# Принцип максимума модула

**ТЕОРЕМА 1:** Нека је $f$ холоморфна на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, при чему функција $|f|$ достиже максимум у тој области. Тада је $f$ константна функција.

**ПОСЛЕДИЦА:** Нека је функција $f$ холоморфна у ограниченој области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ и непрекидна на $\overline{\Omega}$. Тада важи:

$$\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f| .$$

(ПММ - принцип максимума модула - оба ова тврђења ћемо звати ПММ..)

(1) У зависности од вредности $r \in \mathbb{R}, r>0$, одредити

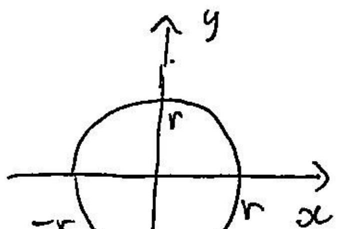
$$\max_{z\in\overline{D(0,r)}} |e^{z^2-iz}| .$$

функција $f(z)=e^{z^2-iz}$ је холоморфна на $\mathbb{C}$, па задовољава услове последице на $\overline{D(0,r)}$, тј. за њу важи ПММ, па је

$$\max_{z\in\overline{D(0,r)}} |e^{z^2-iz}| = \max_{z\in\partial D(0,r)} |e^{z^2-iz}| = \max_{|z|=r} |e^{z^2-iz}|$$

$$|e^{z^2-iz}| = e^{Re(z^2-iz)}, \quad z=x+iy \qquad z^2-iz = x^2+2ixy-y^2-ix+y$$
$$= x^2-y^2+y+ix(2y-1)$$

$\Rightarrow |e^{z^2-iz}| = e^{x^2-y^2+y}$ треба нам max ове ф-је за $x^2+y^2=r^2$




$$e^{x^2-y^2+y} = e^{x^2+y^2-2y^2+y} = e^{r^2-2y^2+y}$$

Пошто експоненцијална ф-ја расте, довољно је још наћи max ф-је $r^2-2y^2+y$ за $y\in[-r,r]$

$g(y)=r^2-y^2\cdot 2+y$ на $[-r,r]$

$g'(y)=-4y+1$

$g'(y)=0$ за $y=\frac{1}{4}$

$g'(y)>0$ за $-4y>-1$ $\quad y<\frac{1}{4}$

$g'(y)<0$ за $-4y<-1$ $\quad y>\frac{1}{4}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g'$ | $+$ | | $-$ |
| $g$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ |

Ако је $r<\frac{1}{4}$ онда је $\max\limits_{y\in[-r,r]} g(y)=g(r)=r^2-2r^2+r=r-r^2$

Ако је $r\geq\frac{1}{4}$ онда је $\max\limits_{y\in[-r,r]} g(y)=g(\frac{1}{4})=r^2-\frac{1}{4^2}\cdot 2+\frac{1}{4}=r^2-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=r^2+\frac{1}{8}$

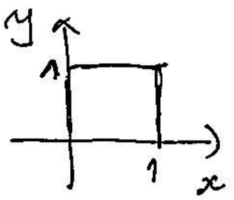
$$\Rightarrow \max_{z\in\overline{D(0,r)}}|e^{z^2-iz}|=\begin{cases} e^{r-r^2}, & 0<r<\frac{1}{4} \\ e^{r^2+\frac{1}{8}}, & r\geq\frac{1}{4}\end{cases}$$

(2) Нека је $K=\{z=x+iy\in\mathbb{C} : x,y\in[0,1]\}=[0,1]\times[0,1]$. Одредите:

$$\max_{z\in K}|z^2-2z|$$

Функција $f(z)=z^2-2z$ је холоморфна на $\mathbb{C}$, па и на околини од $K$, па је $f$ непрекидна на $\overline{K}=K$ и холоморфна на $\operatorname{int}K$.

$$\underset{\text{ПНН}}{\Rightarrow}\ \max_{z\in K}|z^2-2z|=\max_{z\in\partial K}|z^2-2z|$$



