в) $S = \sum_{j=1}^{n} s_j$

Питано се да ли је:

$$\frac{t_1 s_1 + \dots + t_n s_n}{s_1+s_2+\dots+s_n} \underset{?}{\leq} \frac{1}{\ln(1+r)} \cdot \ln \frac{s_1+s_2+\dots+s_n}{\sum_{j=1}^{n} s_j (1+r)^{-t_j}} \qquad (*)$$

Ако је испуњена ова неједнакост, Анди одговара уплата.

Иначе му не одговара.

$$(*) \iff \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j s_j}{S} \leq \frac{1}{\ln(1+r)} \cdot \ln \frac{S}{\sum_{j=1}^{n} s_j (1+r)^{-t_j}}$$

$$\iff \ln(1+r) \cdot \sum_{j=1}^{n} t_j \frac{s_j}{S} \leq \ln \frac{S}{\sum_{j=1}^{n} s_j (1+r)^{-t_j}} \qquad / e^{-}$$

$$\iff (1+r)^{\sum_{j=1}^{n} t_j \frac{s_j}{S}} \leq \frac{S}{\sum_{j=1}^{n} s_j (1+r)^{-t_j}} = D$$

---

* Јенсенова неједнакост за конвексне ф-је

f конвексна, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0 \implies f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$

$=$ акко $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ или је f линеарна

$\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{S} (1+r)^{-t_j}$, $\lambda_j = \frac{s_j}{S}$ $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ (овај израз мотивише да се користи Јенсен)

$f(t_j) = (1+r)^{-t_j}$

$f(x) = (1+r)^{-x}$ да ли је конвексна?

(или конкавна, за конкавну важи Јенсен, али супротан знак)

$f'(x) = (1+r)^{-x} \cdot \ln(1+r) \cdot (-1)$

$f''(x) = (1+r)^{-x} \cdot \ln(1+r)\,(-1) \cdot \ln(1+r) \cdot (-1) = (1+r)^{-x} \ln^2(1+r) > 0$

$\implies f$ је конвексна (јер је $r > 0$)

$$\underset{\text{Јенсен}}{\implies} \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{S} \cdot (1+r)^{-t_j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(t_j) > f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j t_j\right)$$

(строга јер t_j нису сви једнаки)

$$\implies \frac{1}{D} > (1+r)^{-\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{S} t_j}$$

$$D < (1+r)^{\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{S} t_j}$$

Дакле, добили смо супротну неједнакост!

Анди не одговара уплата.

4) Након штедње од 3 године први клијент је на свом рачун у банци имао 67791€, а други клијент 33000€. У табели су приказани износи које су први и други клијент уплаћивали банци на <u>почетку</u> сваке од 3 године штедње. Познато је да банка користи прост каматни рачун са каматном стопом r. Одредити r.

	1. година	2. година	3. година
први	30000	20000	10000
други	10000	10000	10000

I $\quad 30000\cdot(1+r)^3+20000(1+r)^2+10000\cdot(1+r)=67791$

II $\quad 10000(1+r)^3+10000(1+r)^2+10000(1+r)=33000$

Треба решити систем; непозната је r.

$1+r=a$ (ради краћег записа уводимо ознаку)

$$30000\cdot a^3+20000a^2+10000a=67791 \quad /:10000$$
$$10000\cdot(a^3+a^2+a)=33000 \quad /:10000$$

$$3a^3+2a^2+a=6{,}7791$$
$$a^3+a^2+a=3{,}3 \quad \Big] \; -, \; \cdot 3$$

$$a^2+2a=3\cdot 3{,}3-6{,}7791$$
$$a^2+2a=9{,}9-6{,}7791$$
$$a^2+2a=3{,}1209$$
$$(a+1)^2=4{,}1209$$

$a+1=\sqrt{4{,}1209}$ ($a+1>0$, не треба нам решење са знаком −)

$$a=\sqrt{4{,}1209}-1\approx 1{,}03$$

$$r=a-1\approx 0{,}03$$

$$\boxed{r=3\%}$$

⑤ Клијент је своја дуговања према банци измирио у периоду од 20 година, уплатама x_j на крају сваке године, $1 \le j \le 20$, при чему сума било које 3 узастопне уплате није већа од прописане вредности K.
Банка је са M означила суму производа уплата на крају година j и $j+2$, $1 \le j \le 18$.
Доказати да $\frac{2}{3}\sqrt{M}$ не прелази прописану вредност K.

