

1. (7 poena) Odrediti interpolacioni kubni splajn periodične funkcije $f(x)$ sa periodom jednakim 2π , koja je data tabelom:

| | | | | |
|--------|--------|------------------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | 2π |
| $f(x)$ | 0.0000 | 0.8660 | -0.8660 | 0.0000 |

Računati na četiri decimale. Pomoću dobijenog splajna izračunati $f(\frac{13\pi}{4})$.

2.(a) (4 poena) Metodom skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću 10^{-4} najveću po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 & 3.3 \\ 0.8 & 1.4 & 1.7 \\ 3.3 & 1.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Za početni vektor uzeti $(1, 1, 1)^T$.

(b) (4 poena) Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću $5 * 10^{-3}$ drugu po veličini modula sopstvenu vrednost matrice A i njoj odgovarajući sopstveni vektor.

3.(5 poena) Metodom kolokacije rešiti granični problem:

$$u'' + u = \sin(2x), \quad u(0) = 1, u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ako su tačke kolokacije $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, a bazisne funkcije $\Phi_0(x) = \sin(x) + \cos(x)$ i $\Phi_k(x) = \sin(2kx)$ za $k = 1, 2, 3$. Računati na 4 decimale.

1. (7 poena) Odrediti interpolacioni kubni splajn periodične funkcije $f(x)$ sa periodom jednakim 2π , koja je data tabelom:

| | | | | |
|--------|--------|------------------|------------------|--------|
| x | 0 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | 2π |
| $f(x)$ | 0.0000 | 0.8660 | -0.8660 | 0.0000 |

Računati na četiri decimale. Pomoću dobijenog splajna izračunati $f(\frac{13\pi}{4})$.

2.(a) (4 poena) Metodom skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću 10^{-4} najveću po modulu sopstvenu vrednost i njoj odgovarajući sopstveni vektor matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 & 3.3 \\ 0.8 & 1.4 & 1.7 \\ 3.3 & 1.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Za početni vektor uzeti $(1, 1, 1)^T$.

(b) (4 poena) Kombinujući metodu iscrpljivanja i metodu skalarnog proizvoda odrediti sa tačnošću $5 * 10^{-3}$ drugu po veličini modula sopstvenu vrednost matrice A i njoj odgovarajući sopstveni vektor.

3.(5 poena) Metodom kolokacije rešiti granični problem:

$$u'' + u = \sin(2x), \quad u(0) = 1, u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ako su tačke kolokacije $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, a bazisne funkcije $\Phi_0(x) = \sin(x) + \cos(x)$ i $\Phi_k(x) = \sin(2kx)$ za $k = 1, 2, 3$. Računati na 4 decimale.

REŠENJA:

1.

| | | | | |
|----------|--------|--------|---------|--------|
| x | 0.0000 | 2.0944 | 4.1888 | 6.2832 |
| $\sin x$ | 0.0000 | 0.8660 | -0.8660 | 0.0000 |

Splajn je periodičan i dat je polinomima

$$S(x; f) = \begin{cases} 0.8270x - 0.09426x^3, & x \in [0, 2\pi/3] \\ 0.8660 - 0.4135(x - 2\pi/3) - 0.5923(x - 2\pi/3)^2 + 0.1885(x - 2\pi/3)^3, & x \in [2\pi/3, 4\pi/3] \\ -0.8660 - 0.4135(x - 4\pi/3) + 0.5923(x - 4\pi/3)^2 - 0.09426(x - 4\pi/3)^3, & x \in [4\pi/3, 2\pi] \end{cases}$$

Identican rezultat se dobija ako se pretpostavi da je splajn prirodni.

$$f\left(\frac{13\pi}{4}\right) = f\left(\frac{13\pi}{8}\right) = -0.6036.$$

2.(a) $A = A^T$ pa nema potrebe da računamo vektor w .

| k | v_1 | v_2 | v_3 | (v^k, v^k) | (v^{k-1}, v^k) | λ |
|---|----------|----------|----------|--------------|------------------|-----------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 1 | 5.3 | 3.9 | 5.1 | | | 4.8469 |
| 2 | 26.3100 | 18.3700 | 24.6300 | | | 4.8599 |
| 3 | 127.5470 | 88.6370 | 120.5150 | | | 4.8601 |
| 4 | 621.6655 | 431.0049 | 583.6395 | | | 4.8600 |

$\lambda_1 = 4.8600$, a odgovarajući s.vektor je $x_1 = [0.6507, 0.4511, 0.6109]^T$

2.(b)

$$A1 = A - \lambda_1 * x_1 * x_1' = \begin{pmatrix} -0.8575 & -0.6265 & 1.3683 \\ -0.6265 & 0.4110 & 0.3608 \\ 1.3683 & 0.3608 & -1.7135 \end{pmatrix}$$

Tražimo najveću po modulu sopstvenu vrednost od matrice A1:

| k | v_1 | v_2 | v_3 | (v^k, v^k) | (v^{k-1}, v^k) | λ |
|---|---------|---------|---------|--------------|------------------|-----------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | | | |
| 1 | -0.1157 | 0.1453 | 0.0156 | | | 0.7687 |
| 2 | 0.0295 | 0.1378 | -0.1326 | | | 2.5752 |
| 3 | -0.2931 | -0.0097 | 0.3173 | | | -3.5859 |
| 4 | 0.6915 | 0.2941 | -0.9482 | | | -2.8907 |
| 5 | -2.0747 | -0.6544 | 2.6770 | | | -2.8566 |
| 6 | 5.85221 | 1.9966 | -7.6621 | | | -2.8546 |

$\lambda_2 = -2.8546$, a odgovarajući s.vektor je $x_2 = [0.5964, 0.2005, -0.7773]^T$

3. Približno rešenje se traži u obliku:

$$v(x) = \sin(x) + \cos(x) + \sum_{k=1}^3 c_k \sin(2kx).$$

Zamenom u jednačini dobija se izraz za funkciju greške:

$$R(x; c_1, c_2, c_3) = -(1 + 3c_1 \sin(2x) - 15c_2 \sin(4x) - 35c_3 \sin(6x)).$$

Uslovi kolokacije: $R(\frac{1}{2}; c_1, c_2, c_3) = 0$, $R(1; c_1, c_2, c_3) = 0$ i $R(\frac{3}{2}; c_1, c_2, c_3) = 0$ daju sistem:

$$2.5245c_1 + 13.6395c_2 + 4.9385c_3 = -0.8415$$

$$-2.7279c_1 + 11.3520c_2 + 9.7790c_3 = 0.9093$$

$$0.4233c_1 - 4.1910c_2 + 14.4235c_3 = -0.1411$$

čija su rešenja: $c_1 = -0.3333$, $c_2 = c_3 = 0$, pa je traženo približno rešenje:

$$v(x) = \sin(x) + \cos(x) - 0.3333 \sin(2x).$$