Numeričke metode - Septembar 2 2014.

1. a) Interpolisati na intervalu $[0,1]$ funkciju $\sin(4\pi x)$ Hermite-ovim polinomom definisanim ravnomerno raspoređenim čvorovima $x_k = k/3$, $k = 0,1,2,3$. U svakom čvoru su zadata dva uslova interpolacije.
b) Oceniti (teorijsku) grešku približne vrednosti funkcije u tački $x = 0.51$, određene konstruisanim polinomom.

2. Korišćenjem Householder-ovih matrica uraditi jedan korak QR algoritma za matricu

$$A = \begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}.$$

3. Dat je granični problem $u'' + 2u' - xu = x^2$ sa graničnim uslovima $u'(0.6) = 0.7$ i $u(0.9) - 0.5u'(0.9) = 1$. Diskretizovati granični problem na ravnomernoj mreži koraka $h = 0.05$ diferencijskom šemom tačnosti $O(h^2)$ i rešiti diskretni problem.

Napomena: Računati na 3 decimale u svim zadacima.

Numeričke metode - Septembar 2 2014.

1. a) Interpolisati na intervalu $[0,1]$ funkciju $\sin(4\pi x)$ Hermite-ovim polinomom definisanim ravnomerno raspoređenim čvorovima $x_k = k/3$, $k = 0,1,2,3$. U svakom čvoru su zadata dva uslova interpolacije.
b) Oceniti (teorijsku) grešku približne vrednosti funkcije u tački $x = 0.51$, određene konstruisanim polinomom.

2. Korišćenjem Householder-ovih matrica uraditi jedan korak QR algoritma za matricu

$$A = \begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}.$$

3. Dat je granični problem $u'' + 2u' - xu = x^2$ sa graničnim uslovima $u'(0.6) = 0.7$ i $u(0.9) - 0.5u'(0.9) = 1$. Diskretizovati granični problem na ravnomernoj mreži koraka $h = 0.05$ diferencijskom šemom tačnosti $O(h^2)$ i rešiti diskretni problem.

Napomena: Računati na 3 decimale u svim zadacima.

REŠENJA:

1. a)

x	0	1/3	2/3	1
$f(x)$	0	-0.8660	0.8660	0
$f'(x)$	12.5664	-6.2832	-6.2832	12.5664

$P_7(x) = -2727.9354x^7 + 9547.9472x^6 - 12664.1061x^5 + 7790.0952x^4 - 2114.8508x^3 + 156.2836x^2 + 12.5660x$

b) Stvarna greška: $P_7(0.51) = 0.12055, \quad f(0.51) = 0.12533, \quad |f - P_7| \leq 0.005.$

Teorijska ocena greške: $|f^{(8)}| = (4\pi)^8 |\sin 4\pi x|$

$$|f(0.51) - P_7(0.51)| \leq \frac{(4\pi)^8}{8!}(0.51-0)^2(0.51-0.3333)^2(0.51-0.6667)^2(0.51-1)^2 = 0.74.$$

2. Jedan korak QR algoritma daje razlaganje $A = Q * R$, gde je

$$Q = \begin{pmatrix} -0.2671 & -0.7088 & 0.6529 \\ 0.9625 & -0.1621 & 0.2176 \\ -0.0484 & 0.6865 & 0.7255 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 557.9418 & 187.0321 & 567.8424 \\ 0 & 0.0741 & 3.4577 \\ 0 & 0 & 0.1451 \end{pmatrix},$$

tako da je

$$A_1 = R\,Q = \begin{pmatrix} 3.5329 & -35.9345 & 816.9585 \\ -0.0960 & 2.3618 & 2.5246 \\ -0.0070 & 0.0996 & 0.1053 \end{pmatrix}.$$

3. Aproksimacija jednačine diferencijskom šemom tačnosti $O(h^2)$ glasi:

$$\frac{1}{h^2}(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) + \frac{1}{h}(v_{i+1} - vi - 1) - x_i v_i = x_i^2$$

za $i = 1, ..., 5$. Za aproksimaciju prvog izvoda u graničnim uslovima koriste se razvoji:

$$u'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)) + O(h^2)$$
$$u'(x_6) = \frac{1}{2h}(u(x_4) - 4u(x_5) + 3u(x_6)) + O(h^2)$$

pomoću kojih se dobijaju nesimetrične aproksimacije datih graničnih uslova tačnosti $O(h^2)$:

$$-3v_0 + 4v_1 - v_2 = 0.07$$
$$v_6 - \frac{1}{4h}(v_4 - 4v_5 + 3v_6) = 1.$$

Sređivanjem ovih jednačina dobija se sistem:

$$44v_0 - 43.9675v_1 = -1.4911$$
$$-19v_{i-1} + (40 + \frac{x_i}{20})v_i - 21v_{i+1} = -\frac{x_i^2}{20} \qquad (i = 1, ..., 5)$$
$$-35.9575v_5 + 32.2v_6 = -3.8361$$

čije rešenje je: $v_0 = 1.1568, v_1 = 1.1899, v_2 = 1.2227, v_3 = 1.2555, v_4 = 1.2888, v_5 = 1.3229, v_6 = 1.3581.$