x_j уплата на крају j-те године

$$x_j + x_{j+1} + x_{j+2} \le K \quad , j \in \{1,2,\dots,18\}$$

$$M = \sum_{j=1}^{18} x_j \cdot x_{j+2} = x_1 \cdot x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_5 + \dots + x_{18} \cdot x_{20}$$

$$M = (x_1x_3 + x_2x_4) + (x_3x_5 + x_4x_6) + (x_5x_7 + x_6x_8) + \dots + (x_{17}x_{19} + x_{18}x_{20})$$

$$x_1x_3 + x_2x_4 \underset{\uparrow}{\le} (K - x_2 - x_3)x_3 + x_2 \cdot (K - x_2 - x_3) = \underbrace{(K - x_2 - x_3)}_{a}\underbrace{(x_2 + x_3)}_{b} \underset{\uparrow}{\le} \left(\frac{K}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{4}$$

$x_1 + x_2 + x_3 \le K$

$x_2 + x_3 + x_4 \le K$

$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Аналогно за остале сабирке! (има их 9 укупно)

јер укупно у изразу за M има 18 сабирака, па кад групишемо по 2 добијамо 9.

$$x_3x_5 + x_4x_6 \le \frac{K^2}{4}$$

$$\vdots$$

$$x_{17}x_{19} + x_{18}x_{20} \le \frac{K^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad M \le 9 \cdot \frac{K^2}{4} \quad \Rightarrow \boxed{K \geq \frac{2}{3}\sqrt{M}}$$

Може и овакав запис као метод што следи.

додатак:

$x_{2k-1}x_{2k+1} + x_{2k}x_{2k+2}$ општи облик једног сабирка, $k \in \{1,2,3,\dots,9\}$

$$x_{2k-1} \cdot x_{2k+1} + x_{2k}x_{2k+2} \underset{\uparrow}{\le} (K - x_{2k} - x_{2k+1}) \cdot x_{2k+1} + x_{2k} \cdot (K - x_{2k} - x_{2k+1})$$

$x_{2k-1} + x_{2k} + x_{2k+1} \le K$

$x_{2k} + x_{2k+1} + x_{2k+2} \le K$

$$\boxed{M = \sum_{k=1}^{9}(x_{2k-1}x_{2k+1} + x_{2k}x_{2k+2})}$$

$$= \underbrace{(K - x_{2k} - x_{2k+1})}_{a}\underbrace{(x_{2k} + x_{2k+1})}_{b} \underset{\uparrow}{\le} \left(\frac{K}{2}\right)^2 = \frac{K^2}{4}$$

$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

⑥ Два клијента су своја дуговања према банци измирили у периоду од n година, уплатама a_j од стране првог клијента и b_j од стране другог клијента на крају j-те године, за све $1 \le j \le n$.
Ако важи $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n$ и ако производ првих j уплата првог клијента није већи од производа првих j уплата другог клијента за све $1 \le j \le n$, доказати да укупан износ свих уплата првог клијента није већи од укупног износа свих уплата другог клијента.

---

1) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$

2) $a_1 a_2 \ldots a_j \le b_1 b_2 \ldots b_j, \ 1 \le j \le n$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ $\boxed{?}$

означимо: $\lambda_j = \frac{b_j}{a_j}$

из услова 2) добијамо $a_1 a_2 \ldots a_j \le \lambda_1 a_1 \lambda_2 a_2 \ldots \lambda_j b_j$

тј. $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_j \geq 1, \ 1 \le j \le n$

АГ неједнакост нам даје $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j}{j} \geq \sqrt[j]{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_j}$

тј. $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j}{j} \geq 1$

односно $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j \geq j, \ 1 \le j \le n$ $\left(\begin{array}{l} \lambda_1 \geq 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \geq 2 \\ \vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n \geq n \end{array}\right)$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$$

$$= \lambda_1 a_1 + \underline{(\lambda_1 + \lambda_2)} a_2 - \lambda_1 a_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot a_3 \underline{- \lambda_1 a_3 - \lambda_2 a_3} +$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot a_4 - a_4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \ldots + a_n(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$$
$$- a_n(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})$$

$$= \lambda_1(a_1 - a_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)(a_2 - a_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(a_3 - a_4) + \ldots + (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1}) \cdot$$
$$(a_{n-1} - a_n) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) a_n$$

$$\geq 1 \cdot (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \ldots + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + n a_n$$

$$= a_1 - a_2 + 2a_2 - 2a_3 + 3a_3 - 3a_4 + \ldots + (n-1) a_{n-1} - (n-1) a_n + n a_n$$
$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

7) Два клијента су своја дуговања према банци измирили годишњим уплатама у периоду од n година са каматом r. Након j-те године, укупан износ који је до тада први клијент уплатио банци је B_j, док је укупан износ другог клијента D_j, $1 \le j \le n$. Ако важи:

а) $B_j \geq D_j$, за свако $1 \le j \le n$

б) $B_n \geq D_n$ и $\sum_{j=1}^{k} B_j \geq \sum_{j=1}^{k} D_j$, $1 \le k \le n-1$

доказати да почетно задужење првог клијента није мање од почетног задужења другог клијента.

