* временска оса и вредност новца на одређеном тржишту

\- посматрајмо на примеру простог каматног рачуна

(*) $A(t) = (1+r)^t \cdot P$, P почетни новац

$A(t)$ вредност новца у тренутку t

r дата каматна стопа, 1 обрачун годишње ← тако деф. тржиште (нпр.)

може се разматрати вредност неког новца у произвољном моменту t!

Ако имамо вредност новца у неком тренутку t, можемо наћи колику је вредност тај новац имао у неком тренутку t_1

$$A(t) = (1+r)^t \cdot P$$

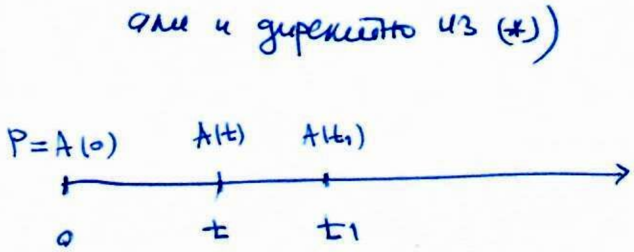
$$A(t_1) = (1+r)^{t_1} \cdot P = (1+r)^{t_1} \cdot A(t) \cdot (1+r)^{-t}$$

$$\boxed{A(t_1) = (1+r)^{t_1 - t} \cdot A(t)}$$

важи формула независно од тога да ли је $t > t_1$ или $t < t_1$

Рецимо, ако желимо почетну вредност неког новца, а имамо у тренутку t онда је $P = A(t) \cdot (1+r)^{-t} = A(0)$.

($A(0) = (1+r)^{0-t} \cdot A(t)$, на основу ове формуле изнад, али и директно из (*))



Наставак (други двочас)

① Аца је позајмио Пери 500€ на период од 4 године са каматом 5% и 700€ на период од 10 година са каматом 4,5%.

Договор је да Пера измири дуговања уплатом 600€ након 3 године, а остатак након 8 година са каматом 5,5%.

Одредити износ друге Перине уплате.

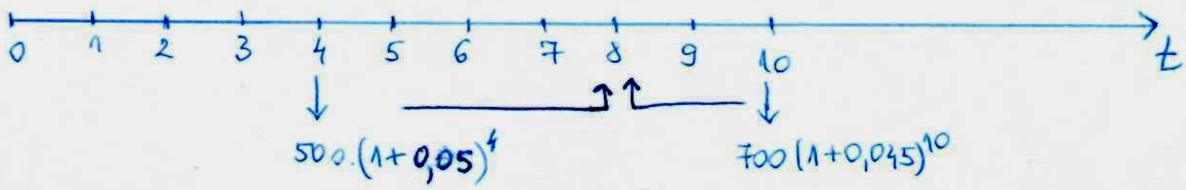
- у питању је прост каматни рачун - камата се обрачунава на крају сваке године

$$A(t)=P\cdot(1+r)^{t}$$

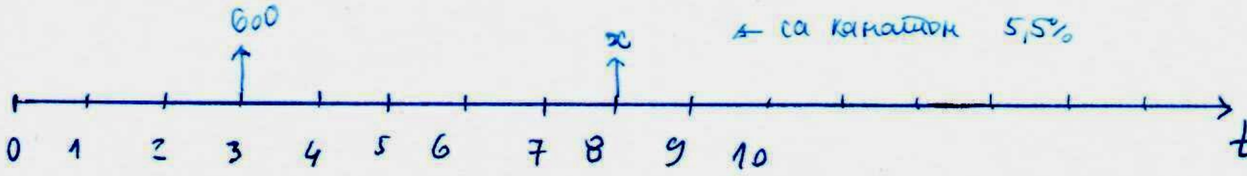
$$P=A(t)\cdot(1+r)^{-t}$$

x - вредност друге Перине уплате

Посматрајмо временску осу:



да се договор није мењао Пера би вратио овај новац у датим тренуцима!
($500(1,05)^4$ након 4 године и $700\cdot(1,045)^{10}$ након 10 година)



- посматрамо вредност новца у одређеном тренутку!

Узмимо у тренутку $t=8$: (када је дуг отплаћен нпр.)

$$x+600\cdot(1+0{,}055)^{5}=500\cdot(1+0{,}05)^{4}\cdot(1+0{,}055)^{4}+700\cdot(1+0{,}045)^{10}\cdot(1+0{,}055)^{-2}$$

↑колико вреди у тр. $t=8$ прва уплата користећи дату камату 5,5%

$$x = 500 \cdot 1{,}05^4 \cdot 1{,}055^4 + 700 \cdot 1{,}045^{10} \cdot 1{,}055^{-2} - 600 \cdot 1{,}055^5$$

$$\boxed{x = 945{,}41 \text{ €}}$$

Могли смо гледати нпр. и тренутак $t=10$:

$$x \cdot (1+0{,}055)^2 + 600 \cdot (1+0{,}055)^7 = 500 \cdot (1+0{,}05)^4 \cdot (1+0{,}055)^6 + 700 \cdot (1+0{,}045)^{10}$$

дељењем целог израза са $(1+0{,}055)^2$, исто се добије (чак и исти израз).

Приметите да је $500 \cdot 1{,}05^4 + 700 \cdot (1{,}045)^{10} = 1694{,}83$ толико би Пера платио да договор није мењан

А променом договора је платио $600 + 945{,}41 = 1545{,}41$.

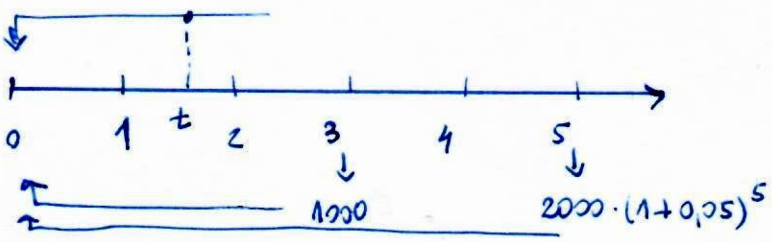
Дакле, договор је био у Перином интересу.

