|_{\ln 8}^{3}$$

$$=28-\frac{6}{\ln 2}+2\ln 2-8\ln 8\approx 4.1$$ (*slika 11.14*);

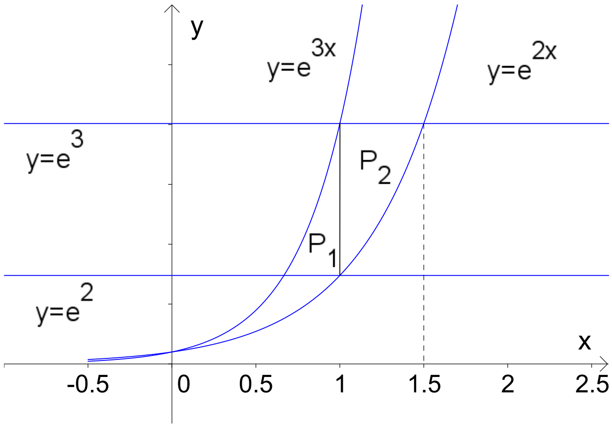


Slika 11.14. Površina tražena u primeru 6 (c)

(d) Za razliku od prethodnog zadatka, $x-$ koordinate tačaka B i D sada su jednake (*slika 11.15*), pa oblast delimo na dva dela i površina je:

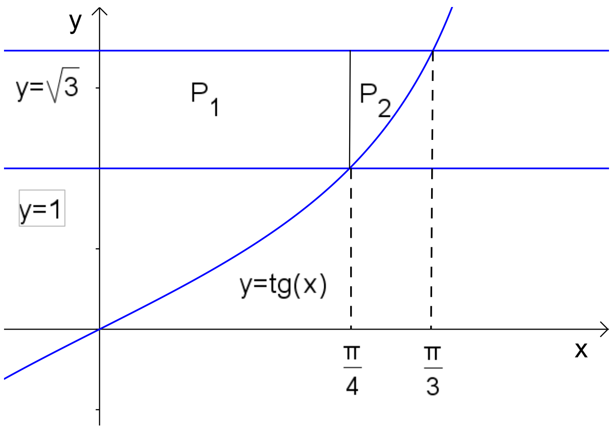
$$P = P_1 + P_2 = \int_{\frac{2}{3}}^{1} e^{3x}\,dx - \int_{\frac{2}{3}}^{1} e^2\,dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} e^3\,dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} - e^2x\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} + e^3x\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{6}e^2 \approx 5.5;$$



Slika 11.15. Površina tražena u primeru 6 (d)

(e) Trigonometrijske jednačine $\operatorname{tg} x = 1$ i $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ daju nam granice za integraciju $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{\pi}{3}$. Kako $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dolazimo do oblasti koja je označena na *slici 11.16.*



Slika 11.16. Površina tražena u primeru 6 (e)

Površina je:

$$P = P_1 + P_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{3}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$$

$$= \sqrt{3}x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \ln t\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.65.$$

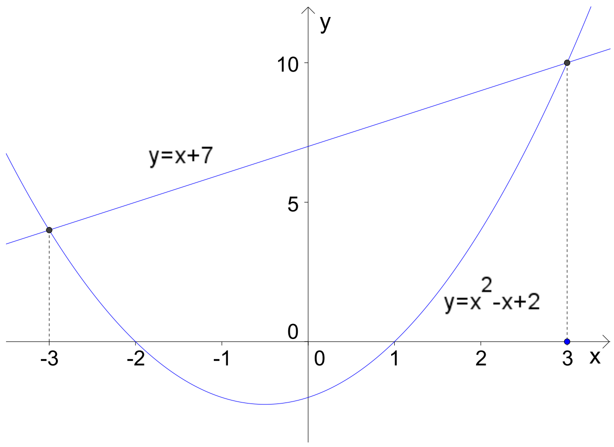
7. Odrediti površine figura ograničenih krivama:

   (a) $y = x^2 + x - 2$ i $y = x + 7$;
   (b) $y = -x^2 + 9$ i $y = x^2 - 10x + 9$;
   (c) $y = x^2 - 4, y = -x^2 + 9$ i $y = 5$ i sadrži koordinatni početak;
   (d) $y = \frac{1}{x}, x = -1, x = -3$ i $y = 0$.

