ZADACI:

1. Nepismeno dete sastavlja reči od slova:
a) A, E, I, I, O, B, M, H, J;
b) A, A, A, A, I, O, N, N, N, R, V, T.
Naći verovatnoću da će sastaviti reč:
a) BIOHEMIJA;
b) ANTANANARIVO.
2. Na skladištu ima 400 sijalica od dva proizvodjača. Od jednog 300, a od drugog 100. Standard zadovoljava 83% sijalica prvog i 63% drugog proizvodjača. Odrediti verovatnoću da se izvuče sijalica koja zadovoljava standard.

3. Bacamo dve kockice za igru istovremeno. Ako su pokazale zbir 6, koja je verovatnoća da je pala bar jedna petica?

4. U kutiji je 10 kuglica: 5 belih, 3 crvene i 2 crne. Slučajno se jedna za drugom bez vraćanja izvlače 3 kuglice. Naći verovatnoću da je prva izvučena bela, druga crvena i treča crna.

5. U bubnju za tombolu se nalazi 20 kuglica sa brojevima 1-20. Na slučajan način se izvlače tri broja, jedan za drugim, bez vračanja. Koja je verovatnoća da su sva tri broja neparna?

6. Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockicama dobiti zbir 10 ili, ako se to ne dogodi, da se na ponovljenom bacanju dobije zbir 9?

7. Slučajno se iz špila od 52 karte izvlače dve karte, jedna za drugom, bez vraćanja. Odrediti verovatnoću da će se pri drugom izvlačenju izvući dama.

8. Na odredjenom univerzitetu, 4% momaka je više od 190cm, dok je kod devojaka to 1%. Ukupan broj studenata je podeljen u odnosu 3:2 u korist devojaka. Ako nasumično biramo studenta medju višima od 190cm, koja je verovatnoća da odaberemo devojku?

9. Iz kutija u kojoj su 4 cedulje numerisane brojevima 1, 2, 3, 4 izvlačimo bez vraćanja dok ne izvučemo cedulju sa neparnim brojem. Neka je broj izvlačenja slučajna veličina Y. Odrediti zakon raspodele, EY i DY.

10. Koverta sadrži 7 plavih i 5 zelenih cedulja. Slučajno se izvlače tri cedulje istovremeno. Odrediti raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučenih zelenih cedulja, kao i EX i DX.

1. a) Neka je A - sastaviće reč biohemija.

Skup svih ishoda Ω (broj svih reči, smislenih i besmislenih, pomoću navedenih slova) ima $|\Omega| = \frac{9!}{2!}$ (permutacije sa ponavljanjem).

Koliko ima povoljnih ishoda? Jedan jedini, reč "biohemija". Dakle,

$$P(A) = \frac{1}{\frac{9!}{2!}} = \frac{2}{9!}$$

b) Slično, B - reč Antananarivo.

$$P(B) = \frac{1}{\frac{12!}{4!\cdot 3!}} = \frac{1}{3326400}$$

2. Broj sijalica koji zadovoljavaju standard je: $0.83 \cdot 300 + 0.63 \cdot 100 = 312$, pa je P(izvučena sijalica koja zadov standard) $= \frac{312}{400}$.

3. Neka je A - pao se zbir 6 i B - pala bar jedna petica.

Tražimo $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} =$.

Skup ishoda je $|\Omega| = 36$.

Povoljni ishodi za A su: (1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3).

Povoljni ishodi za AB su: (1,5),(5,1).

Zato je $P(B|A) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$.

4. Ukupno ishoda: $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$.

Neka je A - izvučena prva bela, druga crvena, treća crna.

Povoljnih dogadjaja za A ima: $|A| = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ (5 mogućnosti za belu, pa 3 za crvenu, i na kraju 2 za crnu).

Dakle, $P(A) = \frac{30}{720} = \frac{1}{24}$.

5. Neka su: A - prvi izvučen broj neparan, drugi izvučen broj neparan, treći izvučen broj neparan.

Ukupno ishoda: $|\Omega| = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Povoljnih za A: $|A| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ (na početku ima 10 neparnih, zatim ostaje 9 kad se izvuče prvi, odnosno 8 kada se izvuku dva neparna broja).

Onda je $P(A) = \frac{720}{6840} = \frac{2}{19}$.

6. Neka je A - pao se zbir 10, a B - pao se zbir 9.

Ovde se traži $P(A \cup \bar{A}B)$.

Ukupno ishoda: $|\Omega| = 36$.

Povoljni za A: (4,6),(6,4),(5,5).

Povoljni za B: (3,6),(6,3),(5,4),(4,5).

Znamo formulu za uniju: $P(A \cup \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) - P(A\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B) - 0 = P(A) + P(\bar{A}B)$.

NAPOMENA: $P(\bar{A}B) \neq P(\bar{A}) \cdot P(B)$! Naime, ovi dogadjaji nisu nezavisni.(Razmislite!)

