1 Задатак 36

Вероватноћа да у породици има n деце је $\alpha p^n, n \in \mathbb{N}, p \in (0,1), \alpha > 0$. Све комбинације полова n деце су једнаковероватне. Доказати да за $k \geq 1$ вероватноћа да у породици има k дечака једнака $\frac{2\alpha p^k}{(2-p)^{k+1}}$.

Решење:

D_n - породица са n деце. Тада према услову имамо $P(D_n) = \alpha p^n$. C_k - k дечака у породици.

$$P(C_k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(D_n)P(C_k|D_n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(D_n)P(C_k|D_n) = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha p^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

$$= \alpha \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{p^n}{2^n} = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+k}{k} \frac{p^{k+s}}{2^{k+s}},$$

даље применимо следеће тврђење:

$$\binom{k+s}{s} = (-1)^s \binom{-(k+1)}{s}.$$

Јер

$$\binom{-(k+1)}{s} = \frac{(-k-1)(-k-2)...(-k-s)}{s!} = (-1)^s \frac{(k+1)(k+2)...(k+s)}{s!} = (-1)^s \binom{k+s}{s}.$$

Стога добијамо да важи

$$P(C_k) = \alpha \frac{p^k}{2^k} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{p^s}{2^s} \binom{-(k+1)}{s} = \alpha \frac{p^k}{2^k} (1 - \frac{p}{2})^{-k-1} = \frac{\alpha p^k}{2^k} (\frac{2-p}{2})^{-k-1}.$$

и применили смо

$$\sum_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} x^s = (1+x)^n, |x| < 1$$

2 Задатак 42

$$P\{X = k\} = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad n \geq k, \quad \in \mathbb{N},$$

та расподела се зове Негативна биномна у ознаци $NB(k,p)$, где је k - број пута колико треба да се оствари задат догађај, док је p вероватноћа остваривања истог. Приметимо да је Геометријска расподела заправо исто што и Негативна биномна за параметре $k = 1$ и p.

Проверимо да је збир свих вероватноћа баш један:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = /s = n-k/ = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{k-1} p^k (1-p)^s.$$

Даље искористимо тврђење из задатка 36 и тиме добијамо.

$$p^k \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{-k}{s} (1-p)^s = p^k \sum_{s=0}^{\infty} \binom{-k}{s} (p-1)^s = p^k (1-p-1)^{-k} = 1.$$

Док је очекивање.

$$E(X) = \sum_{n=k}^{\infty} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Применимо

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Тада

$$k \sum_{s=k+1}^{\infty} \binom{s-1}{k} p^k (1-p)^{s-k-1} = \frac{k}{p} \sum_{s=k+1}^{\infty} \binom{s-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{s-(k+1)}.$$

Ту применимо да је сума једнака баш један, стога имамо.

$$E(X) = \frac{k}{p}.$$

3 Задатак 84

Прво нађемо густину вектора $f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{2}{3}, \quad (x,y) \in T,$$

и нула иначе. Са T смо означили тражени троугао.

Густина маргиналне расподеле за X је:

- За $x \in (0,2)$
$$f(x) = \int_0^{x/2} \frac{2}{3} dy = \frac{x}{3}.$$
- За $x \in (2,3)$
$$f(x) = \int_0^{3-x} \frac{2}{3} dy = \frac{2(3-x)}{3}.$$
- $x \notin (0,3)$
$$f(x) = 0.$$

Стога, тражена густина је:

$$f_{Y|X\in[1,2]}(y) = \frac{\int_1^2 f(x,y)dy}{\int_1^2 f(x)dx},$$

односно у зависности од y добијамо:

- За $y \in (0, \frac{1}{2})$
$$f_{Y|X\in[1,2]}(y) = \frac{4}{3}.$$
- За $y \in (\frac{1}{2}, 1)$
$$f_{Y|X\in[1,2]}(y) = \frac{8(1-y)}{3}.$$
- Иначе:
$$f_{Y|X\in[1,2]}(y) = 0.$$