   Rešenje:

   (a) Tražena oblast je prikazana na *slici 11.17.* Izdelimo li je na četiri dela dobijamo površinu:

$$P = \int_{-3}^{-2} (x+7)dx - \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2)dx + \int_{-2}^{1} (x+7)dx + \int_{1}^{3} (x+7)dx$$
$$- \int_{1}^{3} (x^2 + x - 2)\,dx - \int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2)\,dx = \int_{-3}^{3} (x+7)\,dx$$
$$- \int_{-3}^{3} (x^2 + x - 2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 7x\Big|_{-3}^{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-3}^{3} = 36;$$



Slika 11.17. Površina tražena u primeru 7 (a)

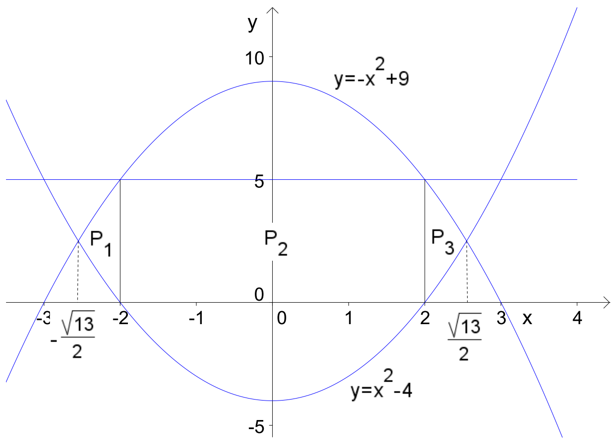
   (b) Presečne tačke ovih parabola su $(0,9)$ i $(5,-16)$, pa imamo oblast čija površina je

$$P=\int_0^5(-x^2+9)\,dx-\int_0^5(x^2-10x+9)\,dx=-\frac{2x^3}{3}+5x^2\Big|_0^5=\frac{125}{3};$$

(c) Figura sadrži koordinatni početak, što se vidi na *slici 11.18.* Presečne tačke datih parabola su $x=\pm\sqrt{\frac{13}{2}}$, a površina je

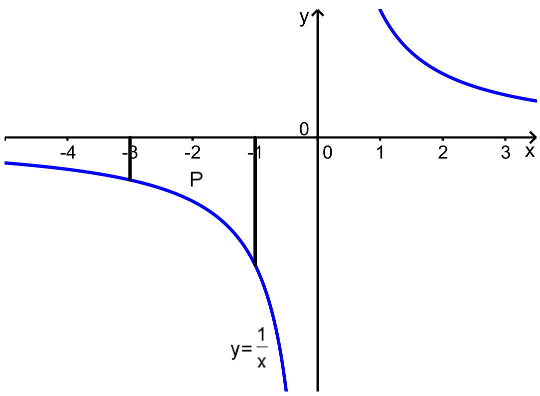
$$P=2\int_2^{\sqrt{\frac{13}{2}}}(-x^2+9)\,dx+\int_{-2}^{2}5\,dx-\int_{-\sqrt{\frac{13}{2}}}^{\sqrt{\frac{13}{2}}}(x^2-4)\,dx$$

$$=-\frac{2x^3}{3}+18x\Big|_2^{\sqrt{\frac{13}{2}}}+5x|_{-2}^{2}-\frac{x^3}{3}+4x\Big|_{-\sqrt{\frac{13}{2}}}^{\sqrt{\frac{13}{2}}}=-\frac{32}{3}+\frac{52}{3}\sqrt{\frac{13}{2}};$$



Slika 11.18. Površina tražena u primeru 7 (c)

(d) Posmatramo deo krive $y=\frac{1}{x}$ u III kvadrantu (*slika 11.19*).



