

Numeričke metode - Decembar 2014.

**1. (a)(3 poena)** Ispitati da li je moguće aproksimirati funkciju  $f(x) = (5 - x)^{-1}$  polinomom  $p(x)$  nultog stepena tako da vazi

$$\|f - p\| = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

**(b)(4 poena)** U slučaju potvrdnog odgovora pod (a) naći jedan polinom koji ispunjava zadati uslov. U slučaju negativnog odgovora pod (a), odrediti najniži stepen polinoma za koji će važiti zadati uslov i bar jedan polinom koji ga ispunjava.

**2.(a)(2 poena)** Ako je  $H = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ , gde je  $I$  jedinična matrica,  $\mathbf{w} \in R^n$  i  $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$ , dokazati da je  $H$  ortogonalna matrica.

**(b) (3 poena)** Householder-ovom transformacijom svesti matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

na trodijagonalnu matricu.

**(c) (3 poena)** Uraditi jedan korak QR algoritma.

**3. (5 poena)** Njutnovom metodom za rešavanje sistema nelinearnih jednačina odrediti ekstremum funkcije

$$f(x, y) = 3x^3 + 2y^2 + xy^2 - 10x - 5y - 1$$

u okolini tačke (1,1) sa tačnošću  $10^{-4}$ .

Numeričke metode - Decembar 2014.

**1. (a)(3 poena)** Ispitati da li je moguće aproksimirati funkciju  $f(x) = (5 - x)^{-1}$  polinomom  $p(x)$  nultog stepena tako da vazi

$$\|f - p\| = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

**(b)(4 poena)** U slučaju potvrdnog odgovora pod (a) naći jedan polinom koji ispunjava zadati uslov. U slučaju negativnog odgovora pod (a), odrediti najniži stepen polinoma za koji će važiti zadati uslov i bar jedan polinom koji ga ispunjava.

**2.(a)(2 poena)** Ako je  $H = I - 2\mathbf{w}\mathbf{w}^T$ , gde je  $I$  jedinična matrica,  $\mathbf{w} \in R^n$  i  $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$ , dokazati da je  $H$  ortogonalna matrica.

**(b) (3 poena)** Householder-ovom transformacijom svesti matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

na trodijagonalnu matricu.

**(c) (3 poena)** Uraditi jedan korak QR algoritma.

**3. (5 poena)** Njutnovom metodom za rešavanje sistema nelinearnih jednačina odrediti ekstremum funkcije

$$f(x, y) = 3x^3 + 2y^2 + xy^2 - 10x - 5y - 1$$

u okolini tačke (1,1) sa tačnošću  $10^{-4}$ .

REŠENJA:

1. Zbirka, str 151, zad 4.55

2. Zbirka, str 204, zad 6.14

3. Potrebno je rešiti sistem jednačina:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

tj sistem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 + y^2 - 10 = 0 \equiv f_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 2xy - 5 = 0 \equiv f_2$$

Njutnova metoda je definisana iteartivnim algoritmom:

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - [f'(X^{(n)})]^{-1} \cdot f(X^{(n)})$$

gde je:

$$f'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x & 2y \\ 2y & 4 + 2x \end{bmatrix}$$

1. iteracija:  $x_0 = 1, y_0 = 1$ :

$$f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, f'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, [f'(x_0, y_0)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05769 & -0.01923 \\ -0.01923 & 0.17308 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = 1.01923, y_1 = 0.82692$$

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\| = 0.17414 > \epsilon$$

2. iteracija:  $x_1 = 1.01923, y_1 = 0.82692$ :

$$f(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 0.03328 \\ -0.00666 \end{bmatrix}, f'(x_1, y_1) = \begin{bmatrix} 18.34615 & 1.65385 \\ 1.65385 & 6.03846 \end{bmatrix}, [f'(x_1, y_1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05589 & -0.01531 \\ -0.01531 & 0.16980 \end{bmatrix},$$

$$x_2 = 1.01727, y_2 = 0.82856$$

$$\|X^{(2)} - X^{(1)}\| = 0.00256 > \epsilon$$

3. iteracija:  $x_2 = 1.01727, y_2 = 0.82856$ :

$$f(x_2, y_2) = \begin{bmatrix} 0.00004 \\ -0.00001 \end{bmatrix}, f'(x_2, y_2) = \begin{bmatrix} 18.31084 & 1.65713 \\ 1.65713 & 6.03454 \end{bmatrix}, [f'(x_2, y_2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05600 & -0.01538 \\ -0.01538 & 0.16994 \end{bmatrix},$$

$$x_3 = 1.01727, y_3 = 0.82856$$

$$\|X^{(3)} - X^{(2)}\| = 2.75 \cdot 10^{-6} < \epsilon$$