Numeričke metode - Jun1 2016.

1. (7 poena) Napisati Hermiteov interpolacioni polinom za funkciju $f(x) = \log_{10}(x)$ ako je u čvorovima $x_0 = 2$ i $x_2 = 3$ data samo vrednost funkcije, a u čvoru $x_1 = 2$ dati su vrednost funkcije i njenog prvog i drugog izvoda. Oceniti grešku približne vrednosti funkcije u tački $x = 1.5$, određene konstruisanim polinomom. Računati na 4 decimale.

2. (6 poena) Odrediti polinom četvrtog stepena $p_4(x)$ najbolje srednjekvadratne aproksimacije funkcije $f(x) = |x-1|$ na intervalu [0,2], a zatim izračunati grešku aproksimacije. Za linearno nezavisne funkcije uzeti $1, x, x^2$, itd. Računati na 4 decimale.

3 (7 poena) Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću $5 * 10^{-3}$ drugu po veličini modula sopstvenu vrednost matrice A i njoj odgovarajući sopstveni vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 & 3.3 \\ 0.8 & 1.4 & 1.7 \\ 3.3 & 1.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Za početni vektor uzeti $(1, 1, 1)^T$.

Numeričke metode - Jun1 2016.

1. (7 poena) Napisati Hermiteov interpolacioni polinom za funkciju $f(x) = \log_{10}(x)$ ako je u čvorovima $x_0 = 2$ i $x_2 = 3$ data samo vrednost funkcije, a u čvoru $x_1 = 2$ dati su vrednost funkcije i njenog prvog i drugog izvoda. Oceniti grešku približne vrednosti funkcije u tački $x = 1.5$, određene konstruisanim polinomom. Računati na 4 decimale.

2. (6 poena) Odrediti polinom četvrtog stepena $p_4(x)$ najbolje srednjekvadratne aproksimacije funkcije $f(x) = |x-1|$ na intervalu [0,2], a zatim izračunati grešku aproksimacije. Za linearno nezavisne funkcije uzeti $1, x, x^2$, itd. Računati na 4 decimale.

3 (7 poena) Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću $5 * 10^{-3}$ drugu po veličini modula sopstvenu vrednost matrice A i njoj odgovarajući sopstveni vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 & 3.3 \\ 0.8 & 1.4 & 1.7 \\ 3.3 & 1.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Za početni vektor uzeti $(1, 1, 1)^T$.

Numeričke metode - Jun1 2016.

1. (7 poena) Napisati Hermiteov interpolacioni polinom za funkciju $f(x) = \log_{10}(x)$ ako je u čvorovima $x_0 = 2$ i $x_2 = 3$ data samo vrednost funkcije, a u čvoru $x_1 = 2$ dati su vrednost funkcije i njenog prvog i drugog izvoda. Oceniti grešku približne vrednosti funkcije u tački $x = 1.5$, određene konstruisanim polinomom. Računati na 4 decimale.

2. (6 poena) Odrediti polinom četvrtog stepena $p_4(x)$ najbolje srednjekvadratne aproksimacije funkcije $f(x) = |x-1|$ na intervalu [0,2], a zatim izračunati grešku aproksimacije. Za linearno nezavisne funkcije uzeti $1, x, x^2$, itd. Računati na 4 decimale.

3 (7 poena) Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću $5 * 10^{-3}$ drugu po veličini modula sopstvenu vrednost matrice A i njoj odgovarajući sopstveni vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 & 3.3 \\ 0.8 & 1.4 & 1.7 \\ 3.3 & 1.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Za početni vektor uzeti $(1, 1, 1)^T$.

REŠENJA:

1. $f(x) = \log_{10}(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x\ln(10)}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 10}$

x	f(x)	f'(x)	f"(x)
1	0	/	/
2	0.3010	0.2171	-0.1086
3	0.4771	/	/

Stepen polinoma: n = 1+3+1-1 = 4.

x	f(x)	f[1]	f[2]	f[3]	f[4]
1	0	0.3010	-0.0839	0.1382	-0.1168
2	0.3010	0.2171	0.0543	-0.0953	
2	0.3010	0.2171	-0.0410		
2	0.3010	0.1761			
3	0.4771				

$f[x_2, x_2] = \frac{f'(x_2)}{1} = 0.2171$, $f[x_2, x_2, x_2] = \frac{f''(x)}{2} = 0.0543$.