Ali znamo da je $P(\bar{A}B) = P(B) \cdot P(\bar{A}|B) = \frac{4}{36} \cdot P$(nije se pao zbir 10, ako znamo da se pao zbir 9) $= \frac{4}{36} \cdot 1 = \frac{4}{36}$.

Zato je $P(A \cup \bar{A}B) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36}$.

7. Kad bismo tražili verovatnoću da se pri PRVOM izvlačenju dobije dama, rešenje bi bilo $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Da li će pri drugom izvlačenju prvo izvlačenje imati neki uticaj? Da li se očekuje veća ili manja verovatnoća od $\frac{1}{13}$ (pauza za razmišljanje...)?

Hajde da proverimo. Uradićemo ovo pomoću formule potpune verovatnoće. Mi ne znamo šta se desilo pri prvom izvlačenju, tako da neka je:

H_1 - pri prvom izvlačenju se pala dama i

H_2 - pri prvom izvlačenju se nije pala dama.

Ove dve hipoteze pokrivaju sve moguće slučajeve za prvo izvlačenje i medjusobno su disjunktni dogadjaji, tako da primenom formule na dogadjaj A - pri drugom izvlačenju se pala dama, dobijamo:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{204}{51 \cdot 52} = \frac{1}{13}$$

, čime zaključujemo da prvo izvlačenje u ovom slučaju nema uticaj na verovatnoću prilikom drugog izvlačenja.

8. Ako je broj studenata podeljen u razmeri 3:2 u korist devojaka, to znači da imamo 60% šansu da odaberemo devojku, odnosno 40% momka. Odabirom momka ili devojke mi pokrivamo sve moguće slučajeve. Neka je, dakle:

H_1 - odabrali smo devojku,

H_2 - odabrali smo momka i

A - izabran je nasumično student viši od 190cm.

Mi zapravo tražimo $P(H_1|A)$.

Zapravo nama treba Bajesova formula:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)}$$

$P(H_1) = 0.6 = \frac{3}{5}$

$P(H_2) = 0.4 = \frac{2}{5}$

$P(A|H_1) = 0.01 = \frac{1}{100}$

$P(A|H_2) = 0.04 = \frac{1}{25}$

Kada navedene brojeve ubacimo u Bajesovu formulu iznad, dobijamo $P(H_1|A) = \frac{3}{11}$.

9. Skup ishoda je: $\Omega = \{1, 3, 21, 41, 23, 43, 241, 243, 421, 423\}$.

Kako je Y broj izvlačenja, posmatrajući skup ishoda vidimo da on može biti 1, 2 ili 3. Za svaki slučaj ispitujemo verovatnoću:

$P(Y = 1) = P(1 \text{ ili } 3) = \text{disjunktni dogadjaji} = P(1) + P(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

$P(Y = 2) = P(21 \text{ ili } 41 \text{ ili } 23 \text{ ili } 43) = \text{disjunktni dogadjaji} = P(21) + P(41) + P(23) + P(43) = 4 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

$P(Y = 3) = P(241 \text{ ili } 243 \text{ ili } 421 \text{ ili } 423) = \text{disjunktni dogadjaji} = 4 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Zakon raspodele slučajne promenljive Y je:

Y: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Onda je očekivanje $EX = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$.

Za disperziju DX nam treba zakon raspodele promenljive Y^2:

Y^2: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$EY^2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$.

$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$.

10. Skup ishoda je: $\Omega = \{$3z, 2z1p, 1z2p, 3p$\}$, gde je z - zelena cedulja, p - plava cedulja.Ukupan broj cedulja je $7 + 5 = 12$.

Iz skupa ishoda vidimo da broj izvučenih zelenih cedulja može biti 0,1,2 ili 3.

$P(X = 0) = P(3p) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{7}{44}$.

$P(X = 1) = P(1z2p) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{21}{44}$.

$P(X = 2) = P(2z1p) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{7}{22}$.

$P(X = 3) = P(3z) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{22}$.

Zakon raspodele slučajne promenljive X je:

X: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{7}{44} & \frac{21}{44} & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix}$

Proverom se dobija da zbir verovatnoća zaista jeste 1, što je neophodno da se dobije!

Očekivanje je: $EX = 0\frac{7}{44} + 1\frac{21}{44} + 2\frac{7}{22} + 3\frac{1}{22} = \frac{55}{44} = 1.25$.

X^2 ima raspodelu:

X^2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{7}{44} & \frac{21}{44} & \frac{7}{22} & \frac{1}{22} \end{pmatrix}$

$EX^2 = 0\frac{7}{44} + 1\frac{21}{44} + 4\frac{7}{22} + 9\frac{1}{22} = \frac{95}{44}$.

Konačno je:

$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{95}{44} - \frac{3025}{1936} = \frac{1155}{1936} \approx 0.38$