Slika 11.19. Površina tražena u primeru 7 (d)

Pri izradi integrala pazimo na apsolutnu vrednost i imamo da je

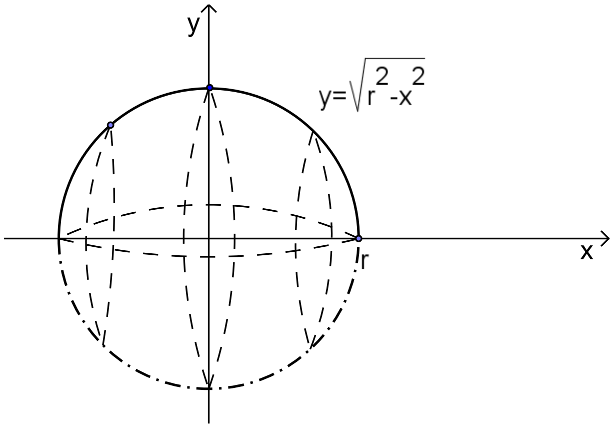
$$P = -\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln|x||_{-3}^{-1} = -(\ln|-1| - \ln|-3|) = \ln 3.$$

8. Izračunati zapreminu lopte poluprečnika *r*.

   Rešenje:

   Loptu dobijamo tako što polukružnicu, čija je jednačina $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, rotiramo oko $x-$ ose (*slika 11.20*). Zapremina tako dobijene lopte je:

$$V = \boxed{\pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx} = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^{r} \right) = \boxed{\frac{4r^3\pi}{3}.}$$



Slika 11.20. Zapremina tražena u primeru 8

9. Odrediti zapremine tela koja su nastala obrtanjem oko $x-$ ose:

   (a) krive $y = e^x$ na intervalu $[\ln 2, \ln 7]$;
   (b) figure koju ograničavaju krive $y = x^2, y = -x + 2$ i $y = 0$ i koja sadrži tačku $A(1, \frac{1}{2})$;
   (c) zatvorene oblasti koju obrazuju krive $y = x^2 + 4, x = -1, x = 1$ i $y = \frac{x+5}{2}$;
   (d) krive $y = \ln x$ na intervalu $[1, 5]$;
   (e) krive $y = \operatorname{ctg} x$ na intervalu $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

   Rešenje:

   (a) $V = \pi \int_{\ln 2}^{\ln 7} e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{2x}\Big|_{\ln 2}^{\ln 7} = \frac{45\pi}{2};$

(b) Zapreminu dobijamo sabiranjem zapremina V_1 i V_2 :

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_0^1 (x^2)^2\,dx + \pi \int_1^2 (-x+2)^2\,dx$$
$$= \pi\Big(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\Big|_1^2 \Big) = \frac{8\pi}{15};$$

(c) Traženu zapreminu dobijamo oduzimanjem zapremina koje obrazuju parabola $y = x^2 + 4$ i prava $y = \dfrac{x+5}{2}$ rotiranjem oko $x-$ ose na intervalu $[-1,1]$:

$$V = \pi \int_{-1}^1 (x^2+4)^2\,dx - \pi \int_{-1}^1 \Big(\frac{x+5}{2}\Big)^2\,dx$$
$$= \pi\Big(\frac{x^5}{5} + \frac{8x^3}{3} + 16x - \frac{x^3}{12} - \frac{5x^2}{4} - \frac{25x}{4}\Big|_{-1}^1 \Big) = \frac{376\pi}{15};$$

(d) $V = \pi \displaystyle\int_1^5 \ln^2 x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln^2 x,\ du = \frac{2\ln x}{x}\,dx \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right]$

$= \pi\Big(x\ln^2 x\Big|_1^5 - 2\displaystyle\int_1^5 \ln x\,dx \Big) = \pi(5\ln^2 5 - 10\ln 5 + 8);$

(e) Zapremina tako dobijenog tela je:

$V = \pi \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \pi(-\mathrm{ctg}\ x - x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{4\pi - \pi^2}{4}.$

10. Odrediti dužinu luka krive:

(a) $y = x$ na intervalu $[0,5]$;

(b) $y = x^2$ na intervalu $[0,1]$;

(c) $y = \ln x$ na intervalu $[1,3]$.

