Numeričke metode - septembar 2012.

1. (6 poena) Koristeći Parsevalovu jednakost za Fourier-ov red funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ izračunati $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

2. Data je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) (4 poena) Metodom skalarnog proizvoda odrediti najveću po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

(b) (4 poena) Metodom proizvoljnog vektora odrediti najmanju po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

Kao početne iteracije uzimati vektor $(1, 1, 1, 1)^T$.

3.(6 poena) Približno rešiti granični problem:

$$y'' + 2xy' - 4y = 2cosx \qquad y(0) = 1, y(1) = 2$$

diferencijskom šemom tačnosti $O(h^2)$, sa korakom $h = 0.2$ i računajući na 4 decimale.

Numeričke metode - septembar 2012.

1. (6 poena) Koristeći Parsevalovu jednakost za Fourier-ov red funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ izračunati $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

2. Data je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) (4 poena) Metodom skalarnog proizvoda odrediti najveću po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

(b) (4 poena) Metodom proizvoljnog vektora odrediti najmanju po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice sa tačnošću 10^{-3}

Kao početne iteracije uzimati vektor $(1, 1, 1, 1)^T$.

3.(6 poena) Približno rešiti granični problem:

$$y'' + 2xy' - 4y = 2cosx \qquad y(0) = 1, y(1) = 2$$

diferencijskom šemom tačnosti $O(h^2)$, sa korakom $h = 0.2$ i računajući na 4 decimale.

REŠENJA:

1. Funkcija $f(x) = x^2$ je parna pa je $b_n = 0$. Računamo koeficijente a_n za $n \in [0, \infty)$:
$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3\pi}x^3|_0^\pi = \frac{2}{3}\pi^2$
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos(nx)dx & v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{array} \right\}$
$= \frac{2}{\pi}(\frac{x^2\sin(nx)}{n}|_0^\pi - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)dx)$
$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx$
$= \left\{ \begin{array}{cc} u = x & du = dx \\ dv = \sin(nx)dx & v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{array} \right\}$
$= -\frac{4}{n\pi}(\frac{x\cos(nx)}{n}|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)dx)$
$= \frac{4}{n^2\pi}x\cos(nx)|_0^\pi$
$= 4\frac{(-1)^n}{n^2}$
Koeficijente uvrstimo u formulu za razvoj u Fourierov red:
$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

Primenimo Parsevalovu jednakost: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f^2(x)dx = (\frac{a_0}{2})^2 + \sum_{n=1}^\infty(a_n^2 + b_n^2)$
$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x^4 dx = \frac{1}{2}\frac{4\pi^4}{9} + \sum\frac{16}{n^4}$
$\frac{1}{\pi}\frac{x^5}{5}|_{-\pi}^\pi = \frac{2\pi^2}{9} + \sum\frac{16}{n^4}$
$\frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} = \sum\frac{16}{n^4}$
$\sum\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

2.

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$w_1^{(k)}$	$w_2^{(k)}$	$w_3^{(k)}$	λ
0	1	1	1	1	1	1	
1	7	7	8	7	5	10	7.4545
2	52	52	60	48	40	76	7.4641
3	388	388	448	348	308	568	7.4641

Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice A je 7.4641, a sopstvni vektor (0.5477, 0.5477, 0.6324).

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1250 & 1.1250 & -0.7500 \\ -0.6250 & 1.6250 & -0.7500 \\ 0.5000 & -1.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

k	$v_1^{(k)}$	$v_2^{(k)}$	$v_3^{(k)}$	$v_1^{(k)}/v_1^{(k-1)}$	$v_2^{(k)}/v_2^{(k-1)}$	$v_3^{(k)}/v_3^{(k-1)}$
0	1	1	1			
1	0.2500	0.2500	0			
2	0.2500	0.2500	−0.2500			
3	0.4375	0.4375	−0.5000	1.7500	1.7500	2.0000
4	0.8125	0.8125	−0.9375	1.8571	1.8571	1.8750
5	1.5156	1.5156	−1.7500	1.8654	1.8654	1.8667
6	2.8281	2.8281	−3.2656	1.8660	1.8660	1.8661

Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice B je 1.8661, pa je najmanja od matrice A jednaka $\frac{1}{1.8661} = 0.5359$ i njoj odg. sopstveni vektor je (0.5477, 0.5477, -0.6324).

3. Uvrštavanjem aproksimacija prvog i drugog izvoda u DJ:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

i korišćenjem graničnih uslova dobijamo trodijagonalni sistem jednačina:

$$y_0 = 1$$

$$24y_0 - 54y_1 + 26y_2 = 1.9601$$
$$23y_1 - 54y_2 + 27y_3 = 1.8421$$
$$22y_2 - 54y_3 + 28y_4 = 1.6507$$
$$21y_3 - 54y_4 + 29y_5 = 1.3934$$
$$y_5 = 2$$

Njegovim rešavanjem dobijamo:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	0.8194	0.8541	1.0784	1.4676	2