

1. (6 poena) Data je tabela traga kočenja d automobila pri različitim brzinama kretanja v ,

v (m/s)	10	20	30	40	50
d (m)	5	20	46	70	102

Interpolacijom podataka kubnim splajnom koji zadovoljava uslove na granici $v'(5) = 1$ i $v'(102) = 0.3$, proceniti maksimalnu dozvoljenu brzinu automobila tako da trag kočenja ne bude veći od $50m$.

2. (a)(6 poena) Polazeći od aproksimacije rešenja $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, 1)^\top$, Newtonovom metodom izračunati približno rešenje sistema nelinearnih jednačina sa tačnošću 10^{-4} .

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 4xy = 1,$$

(b) (2 poena) Pomoću apriorne ocene greške oceniti broj iteracija koji je potrebno izračunati da bi se odredilo približno rešenje sistema sa tačnošću 10^{-4} .

3.(6 poena) Metodom Galerkin-a naći probližno rešenje graničnog problema

$$u''(x) + u(x) = \cos(x), \quad u(0) = 1, u(\pi/2) = 0.$$

Za bazisne funkcije uzeti $\phi_0(x) = \cos x, \phi_k(x) = \sin(2kx), k = 1, \dots, 4$.

1. (6 poena) Data je tabela traga kočenja d automobila pri različitim brzinama kretanja v ,

v (m/s)	10	20	30	40	50
d (m)	5	20	46	70	102

Interpolacijom podataka kubnim splajnom koji zadovoljava uslove na granici $v'(5) = 1$ i $v'(102) = 0.3$, proceniti maksimalnu dozvoljenu brzinu automobila tako da trag kočenja ne bude veći od $50m$.

2. (a)(6 poena) Polazeći od aproksimacije rešenja $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, 1)^\top$, Newtonovom metodom izračunati približno rešenje sistema nelinearnih jednačina sa tačnošću 10^{-4} .

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 4xy = 1,$$

(b) (2 poena) Pomoću apriorne ocene greške oceniti broj iteracija koji je potrebno izračunati da bi se odredilo približno rešenje sistema sa tačnošću 10^{-4} .

3.(6 poena) Metodom Galerkin-a naći probližno rešenje graničnog problema

$$u''(x) + u(x) = \cos(x), \quad u(0) = 1, u(\pi/2) = 0.$$

Za bazisne funkcije uzeti $\phi_0(x) = \cos x, \phi_k(x) = \sin(2kx), k = 1, \dots, 4$.

Rešenje:

1. Rešenje:

$$h_1 = 15, \quad h_2 = 26, \quad h_3 = 24, \quad h_4 = 32$$

$$\mu_1 = \frac{15}{41} = 0.3659, \quad \mu_2 = \frac{26}{50} = 0.52, \quad \mu_3 = \frac{24}{56} = 0.4286$$

$$\nu_k = 1 - \mu_k : \quad \nu_1 = 0.6341, \quad \nu_2 = 0.48, \quad \nu_3 = 0.5714$$

$$\lambda_1 = \frac{6}{41} \left(\frac{30-20}{26} - \frac{20-10}{15} \right) = -0.041274$$

$$\lambda_2 = \frac{6}{50} \left(\frac{40-30}{24} - \frac{30-20}{26} \right) = 0.003846$$

$$\lambda_3 = \frac{6}{56} \left(\frac{50-40}{32} - \frac{40-30}{24} \right) = -0.01116$$

Sistem po momentima je

$$\begin{pmatrix} 5 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 36.59 & 200 & 63.41 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 200 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 42.86 & 200 & 57.14 \\ 0 & 0 & 0 & 5.33333 & 10.66667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3333 \\ -4.1274 \\ 0.3846 \\ -1.116 \\ -0.0125 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} M_0 = -0.0608 \\ M_1 = -0.0117 \\ M_2 = 0.0068 \\ M_3 = -0.0078 \\ M_4 = 0.0027 \end{matrix}$$

U intervalu $[46, 70]$, kome pripada vrednost $d = 50$, koeficijenti reprezentacije splajna su

$$\alpha = 30, \quad \beta = 0.3943, \quad \gamma = 0.00335, \quad \delta = -7.6 * 10^{-6}$$

Tražena procena dozvoljene brzine je

$$v(50) \approx 30 + 0.3943 * (50 - 46) + 0.00335 * (50 - 46)^2 - 7.6 * 10^{-6} * (50 - 46)^3 = 31.63 \text{ m/s.}$$

2. (a)

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad 4xy - 1 = 0$$

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}$$

$$[F'(x_0, y_0)]^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x_0, y_0) = (1/2, 1) \Rightarrow (x_1, y_1) = (1/4, 1)$$

Tačno rešenje je :

$$x^* = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0.2588, \quad y^* = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 0.9659$$

(b)

$$F'(u_1, u_2) - F'(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2(u_1 - v_1) & 2(u_2 - v_2) \\ 4(u_2 - v_2) & 4(u_1 - v_1) \end{pmatrix}, \quad \|F'(\mathbf{u}) - F'(\mathbf{v})\|_\infty \leq 8 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \longrightarrow \gamma = 8$$

$$\|[F'(\mathbf{x}_0)]^{-1}\| \leq \frac{5}{6} = \beta, \quad \|[F'(\mathbf{x}_0)]^{-1} F(\mathbf{x}_0)\| \leq \frac{1}{4} = \alpha \longrightarrow h = \frac{\alpha\beta\gamma}{2} = \frac{5}{6}$$

$$\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n\| \leq \alpha \frac{h^{2^n} - 1}{1 - h^{2^n}} \longrightarrow n \geq \frac{1}{\log 2} \log \frac{\log \frac{h\varepsilon}{\alpha+h\varepsilon}}{\log h} = 5.46$$