Rešenje:

(a) Traženu dužinu lako možemo izračunati koristeći se Pitagorinom teoremom i dobijamo da je $l = 5\sqrt{2}$. Nadjimo dužinu luka i pomoću odredjenog integrala. Dakle,

$l = \displaystyle\int_0^5 \sqrt{1 + \big((x)'\big)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x\Big|_0^5 = 5\sqrt{2};$

(b) Podsetimo se da smo ranije dobili da je

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big(\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+x\sqrt{1+x^2}\big).$$

Sada možemo odrediti zadatu dužinu luka

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+\big((x^2)'\big)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\begin{bmatrix} t=2x \\ dt=2\,dx \\ 0\to 0,\ 1\to 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{4}\Big(\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+t\sqrt{1+t^2}\Big|_0^2\Big)$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{1}{2}\sqrt{5};$$

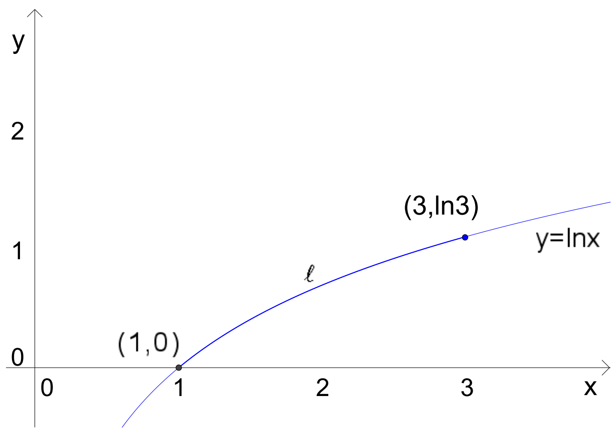
(c) Iskoristimo odranije poznat integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\Big|$$

i nadjimo dužinu luka (videti *sliku 11.21*)

$$l=\int_1^3\sqrt{1+\big((\ln x)'\big)^2}\,dx=\int_1^3\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\sqrt{x^2+1}\Big|_1^3$$

$$+\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\Big|\Big|_1^3=\sqrt{10}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{(\sqrt{10}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{2}-1)}\Big).$$



Slika 11.21. Površina tražena u primeru 10 (c)

11. Izračunati obim kružnice poluprečnika r.

Rešenje:

Uzećemo centralnu kružnicu poluprečnika r čija jednačina je $x^2+y^2=r^2$ i naći dužinu luka ove krive u prvom kvadrantu (četvrtina obima). Imamo da je obim:

$$O=4l=4\int_0^r \sqrt{1+\left((\sqrt{r^2-x^2})'\right)^2}\,dx=4\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}\,dx$$

$$=\left[\begin{array}{c} t=\frac{x}{r} \\ dt=\frac{1}{r}dx \\ 0\to 0,\ r\to 1 \end{array}\right]=4r\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=4r\arcsin t|_0^1=2r\pi.$$

12. Izračunati površinu lopte poluprečnika $r=2$.

Rešenje:

Rotirajući gornju polovinu kružnice $y=\sqrt{4-x^2}$ oko $x-$ ose dobijamo loptu čiju površinu izračunavamo koristeći formulu:

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=4\pi x|_{-2}^2=16\pi.$$

13. Parabola $y=x^2$ se rotira oko $x-$ ose od $x=1$ do $x=3$. Izračunati površinu obrtnog tela.

Rešenje:

$$P=2\pi\int_1^3 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\pi\int_1^3 \frac{4x^4+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx.$$

Prvo ćemo rešiti $\int \frac{4x^4+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$, pa ćemo kasnije uvrstiti granice. Dobijeni integral može da se reši primenom metoda Ostrogradskog, pa je

$$\int \frac{4x^4+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{1+4x^2}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}},$$

gde je $A=\frac{1}{4}, B=0, C=\frac{1}{16}, D=-\frac{1}{16}$ i $\lambda=-\frac{1}{16}$. Dakle,

$$\int \frac{4x^4+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx=\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\right)\sqrt{1+4x^2}-\frac{1}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2+1}}.$$

Nakon smene $2x=t$, $2dx=dt$ dobijamo da je

$$\int \frac{4x^4+x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\right)\sqrt{1+4x^2}-\frac{1}{32}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|,$$

pa nakon uvrštavanja granica izračunavamo

$$P = 2\pi\int_1^3 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{16}x-\frac{1}{16}\right)\sqrt{1+4x^2}\Big|_1^3$$

$$-\frac{1}{32}\ln\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|\Big|_1^3 = 2\pi\left(\frac{53}{8}\sqrt{37}-\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{32}\ln\left|\frac{6+\sqrt{37}}{2+\sqrt{5}}\right|\right).$$

