Numeričke metode - Jun2 2014.

1. (a) (2 poena) U ravni je dato n tačaka $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Dokazati da postoji samo jedna prava $y = c_0 + c_1 x$ takva da je

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - (c_0 + c_1 x_k)|^2 = \min \qquad (*)$$

b)(4 poena) Naći pravu koja zadovoljava uslov $(*)$ ako je $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (2, 5)$ i $P_3 = (3, 2)$.

2.(7 poena) Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice A je $\lambda_1 = 10$, a njoj odgovarajući sopstveni vektor je $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću 10^{-3} drugu po veličini modula sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor ove matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. (7 poena) Metodom stepenih redova rešiti Cauchy-jev problem (n je prirodan broj)

$$(1-x^2)\,\frac{d^2u_n}{dx^2} - x\,\frac{du_n}{dx} + n^2\,u_n = 0, \qquad u_n(0) = \begin{cases} (-1)^m, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{cases} \qquad u_n'(0) = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m+1 \end{cases}$$

Numeričke metode - Jun2 2014.

1. (a) (2 poena) U ravni je dato n tačaka $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Dokazati da postoji samo jedna prava $y = c_0 + c_1 x$ takva da je

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - (c_0 + c_1 x_k)|^2 = \min \qquad (*)$$

b)(4 poena) Naći pravu koja zadovoljava uslov $(*)$ ako je $P_1 = (1, 3)$, $P_2 = (2, 5)$ i $P_3 = (3, 2)$.

2.(7 poena) Najveća po modulu sopstvena vrednost matrice A je $\lambda_1 = 10$, a njoj odgovarajući sopstveni vektor je $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$. Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću 10^{-3} drugu po veličini modula sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor ove matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. (7 poena) Metodom stepenih redova rešiti Cauchy-jev problem (n je prirodan broj)

$$(1-x^2)\,\frac{d^2u_n}{dx^2} - x\,\frac{du_n}{dx} + n^2\,u_n = 0, \qquad u_n(0) = \begin{cases} (-1)^m, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{cases} \qquad u_n'(0) = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m+1 \end{cases}$$

REŠENJA:

1. (a) Na osnovu egzistencije i jedinstvenosti polinoma najbolje srednjekvadratne aproksimacije definisanog skalarnim proizvodom

$$(f,\, g) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, g(x_k).$$

(b)

$$\begin{aligned}(1,1)c_0 + (x,1)c_1 &= (y,1)\\ (1,x)c_0 + (x,x)c_1 &= (y,x)\end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned}3\,c_0 + 6\,c_1 &= 10\\ 6\,c_0 + 14\,c_1 &= 19\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{13}{3}\\ c_1 &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 5, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$$

```
v1 =[1 0 -1 -1]
w1 =[1 0 -1 -1]
ln = 3

v1 =[3 2 -5 -5]
w1 =[3 2 -5 -5]
ln = 4.8462

v1 =[13 12 -25 -25]
w1 =[13 12 -25 -25]
ln = 4.9936

v1 =[63 62 -125 -125]
w1 =[63 62 -125 -125]
ln = 4.9997

v1 =[313 312 -625 -625]
w1 =[313 312 -625 -625]
ln = 5.0000

x =[0.3167 0.3157 -0.6325 -0.6325]
```

3. Zamenom u diferencijalnu jednačinu funkcije $u_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, dobijamo veze

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-x\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+n^2\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k-\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^k+n^2\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0,$$

$$(2\cdot 1\,c_2+n^2c_0)x^0+(3\cdot 2\,c_3-c_1+n^2c_1)x+\sum_{k=2}^{\infty}\big((k+2)(k+1)c_{k+2}-(k^2-n^2)c_k\big)x^k=0,$$

dobijaju se rekurentne veze koeficijenata

$$c_2=-\frac{n^2}{2}\,c_0,\qquad c_3=\frac{1-n^2}{6}\,c_1,\qquad c_{k+2}=\frac{k^2-n^2}{(k+2)(k+1)}\,c_k,\quad k=2,3,\ldots.$$

Očigledno je da se svi koeficijenti sa parnim indeksom izražavaju preko c_0, a sa neparnim preko c_1,

$$c_{2j}=\frac{\big((2j-2)^2-n^2\big)\big((2j-4)^2-n^2\big)\ldots(2^2-n^2)(-n^2)}{(2j)(2j-1)(2j-2)(2j-3)\ldots 2\cdot 1}\,c_0,$$
$$c_{2j+1}=\frac{\big((2j-1)^2-n^2\big)\big((2j-3)^2-n^2\big)\ldots(3^2-n^2)(1^2-n^2)}{(2j+1)(2j)(2j-1)(2j-2)\ldots 3\cdot 2}\,c_1,$$

j=1,2,....

Iz početnih uslova zaključujemo da je

$$c_0=\begin{cases}(-1)^m, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}\qquad c_1=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m, & n=2m+1\end{cases},$$

te je

$\mathbf{n=2m}$ $$u_{2m}(x)=(-1)^m\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\big((2j-2)^2-(2m)^2\big)\big((2j-4)^2-(2m)^2\big)\ldots(-(2m)^2)}{(2j)!}\,x^{2j}\right),$$

$\mathbf{n=2m+1}$

$$u_{2m+1}(x)=(-1)^m\left(x+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\big((2j-1)^2-(2m+1)^2\big)\big((2j-3)^2-(2m+1)^2\big)\ldots(1^2-(2m+1)^2)}{(2j+1)!}\,x^{2j+1}\right).$$

Jasno je da su obe sume konačne, jer su koeficijenti u obe sume jednaki nuli kada je $j\geq m+1$ (u prvoj sumi za $2j-2\geq 2m$, a u drugoj za $2j-1\geq 2m+1$). Rešenje je, stoga, polinom stepena n (paran za n parno i neparan za n neparno),

$$u_n(x)=\begin{cases}(-1)^{n/2}\left(1+\sum_{j=1}^{n/2}\frac{\left((2j-2)^2-n^2\right)\ldots(-n^2)}{(2j)!}\,x^{2j}\right), & n \text{ parno}\\ (-1)^{(n-1)/2}\left(x+\sum_{j=1}^{(n-1)/2}\frac{\left((2j-1)^2-n^2\right)\ldots(1^2-n^2)}{(2j+1)!}\,x^{2j+1}\right), & n \text{ neparno}\end{cases}$$

i to je Čebiševljev polinom $u_n(x)\equiv T_n(x)=\cos{(n\arccos x)}$.