

## Биоматематика - Задаци по којима се држе вежбе

1. Доказати да за све природне бројеве  $n$  важе следећи искази

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(4) \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, x \in R \setminus \{1\}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(5) 7|2^{n+1} + 3^{2n-1}$$

$$(6) 9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

$$(7) \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(8) 2^n > n^2, \text{ за } n \geq 5$$

$$(9) \frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

2. За дате низове  $x_n = n + (-1)^{n+1}$  и  $y_n = -n$  одредити

$$(1) (x_n) + (y_n)$$

$$(2) (x_n) * (y_n)$$

$$(3) 2(x_n) - (y_n)$$

$$(4) \frac{(x_n)}{(y_n)}$$

3. Испитати који од следећих низова су монотони, а који не

$$(1) a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$(2) b_n = n^2 - 8n + 12$$

4. Који од наведених низова је ограничен

$$(1) a_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$(2) b_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$$

$$(3) c_n = \max\{n, 5\}$$

$$(4) d_n = \frac{2^n}{n!}$$

5. Доказати по дефиницији

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n} = 0$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_2\left(1 + \sqrt{\frac{1}{n+1}}\right) = 0$$

6. Израчунати

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{n^2 + 1}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - n}{n^2 + 2n + 3}$$

- (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{n^4 + n^3 - 1}$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{2n+3} - \frac{1-3n^3}{3n^2+1}$
- (6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
- (7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$
- (8)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n+1} + 2^{n+3}}$
- (9)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{1}{n+1}} + 3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}$
- (10)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$
- (11)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 4}{n^2 + 2n + 2}\right)^{2n}$
- (12)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}\right)^{3n}$
- (13)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$
- (14)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(2^n(n+3))}{2^n}$
- (15)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$
- (16)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$
- (17)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$
- (18)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{\sqrt[5]{n^2}} - 3^{\sqrt[5]{n^3}}}{3^{\sqrt[5]{n^2}} + 2^{\sqrt[5]{n^3}}}$
- (19)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}}}}{\sqrt{\sqrt{10n + \sqrt{8n + \sqrt{6n + \sqrt{4n + \sqrt{2n}}}}}}}$
- (20)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^{\frac{3}{2}} + 2n + \sqrt{n}}{5n^{\frac{3}{2}} + 5n - 3\sqrt{n}}$
- (21)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$
- (22)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 2n + 3}\right)^{n(n+1)}$
- (23)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1}\right)^{3\sqrt{n}}$

7. Доказати да су следећи низови конвергентни и одредити  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

- (1)  $a_n = \frac{1}{n!}$
- (2)  $a_n = \frac{n^n}{3^n n!}$
- (3)  $a_n = \frac{c^n}{n!}, c > 0$
- (4)  $a_n = q^n, |q| < 1$

8. Доказати да важе следеће једнакости

- (1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0, |q| < 1$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k q^n = 0, |q| < 1, k \in \mathbb{N}$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1,$

9. Доказати по дефиницији

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3-x} = \frac{3}{2}$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty$

10. Одредити леви и десни лимес функције у датој тачки

- (1)  $f(x) = \operatorname{sgn}(x), x = 0$

$$(2) g(x) = \frac{1}{x-3}, x = 3$$

$$(3) h(x) = [x], x = 4$$

### 11. Важни лимеси

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

### 12. Израчунати следеће лимесе

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\tan^2 2x}$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x - a}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x}$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x(x+2)} - x$$

$$(21) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{16+x^2} - 4}$$

### 13. Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције

$$(1) f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$(2) f(x) = \operatorname{sgn}(x)$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$(4) f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}, & x \notin \{-1, 0, 1\} \\ 0, & x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$$

$$(7) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x-2}, & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 5} - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$(8) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$(9) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(10) f(x) = \begin{cases} \cos x + \sqrt{2}, & x < 0 \\ \frac{(1+x)\sqrt{2}-1}{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(11) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

14. Одредити  $A$  тако да је функција  $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$  непрекидна

$$(1) f(x) = \frac{(1+x)^3-1}{x}$$

$$(2) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

$$(3) f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

15. Израчунати извод функције

$$(1) f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$$

$$(2) f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$$

$$(3) f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$$

$$(4) f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^7}$$

$$(5) f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$$

$$(6) f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$$

$$(7) f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$$

$$(8) f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$(9) f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$$

$$(10) f(x) = x \cot x$$

$$(11) f(x) = e^x \cos x$$

$$(12) f(x) = \sin x \ln x 2^x$$

$$(13) f(t) = \frac{t^2}{\ln t}$$

$$(14) f(x) = x^{-1} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

$$(15) f(z) = z \arctan z$$

$$(16) f(t) = \arcsin t + 2$$

$$(17) f(x) = \sqrt{x e^x + x}$$

$$(18) f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + (\ln x)^5$$

$$(19) f(x) = \frac{1}{\arctan x}$$

$$(20) f(x) = \ln^2 x - \ln \ln x$$

$$(21) f(x) = \tan \sqrt{x}$$

$$(22) f(x) = x^{x^2}$$

$$(23) f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

$$(24) f(x) = x^{x^x}$$

16. Израчунати извод имплицитно задате функције  $y = y(x)$

$$(1) x^2 + y^2 = 1$$

$$(2) x^2 + 2xy - y^2 = 4x$$

$$(3) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$(4) e^y \sin x + \ln y \cos x = \arctan x$$