14. Odrediti površinu tela koje nastaje prilikom rotacije krive $y=\cos x$ od $x=0$ do $x=\dfrac{\pi}{2}$ oko $x-$ ose.

Rešenje:

$$P = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx.$$

Koristeći smenu $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$ i menjajući granice integracije, dobijamo da je

$$P = 2\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt = 2\pi\int_0^1\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt.$$

Poslednji integral rešavamo metodom Ostrogradskog:

$$\int\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = (At+B)\sqrt{t^2+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$= \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+1}|.$$

Sada je

$$P = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx = 2\pi\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\Big|_0^1\right) = \pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

Zadaci

1. Izračunati sledeće odredjene integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(2x^3-3x^2+4x-2)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x+\sin(2x))\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^3\frac{3x+8}{(x+2)(x+3)}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_1^3 x2^x\,dx$; (e) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

2. Odrediti površine oblasti koje su ograničene krivama:

   (a) $y = -x^2 + 4x + 5$ i $y = x + 5$;
   (b) $y = x^2 - 5x + 4, y = \frac{3}{2}x + 4, y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$ i tačka $A(3,2)$ pripada traženoj oblasti;
   (c) Trougao čija su temena $A(1,3), B(4,1)$ i $C(6,5)$;
   (d) Četvorougao sa temenima $A(-1,-2), B(3,-2), C(4,0)$ i $D(1,2)$;
   (e) $y = x^2 - x - 6, y = 6, y = \frac{3}{2}x + 3$ i tačka $A(0,0)$ pripada traženoj oblasti;
   (f) $y = x^2 - 5x + 8$ i $y = -x^2 + 5x$;
   (g) $y = x^2 - 4x + 3$ sa tangentama u tačkama $(0, y_1)$ i $(4, y_2)$;
   (h) $y = x$ i $y = x^3$;
   (i) $y = x^2, y = \frac{1}{8}x^2$ i $y = \frac{1}{x}$;
   (j) $y = e^x, y = 4^x$ i $y = 4$;
   (k) $y = 2^x, y = 4^x, y = 2$ i $y = 4$;
   (l) $y = e^x, y = 3^x, y = 3$ i $y = 9$;
   (m) $y = e^{2x}, y = 5^x, y = e^2$ i $y = 10$;
   (n) $y = e^x, y = e^{-x}$ i $y = e^2$;
   (o) $y = e^x, y = \ln x, y = 0, x = -2$ i $x = 2$;
   (p) $y = \ln x$ sa tangentama u tačkama $x_1 = 1$ i $x_2 = e^3$;
   (q) $y = \sin x, y = -\frac{1}{2}, y = 0$ i $x = \frac{3\pi}{2}$, za $x \in [0, 2\pi]$;
   (r) $y = \cos x$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, za $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$;
   (s) $y = \sin x$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = 0$, za $x \in [0, 2\pi]$;
   (t) $y = \operatorname{tg} x, y = -x$ i $y = 1$, za $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

3. Odrediti zapremine tela koja nastaju obrtanjem oko $x-$ ose zatvorenih oblasti ograničenih krivama:

   (a) $y = x^2 - 2x + 2$ i $y = x + 2$;
   (b) $y = x^2 + 3, y = 2x + 6, y = -7x + 21$ i $y = 0$;
   (c) $y = x^3$ i $y = x^2$;

(d) $x^2+y^2=4, x=1$ i $y=0$ (tačka $A(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ pripada oblasti);

(e) $y=\frac{1}{x}$, $x=4$ i $y=5$;

(f) $y=\sin x$ i $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, za $x\in[0,2\pi]$;

(g) $y=\operatorname{tg} x$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=1$ i $y=0$, za $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

4. Odrediti dužinu luka krive:

   (a) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x$ na intervalu $[1,e]$;

   (b) Odrediti dužinu luka krive $y=\sqrt{x^3}$ od $x=0$ do $x=5$.

5. Naći dužinu luka koji nastaje presekom krivih $y^3=x^2$ i $y=\sqrt{2-x^2}$.

6. Naći dužinu luka parabole $y=4-x^2$ izmedju presečnih tačaka sa $x-$ osom.

7. Izračunati dužinu astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

8. Izračunati dužinu luka krive:

   (a) $y=2\sqrt{x}$ od $x=0$ do $x=4$;

   (b) $y=\ln x$ od $x=\sqrt{3}$ do $x=\sqrt{8}$;

   (c) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ izmedju tačaka sa apscisama $x=-1$ i $x=1$;

   (d) $y=\ln(1-x^2)$ od koordinatnog početka do tačke A na datoj krivoj sa apscisom 0.5;

   (e) $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ izmedju njenih nula.