---

b_j и d_j суме које су клијенти уплатили банци j-те године

$$B_j = \sum_{i=1}^{j} b_i, \quad D_j = \sum_{i=1}^{j} d_i$$

- Почетно задужење првог клијента је $\sum_{j=1}^{n} b_j \cdot (1+r)^{-j}$
- почетно задужење другог клијента је $\sum_{j=1}^{n} d_j (1+r)^{-j}$

Нека је $f(x) = (1+r)^{-x}$.

$$f'(x) = (1+r)^{-x} \cdot (-1) \cdot \ln(1+r) < 0 \Rightarrow f \downarrow$$

а) $B_j \geq D_j$, $1 \le j \le n$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j f(j) \underset{?}{\geq} \sum_{j=1}^{n} d_j f(j) \quad \text{треба доказати}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j f(j) = b_1 f(1) + b_2 f(2) + b_3 f(3) + \dots + b_n f(n)$$

$$= B_1 f(1) + (B_2 - B_1) f(2) + (B_3 - B_2) f(3) + \dots + (B_n - B_{n-1}) f(n)$$

$$= B_1 (f(1) - f(2)) + B_2 (f(2) - f(3)) + B_3 (f(3) - f(4)) + \dots + B_{n-1}(f(n-1) - f(n)) + B_n f(n)$$

$$\geq D_1 (f(1) - f(2)) + D_2 (f(2) - f(3)) + D_3 (f(3) - f(4)) + \dots + D_{n-1}(f(n-1) - f(n)) + D_n f(n)$$

$$= d_1 f(1) + \dots + d_n f(n) = \sum_{j=1}^{n} d_j f(j)$$

$f(j) - f(j+1) \geq 0$ јер $f \downarrow$

б) $B_n \geq D_n$ $\qquad B_1 \geq D_1 \qquad B_1 = b_1$

$\sum_{j=1}^{k} B_j \geq \sum_{j=1}^{k} D_j \quad , 1 \leq k \leq n-1 \qquad B_1+B_2 \geq D_1+D_2 \qquad B_2 = b_1+b_2$

$\vdots \qquad B_3 = b_1+b_2+b_3$

$\vdots$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j f(j) \underset{?}{\geq} \sum_{j=1}^{n} d_j f(j) \quad \text{треба показати}$$

$$f(x) = (1+r)^{-x}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j f(j) = b_1 f(1) + b_2 f(2) + \ldots + b_n f(n)$$

$$= B_1 f(1) + (B_2 - B_1) f(2) + (B_3 - B_2) f(3) + \ldots + (B_n - B_{n-1}) f(n)$$

$$= B_1(f(1) - f(2)) + B_2(f(2) - f(3)) + B_3(f(3) - f(4)) + \ldots + B_{n-1}(f(n-1) - f(n)) + B_n f(n)$$

$$= B_1(f(1) - f(2)) + (B_1+B_2)(f(2) - f(3)) - B_1(f(2) - f(3)) + (B_1+B_2+B_3)\cdot(f(3) - f(4))$$

$$- (B_1+B_2)(f(3) - f(4)) + \ldots + (B_1+\ldots+B_{n-1})(f(n-1) - f(n)) - (B_1+B_2+\ldots+B_{n-2})$$

$$(f(n-1) - f(n)) + B_n f(n)$$

$$= B_1(f(1) - 2f(2) + f(3)) + (B_1+B_2)(f(2) - 2f(3) + f(4)) + (B_1+B_2+B_3)(f(3) - 2f(4) + f(5))$$

$$+ \ldots + (B_1+\ldots+B_{n-2})\cdot(f(n-2) - 2f(n-1) + f(n)) + (B_1+B_2+\ldots+B_{n-1})(f(n-1) - f(n))$$

$$+ B_n f(n)$$

$$\geq D_1(f(1) - 2f(2) + f(3)) + (D_1+D_2)(f(2) - 2f(3) + f(4)) + \ldots + D_n f(n)$$

$\uparrow$

важи ако је $f(k) - 2f(k+1) + f(k+2) \geq 0 \quad , 1 \leq k \leq n-2$

Провера:

$$(1+r)^{-k} - 2(1+r)^{-k-1} + (1+r)^{-k-2} \geq 0 \qquad / \cdot \underbrace{(1+r)^{k+2}}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow (1+r)^2 - 2(1+r) + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2r + r^2 - 2 - 2r + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 \geq 0 \quad \checkmark$$