$P_4(x) = 0.3010(x-1) - 0.0839(x-1)(x-2) + 0.1382(x-1)(x-2)^2 - 0.1168(x-1)(x-2)^3 =$
$= -0.1168x^4 + 0.9558x^3 - 2.8773x^2 + 3.9943x - 1.9560.$

Greška:

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(x)}{5!} w_5(x), \qquad w_5(x) = (x-1)(x-2)^3(x-3)$$

2. Slican u zbirci zad.4.6, str 102, samo se sada traži p_4 umesto p_2.
Aproksimacija se traži u obliku $p_4 = \sum_{k=0}^{4} c_k g_k(x)$ gde je $g_k(x) = x^k$. Koeficijente c_k odredjujemo preko lin. jednačina: $\sum_{k=0}^{4} c_k(g_k, g_j) = (f, g_j), j = 0, 1, ..., 4$, gde je $(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x)dx$.

$(g_k, g_j) = \int_0^2 x^j x^k dx = \frac{2^{j+k+1}}{j+k+1}$

$(f, g_j) = \int_0^2 |x-1| x^j dx =$
$= \int_0^1 (1-x)x^j dx + \int_1^2 (x-1)x^j dx =$
$= \int_0^1 x^j dx - \int_0^1 x^{j+1} dx + \int_1^2 x^{j+1} dx - \int_1^2 x^j dx =$
$= \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} + \frac{2^{j+2}}{j+2} - \frac{1}{j+2} - \frac{2^{j+1}}{j+1} + \frac{1}{j+1} =$
$= 2\frac{1+j2^j}{(j+1)(j+2)}$

Dobija se sistem jednačina:
$2c_0 + 2c_1 + \frac{8}{3}c_2 + 4c_3 + \frac{32}{5}c_4 = 1$
$2c_0 + \frac{8}{3}c_1 + 4c_2 + \frac{32}{5}c_3 + \frac{32}{3}c_4 = 1$
$\frac{8}{3}c_0 + 4c_1 + \frac{32}{5}c_2 + \frac{32}{3}c_3 + \frac{128}{7}c_4 = \frac{3}{2}$
$4c_0 + \frac{32}{5}c_1 + \frac{32}{3}c_2 + \frac{128}{7}c_3 + 32c_4 = \frac{5}{2}$
$\frac{32}{5}c_0 + \frac{32}{3}c_1 + \frac{127}{7}c_2 + 32c_3 + \frac{512}{9}c_4 = \frac{13}{3}$

čije je rešenje: $c_0 = 0.9375, c_1 = 0, c_2 = -3.2812, c_3 = 3.2812 i c_4 = -0.8203$.

Greška aproksimacije:
$||f(x) - p_4(x)||^2 = \int_0^2 (f(x) - p_4(x))^2 dx$
$= \int_0^2 |x-1|^2 dx - 2\int_0^2 |x-1| p_4(x) dx + \int_0^2 p_4(x)^2 dx$
$= \int_0^2 (x-1)^2 dx - 2\int_0^1 (1-x)p_4(x)dx - 2\int_1^2 (x-1)p_4(x)dx + \int_0^2 p_4(x)^2 dx$
$= 0.6667 - 0.6641 - 0.6641 + 0.6641$
$= 0.0026$

Pa je greška aproksimacije 0.0510.

3) $A = A^T$ pa nema potrebe da računamo vektor w.

k	v_1	v_2	v_3	(v^k, v^k)	(v^{k-1}, v^k)	λ
0	1	1	1			
1	5.3	3.9	5.1			4.8469
2	26.3100	18.3700	24.6300			4.8599
3	127.5470	88.6370	120.5150			4.8601
4	621.6655	431.0049	583.6395			4.8600

$\lambda_1 = 4.8600$, a odgovarajući s.vektor je $x_1 = [0.6507, 0.4511, 0.6109]^T$

3.(b)

$$A1 = A - \lambda_1 * x_1 * x_1' = \begin{pmatrix} -0.8575 & -0.6265 & 1.3683 \\ -0.6265 & 0.4110 & 0.3608 \\ 1.3683 & 0.3608 & -1.7135 \end{pmatrix}$$

Tražimo najveću po modulu sopstvenu vrednost od matrice A1:

k	v_1	v_2	v_3	(v^k, v^k)	(v^{k-1}, v^k)	λ
0	1	1	1			
1	-0.1157	0.1453	0.0156			0.7687
2	0.0295	0.1378	-0.1326			2.5752
3	-0.2931	-0.0097	0.3173			-3.5859
4	0.6915	0.2941	-0.9482			-2.8907
5	-2.0747	-0.6544	2.6770			-2.8566
6	5.85221	1.9966	-7.6621			-2.8546

$\lambda_2 = -2.8546$, a odgovarajući s.vektor je $x_2 = [0.5964, 0.2005, -0.7773]^T$