9. Odrediti površinu površi koja nastaje rotacijom luka krive $y=\sin x$ oko $x-$ ose na intervalu $[-\pi,0]$.

10. Izračunati površinu površi nastale rotacijom luka krive $y=\cos x$ oko $x-$ ose na intervalu $[0,\frac{\pi}{4}]$.

11. Odrediti površinu površi koja nastaje rotacijom astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ oko $y-$ ose.

12. Izračunati površinu površi nastale rotacijom luka krive $y = \frac{1}{3}x^3$ oko $x-$ ose od $x = -2$ do $x = 2$.

13. Izračunati površinu površi nastale rotacijom luka krive $y^2 = 4 + x$ oko $x-$ ose, koji odseca prava $x = 2$.

14. Izračunati površinu površi koja nastaje rotacijom krive $4x^2 + y^2 = 4$ oko $y-$ ose.

15. Odrediti površinu površi koja nastaje rotacijom krive $y = x^3$ oko $x-$ ose od $x = -\frac{2}{3}$ do $x = \frac{2}{3}$.

16. Parabola $y^2 = 4ax$ se rotira oko $x-$ ose od vrha do tačke sa apscisom $x = 3a$. Naći površinu tako nastalog tela.

17. Luk kružnice $x^2 + (y-b)^2 = r^2$ se rotira oko $y-$ ose od $y = y_1$ do $y = y_2$. Odrediti površinu tako nastalog tela.

Rešenja

1. Vrednosti odredjenih integrala su:

   (a) -28; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}$; (c) $\ln\frac{25}{2}$; (d) $\frac{22}{\ln 2} - \frac{6}{\ln^2 2}$; (e) $\frac{\pi}{4}$.

2. Tražene površine su:

   (a) $P = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 5)\,dx - \int_0^3 (x+5)\,dx = \frac{9}{2}$;

   (b) $P = \int_0^2 \big(\frac{3}{2}x + 4\big)\,dx + \int_2^6 \big(\frac{3}{4}x + \frac{11}{2}\big)\,dx - \int_0^6 (x^2 - 5x + 4)\,dx = 39$;

   (c) $P = \int_1^6 \big(\frac{2}{5}x + \frac{13}{5}\big)\,dx - \int_1^4 \big(-\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}\big)\,dx - \int_4^6 (2x-7)\,dx = 8$;

   (d) $P = \int_{-1}^1 2x\,dx + \int_{-1}^1 2\,dx + \int_1^3 \big(-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}\big)\,dx + \int_1^3 2\,dx$
   $+ \int_3^4 \big(-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}\big)\,dx - \int_3^4 (2x-8)\,dx = 12$;

(e) $P=\int_{-2}^{0}\big(\frac{3}{2}x+3\big)\,dx-\int_{-2}^{0}(x^2-x-6)\,dx+\int_{0}^{2}\big(\frac{3}{2}x+3\big)\,dx$
$-\int_{0}^{2}(x^2-x-6)\,dx+\int_{2}^{4}6\,dx-\int_{2}^{4}(x^2-x-6)\,dx=42;$

(f) $P=\int_{1}^{4}(-x^2+5x)\,dx-\int_{1}^{4}(x^2-5x+8)\,dx=9;$

(g) $P=\int_{1}^{3}(x^2-4x+3)\,dx-\int_{1}^{2}(-4x+3)\,dx-\int_{2}^{3}(4x-13)\,dx=\frac{14}{3};$

(h) $P=2\Big[\int_{0}^{1}x\,dx-\int_{0}^{1}x^3\,dx\Big]=\frac{1}{2};$

(i) $P=\int_{0}^{1}x^2\,dx-\int_{0}^{1}\frac{1}{8}x^2\,dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{x}\,dx-\int_{1}^{2}\frac{1}{8}x^2\,dx=\ln 2;$

