Numeričke metode - Jun2 2016.

1. (7 poena) Data je funkcija $f(x) = \arccos(x),\ x \in [-1,1]$. Odrediti najmanji prirodan broj m i polinom $p_m(x)$ stepena m najbolje srednjekvadratne aproksimacije za funkciju $f(x)$ na intervalu $[-1,1]$, tako da je

$$||f - p_m|| = \left(\int_{-1}^{1} \frac{(f(x) - p_m(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0.1.$$

2. (7 poena) Metodom iteracije izračunati sa tačnošću $0.5 \cdot 10^{-4}$ rešenje sistema nelinearnih jednačina

$$4x^3 - 27xy^2 = -25 \qquad 4x^2y - 3y^3 = 1,$$

u prvom kvadrantu.

3.(6 poena) Ricovom metodom na intervalu (0,1) naći približno rešenje problema

$$(xy')' + y = x, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Rešenje tražiti u obliku $y(x) \approx x + x(1-x)(c_1 + c_2 x)$.

Numeričke metode - Jun2 2016.

1. (7 poena) Data je funkcija $f(x) = \arccos(x),\ x \in [-1,1]$. Odrediti najmanji prirodan broj m i polinom $p_m(x)$ stepena m najbolje srednjekvadratne aproksimacije za funkciju $f(x)$ na intervalu $[-1,1]$, tako da je

$$||f - p_m|| = \left(\int_{-1}^{1} \frac{(f(x) - p_m(x))^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0.1.$$

2. (7 poena) Metodom iteracije izračunati sa tačnošću $0.5 \cdot 10^{-4}$ rešenje sistema nelinearnih jednačina

$$4x^3 - 27xy^2 = -25 \qquad 4x^2y - 3y^3 = 1,$$

u prvom kvadrantu.

3.(6 poena) Ricovom metodom na intervalu (0,1) naći približno rešenje problema

$$(xy')' + y = x, \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Rešenje tražiti u obliku $y(x) \approx x + x(1-x)(c_1 + c_2 x)$.

REŠENJA:
1.Zbirka, str.107, zad 4.13
2. Zbirka str 243, zad 7.11

3. Kako se rešenje traži u obliku $y(x) = x + x(1-x)(c_1 + c_2 x)$, najpre odredimo y" :
$y' = 1 + c_1(1-2x) + c_2(2x - 3x^2)$
$y'' = -2c_1 + c_2(2-6x)$
Zamenimo y i y" u polaznu jednačinu:
$(xy')' + y = x \rightarrow y' + xy'' + y - x = 0$
$R(x; c_1, c_2) = c_1(1 - 3x - x^2) + c_2(-x^3 - 8x^2 + 4x) + 1$
Mora da važi:
$\int_0^1 R(x; c_1, c_2)x(1-x)dx = 0$
$\int_0^1 R(x; c_1, c_2)x^2(1-x)dx = 0$
Dobija se sistem:
$\frac{2}{25}c_1 + \frac{1}{10}c_2 = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{10}c_1 + \frac{19}{210}c_2 = \frac{1}{12}$
Rešavanjem sistema dobija se $c_1 = \frac{85}{26}, \qquad c_2 = -\frac{35}{13}$.
Konačno, rešenje je: $y(x) \approx x + \frac{5}{26}x(1-x)(17 - 14x)$.