17. Израчунати следећи лимес и објаснити зашто не може да се израчуна применом Лопиталовог правила

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

18. Израчунати применом Лопиталовог правила

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\arctan x^{12}}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

19. Доказати да је функција  $f(x)$  решење диференцијалне једначине

(1)  $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)$ ,  $1 + y'^2 = 2yy''$

(2)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$ ,  $y'' - 2y' + y = e^x$

20. Одредити минимум и максимум функције  $f(x)$  на датом интервалу

(1)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ ,  $x \in [-1, 5]$

(2)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ ,  $x \in [-10, 12]$

(3)  $f(x) = x^3$ ,  $x \in [-1, 3]$

(4)  $f(x) = x^4 + 2$ ,  $x \in [-5, 5]$

21. Одредити локалне екстремуме функције

(1)  $f(x) = x \ln x$

(3)  $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

(2)  $f(x) = x - \arctan x$

(4)  $f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$

22. Наћи интервале закривљености и превојне тачке функције

(1)  $f(x) = (x + 1)^4$

(4)  $f(x) = (1 + x^2)e^x$

(2)  $f(x) = x^2 \ln x$

(3)  $f(x) = x - \arctan x$

(5)  $f(x) = \frac{1}{x+3}$

23. Наћи асимптоте графика функције

(1)  $f(x) = x + \ln x$

(4)  $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(2)  $f(x) = e^{-x^2} + 2$

(5)  $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+3}$

(3)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+9}$

(6)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

24. Скицирати график функције

(1)  $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

(4)  $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$

(2)  $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

(5)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

(3)  $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

(6)  $f(x) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$

25. Израчунати интеграл

(1)  $\int (\sqrt{x} + 1)(x + \sqrt{x} + 1)dx$

(7)  $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

(13)  $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

(2)  $\int (6x^2 + 8x + 3)dx$

(8)  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

(14)  $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$

(3)  $\int (\sin x - \frac{1}{\sin^2 x})dx$

(9)  $\int \cos^2 x dx$

(15)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$

(4)  $\int (5^x + x^5)dx$

(10)  $\int (2x + 5)^{18} dx$

(16)  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

(5)  $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2})dx$

(11)  $\int \cot x dx$

(17)  $\int x \ln x dx$

(6)  $\int \frac{dx}{x-a}$

(12)  $\int x^2 e^{-x^3} dx$

(18)  $\int \ln^2 x dx$

$$\begin{array}{lll}
(19) \int x \sin x dx & (25) \int \frac{dx}{x^3 + 1} & (31) \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \\
(20) \int x \cos 3x dx & (26) \int \frac{4dx}{x^4 - 1} & (32) \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \\
(21) \int x^2 \arctan x dx & (27) \int \frac{9x dx}{x^3 - 3x + 2} & (33) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \\
(22) \int e^x \cos x dx & (28) \int \sin^5 x dx & (34) \int \sqrt{2x - x^2} dx \\
(23) \int (x^2 - 2x - 5)e^{-x} dx & (29) \int \sin^4 x \cos^2 x dx & (35) \int \sqrt{x^2 + 6x + 11} dx \\
(24) \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} & (30) \int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x} & (36) \int (x^2 - 3)^{\frac{3}{2}} dx
\end{array}$$

26. Израчунати vrednost određenih integrala

$$\begin{array}{ll}
(1) \int_0^1 (2x + 1)^{50} dx & (4) \int_0^8 |x^2 - 6x + 8| dx \\
(2) \int_0^3 \frac{t dt}{t^2 + 1} & (5) \int_0^3 x^2 e^{-x} dx \\
(3) \int_4^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}} & (6) \int_1^{e^{2\pi}} \sin \ln t dt
\end{array}$$

27. Израчунати površinu lika u ravni, ograničenog krivama

$$\begin{array}{l}
(1) y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \pi \\
(2) y^2 = 2x + 6, y = x - 1, x \geq 0 \\
(3) y^2 = x, x - 2y = 3 \\
(4) y = |x|, y = (x + 1)^2 - 7, x = -4
\end{array}$$

28. Израчунати vrednost nesvojstvenih integrala

$$\begin{array}{ll}
(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} & (4) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} \\
(2) \int_{-\infty}^0 x e^x dx & (5) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \\
(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} &
\end{array}$$