(j) $P=\int_{0}^{1}4^x\,dx-\int_{0}^{\ln 4}e^x\,dx+\int_{1}^{\ln 4}4\,dx=\frac{3}{\ln 4}+4\ln 4-7;$

(k) $P=\int_{\frac{1}{2}}^{1}4^x\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{1}2\,dx+\int_{1}^{2}4\,dx-\int_{1}^{2}2^x\,dx=3-\frac{1}{\ln 2};$

(l) $P=\int_{1}^{\ln 3}3^x\,dx-\int_{1}^{\ln 3}3\,dx+\int_{\ln 3}^{2}3^x\,dx-\int_{\ln 3}^{2}e^x\,dx+\int_{2}^{\ln 9}9\,dx$
$-\int_{2}^{\ln 9}e^x\,dx=\frac{6}{\ln 3}+15\ln 3-21;$

(m) $P=\int_{1}^{\frac{1}{2}\ln 10}e^{2x}\,dx-\int_{1}^{\frac{1}{2}\ln 10}e^2\,dx+\int_{\frac{1}{2}\ln 10}^{\frac{2}{\ln 5}}10\,dx-\int_{\frac{1}{2}\ln 10}^{\frac{2}{\ln 5}}e^2\,dx$
$+\int_{\frac{2}{\ln 5}}^{\frac{\ln 10}{\ln 5}}10\,dx-\int_{\frac{2}{\ln 5}}^{\frac{\ln 10}{\ln 5}}5^x\,dx=5+\frac{e^2}{2}+\frac{10\ln 10-10-e^2}{\ln 5}-5\ln 10;$

(n) $P=\int_{-2}^{2}e^2\,dx-\int_{-2}^{0}e^{-x}\,dx-\int_{0}^{2}e^x\,dx=2e^2+2;$

(o) $P=\int_{-2}^{2}e^x\,dx-\int_{1}^{2}\ln x\,dx=e^2-e^{-2}-\ln 4+1;$

(p) $P=\int_{1}^{\frac{3e^3}{e^3-1}}(x-1)\,dx+\int_{\frac{3e^3}{e^3-1}}^{e^3}\big(\frac{1}{e^3}x+2\big)\,dx-\int_{1}^{e^3}\ln x\,dx=\frac{e^6-11e^3+1}{2(e^3-1)};$

(q) $P=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}}\frac{1}{2}\,dx-\int_{\frac{11\pi}{6}}^{2\pi}\sin x\,dx=1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2};$

(r) $P=\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}}\cos x\,dx-\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{13\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{2}\,dx=1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6};$

(s) $P=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\,dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\big(\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\big);$

(t) $P = \int_{-1}^{0} dx + \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. Tražene zapremine su:

(a) $V = \pi\Big[\int_0^3 (x+2)^2\,dx - \int_0^3 (x^2-2x+2)^2\,dx\Big] = \frac{117}{5}\pi;$

(b) $V = \pi[\int_{-3}^{-1}(2x+6)^2 dx + \int_{-1}^{2}(x^2+3)^2 dx + \int_{2}^{3}(-7x+21)^2 dx] = \frac{393}{5}\pi;$

(c) $V = \pi\Big[\int_0^1 x^4\,dx - \int_0^1 x^6\,dx\Big] = \frac{2}{35}\pi;$

(d) $V = \pi\int_1^2 (4-x^2)\,dx = \frac{5}{3}\pi;$

(e) $V = \pi\Big[\int_{\frac{1}{5}}^{4} 5^2\,dx - \int_{\frac{1}{5}}^{4} (\frac{1}{x})^2\,dx\Big] = \frac{361}{4}\pi;$

(f) $V = \pi\Big[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\frac{\sqrt{3}}{2})^2\,dx\Big] = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{4};$

(g) $V = \pi\Big[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx\Big] = \pi.$

4. Dužina luka je:

(a) $l = \int_1^e \sqrt{1 + (\frac{x^2-1}{2x})^2}\,dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x}\,dx = \frac{e^2+1}{4};$

(b) $s = \int_0^5 \sqrt{1 + \Big(\frac{3}{2}\sqrt{x}\Big)^2}\,dx = \frac{335}{27}.$