② Одредити временски период за који дуг од 1000€ на 3 године без камате и дуг од 2000€ на 5 година са каматом од 5%, могу бити измирени уплатом од 3000€ са каматом од 6%.

t тражени временски период

– прост каматни рачун је у питању → $A = P(1+r)^t$

$$P = A(t)(1+r)^{-t}$$



(не знамо где на временској оси да ставимо t!)

(зато је најбоље гледати вредност новца у тренутку 0, па изједначити)

Вредност новца гледано сада у односу на нову камату 6%!

$3000\cdot(1+0{,}06)^{-t}$ почетна вредност уплате којом су дугови измирени

$$3000\cdot(1{,}06)^{-t} = \underbrace{1000\cdot(1{,}06)^{-3}}_{\text{почетна вредност првог дуга у односу на камату 6\%}} + \underbrace{2000\cdot(1{,}05)^{5}\cdot(1{,}06)^{-5}}_{\text{почетна вредност другог дуга у односу на камату 6\%}}$$

$$(1{,}06)^{-t} = \frac{(1{,}06)^{-3}}{3} + \frac{2(1{,}05)^{5}\cdot(1{,}06)^{-5}}{3} \qquad /\ln$$

$$-t\ln 1{,}06 = \ln\frac{1{,}06^{-3} + 2\cdot 1{,}05^{5}\cdot 1{,}06^{-5}}{3}$$

$\Rightarrow$ $t \approx 1{,}51$ година

③ Пера је код Аце направио n позајмица, при чему је j-та позајмица након временског периода $t_j \geq 1$ и износи S_j, $1 \leq j \leq n$.

а) Одредити временски период након кога Пера уплатом у износу $S_1+S_2+\ldots+S_n$ са каматом r може измирити свој дуг код Аце.

б) Да ли Аци одговара ако Пера уплати износ $S_1+S_2+\ldots+S_n$ са каматом r након временског периода $\dfrac{1}{2\ln(1+r)} \cdot \ln \dfrac{4r}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}}$?

в) Да ли Аци одговара ако Пера уплати износ $S_1+S_2+\ldots+S_n$ са каматом r након временског периода $\dfrac{t_1S_1+t_2S_2+\ldots+t_nS_n}{S_1+S_2+\ldots+S_n}$ ако се зна да временски периоди t_j $(1 \leq j \leq n)$ нису сви једнаки?

(а) t тражени временски период

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} S_j \cdot (1+r)^{-t}}_{\text{почетна вредност уплате } \sum S_j \text{ након периода } t} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{S_j \cdot (1+r)^{-t_j}}_{\text{почетна вредност } j\text{-те позајмице } (1\leq j \leq n)}$$

(дакле опет посматрано вредност новца у тренутку 0)

$$S = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

$$S \cdot (1+r)^{-t} = \sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}$$

$$(1+r)^{t} = \frac{S}{\sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}} \quad /\ln$$

$$t \ln(1+r) = \ln \frac{S}{\sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{\ln(1+r)} \cdot \ln \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{\sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}}}$$

б) Да бисмо знали да ли му одговара само треба да упоредимо t и овај израз.

$$\frac{1}{\ln(1+r)} \ln \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{\sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}} \underset{?}{\lessgtr} \frac{1}{2\ln(1+r)} \cdot \ln \frac{4r}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\dots+\frac{1}{t_n}} \quad / \cdot \ln(1+r)$$

односно:

$$\ln \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{\sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}} \underset{?}{\lessgtr} \frac{1}{2} \ln \frac{4r}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\dots+\frac{1}{t_n}} \quad / e^{-}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{\sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}} \underset{?}{\lessgtr} \sqrt{\frac{4r}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\dots+\frac{1}{t_n}}} \qquad S = \sum_{j=1}^{n} S_j$$

$$L = \sum_{j=1}^{n} S_j \cdot \sqrt{\frac{1}{t_1}+\dots+\frac{1}{t_n}} \lessgtr \sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j} \cdot 2\sqrt{r} = D$$

$$(1+r)^{t_j} \underset{\uparrow}{\geq} 1 + r t_j \underset{\uparrow}{\geq} 2\sqrt{r}\sqrt{t_j}$$

Бернулијева неједнакост

АГ (или $(1-\sqrt{r}\cdot\sqrt{t_j})^2 \geq 0$)

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{r}}{(1+r)^{t_j}} \leq \frac{1}{\sqrt{t_j}} \quad \text{па је} \quad \sum_{j=1}^{n} S_j \frac{2\sqrt{r}}{(1+r)^{t_j}} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{S_j}{\sqrt{t_j}} = \sum_{j=1}^{n} S_j \sqrt{\frac{1}{t_j}}$$

$$D \leq \sum_{j=1}^{n} S_j \sqrt{\frac{1}{t_j}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{t_j}} \leq \sqrt{\frac{1}{t_1}+\dots+\frac{1}{t_n}} \quad \forall j=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} S_j \sqrt{\frac{1}{t_j}} \leq \sum_{j=1}^{n} S_j \sqrt{\frac{1}{t_1}+\dots+\frac{1}{t_n}} =$$

$$\Rightarrow D \leq L$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(1+r)} \ln \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{\sum_{j=1}^{n} S_j (1+r)^{-t_j}} \geq \frac{1}{2\ln(1+r)} \ln \frac{4r}{\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\dots+\frac{1}{t_n}}$$

Дакле, Аци одговара Перина уплата.