5. U preseku datih krivih nastaju tri luka: dva po krivoj $y^3 = x^2$, i to jedan od tačke $(0,0)$ do tačke $(1,1)$, a drugi od $(0,0)$ do $(-1,1)$, i jedan po krivoj $y = \sqrt{2-x^2}$ od $(-1,1)$ do $(1,1)$. Ova dva luka po krivoj $y^3 = x^2$ su iste dužine, koja iznosi:

$$s_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + \Big(\frac{3}{2}\sqrt{y}\Big)^2}\,dy = \frac{1}{27}(13\sqrt{13}-8).$$

Dužina luka po krivoj $y = \sqrt{2-x^2}$ je:

$$s_2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \Big(\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\Big)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Dužina traženog luka je $2s_1 + s_2 = \frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8) + \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$

6. $s=2\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,dx=2\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx+8\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx=4\sqrt{17}$
$+\ln(4+\sqrt{17})$.

7. Diferenciranjem jednačine astroide dobijamo $y'=-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, pa je onda dužina astroide

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx=4\int_0^a\sqrt{\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)}\,dx=6a.$$

8. (a) $s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=\int_0^4\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{array}\right]$
$=2\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt=2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})$;

(b) $s=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x^2+1} \\ dt=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \end{array}\right]$
$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=1+\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$;

(c) $s=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}}\,dx=e-e^{-1}$;

(d) $s=\int_0^{0.5}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx=\int_0^{0.5}\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx=\ln 3-0.5$;

(e) $s=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=2\sqrt{3}$.

9. $P=2\pi\int_{-\pi}^{0}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{array}\right]=-2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt$
$=-2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

10. $P=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\pi\Big(\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$.

11. $P=4\pi\int_0^a\left(\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}\right)^3\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{3}}}\,dy=4\pi\int_0^a\left(\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}\right)^3\frac{a^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}\,dy$

$$= \left[\begin{array}{c} t = a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} \\ dt = -\frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}\, dy \end{array} \right] = -3\pi a^{\frac{1}{3}} \int_{a^{\frac{2}{3}}}^{0} t^{\frac{3}{2}}\, dt = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

12. $P = \dfrac{34\sqrt{17} - 2}{9}\pi.$

13. $P = 2\pi \displaystyle\int_{-4}^{2} \sqrt{4+x} \sqrt{1 + \frac{1}{4(4+x)}}\, dx = \pi \int_{-4}^{2} \sqrt{17+4x}\, dx = \frac{62\pi}{3}.$

14. $P = 4\pi \displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{\frac{4-y^2}{4}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4(4-y^2)}}\, dy = \pi \int_{0}^{2} \sqrt{16 - 3y^2}\, dy = 2\pi\left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right).$

15. $P = \dfrac{196}{729}\pi.$

16. $P = 2\pi \displaystyle\int_{0}^{3a} 2\sqrt{ax} \sqrt{1 + \frac{a}{x}}\, dx = \frac{56}{3}\pi a^2.$

17. $P = 2\pi \displaystyle\int_{y_1}^{y_2} \sqrt{r^2 - (y-b)^2} \sqrt{1 + \frac{(y-b)^2}{x^2}}\, dx = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} r\, dx = 2\pi r(y_2 - y_1).$

Bibliografija

[1] Adnadjević, D., Kadelburg, Z., Matematička analiza I, Nauka, Beograd 1994.

[2] Bogoslovov, V.T., Zbirka rešenih zadataka iz Matematike 3, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1990.

[3] Demidovič, B.P. i saradnici, Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete, Tehnička knjiga, Beograd 1997.

[4] Gajić, Lj., Teofanov, N., Pilipović, S., Zbirka zadataka iz Analize I, Drugi deo Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1998.

[5] Grbić, T., Likavec, S., Lukić T., Pantović, J., Sladoje, N., Teofanov, Lj., Zbirka rešenih zadataka iz Matematike I, STYLOS, Novi Sad 2004.

[6] Hadžić,O. , Takači, Dj., Matematičke metode za studente prirodnih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 2000.

[7] Miličić, P., Ušćumlić, M., Zbirka zadataka iz više matematike I, Naučna knjiga, Beograd 1988.

[8] Takači, Dj., Takači, A., Diferencijalni i integralni račun, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1997.

[9] Takači, Dj., Takači, A., Takači, A., Elementi više matematike , SYMBOL, Novi Sad 2008.