$z\in\partial K$: $z=x$, $x\in[0,1]$ 1)
или $z=1+iy$, $y\in[0,1]$ 2)
или $z=x+i$, $x\in[0,1]$ 3)
или $z=iy$, $y\in[0,1]$ 4)

квадрат има 4 странице

Нађимо max на свакој страници (или бар неко горње ограничење)

1) $f(z)=f(x)=x^2-2x$, $x\in[0,1]$, $|f(z)|=2x-x^2=g(x)$ јер $x<2$

$g'(x)=2-2x$

$g'(x)=0$ за $x=1$

$g'(x)>0$ за $x<1$

$g'(x)<0$ за $x>1$

$g$ расте на $[0,1]$

$\Rightarrow \max\limits_{x\in[0,1]} g(x)=g(1)=1$

$\Rightarrow |f(x)|\leq 1=|f(1)|$

2) $f(z)=f(1+iy)=(1+iy)^2-2(1+iy)=1+2iy-y^2-2-2iy$

$=-y^2-1$

$\Rightarrow |f(z)|=y^2+1 \quad , y\in[0,1]$

$g(y)=y^2+1$

$g'(y)=2y>0$ на $[0,1] \Rightarrow g\uparrow \Rightarrow \max\limits_{[0,1]} g(y)=g(1)=2$

$|f(z)|\leq 2=|f(1+i)|$

3) $f(z)=f(x+i)=(x+i)^2-2(x+i)$

$=x^2+2xi-1-2x-2i$

$=x^2-2x-1+i\cdot 2(x-1)$

$|f(z)|=\sqrt{(x^2-2x-1)^2+(2(x-1))^2}$

$=\sqrt{((x-1)^2-2)^2+4(x-1)^2}$

$=\sqrt{(x-1)^4-4(x-1)^2+4+4(x-1)^2}$

$=\sqrt{(x-1)^4+4}\leq\sqrt{5}$ , = се достиже за $x=0$, тј. $z=i$

4) $f(z)=f(iy)=(iy)^2-2iy$

$f(z)=f(iy)=-y^2-2iy \Rightarrow |f(z)|=\sqrt{y^4+4y^2}\leq\sqrt{5}$ , = се достиже за $y=1$, тј. $z=i$

јер $y^4\leq 1$

$y^2\leq 1$

$\Rightarrow \boxed{\max\limits_{z\in K}|f(z)|=\sqrt{5}}$

## (Т2) Принцип минимума

$f$ холоморфна у области $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ и важи $f\neq 0$ у $\Omega$.

Ако $|f|$ достиже минимум у $\Omega$, онда је $f$ константна

ПОСЛЕДИЦА: Ако је $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ограничена област и $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$ непрекидна, а холоморфна је и $\neq 0$ у $\Omega$, тада важи:

$$\min_{\overline{\Omega}}|f|=\min_{\partial\Omega}|f|$$

③ Доказати да не постоји холоморфна функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ таква да важи $|f(z)| = e^{|z|}, \forall z \in \mathbb{D}$.

ПпС да постоји таква функција, јасно је да та ф-ја не може бити конст. (јер за константне ф-је не важи тај услов)

$$|f(z)| = e^{|z|} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}, \text{ па је } f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$$e^{|z|} \geq e^{0} = 1 \text{ јер је } |z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$$\Longrightarrow \quad |f(z)| \geq 1 = |f(0)| \quad (|f(0)| = e^{|0|} \text{ из услова})$$

па $|f|$ достиже min у $\mathbb{D}$ у $0$

$f \neq 0$ у $\mathbb{D}$

$$\underset{\text{ПМ}}{\Longrightarrow} f = \text{const.} \quad \lightning$$

ПМ – Принцип минимума

④ Одредити $\max\limits_{z \in \overline{P}} |f(z)|$ где је $f(z) = z^2 - 2z + 3$ и $P = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

На основу ПМН је $\max\limits_{z \in \overline{P}} |f(z)| = \max\limits_{z \in \partial P} |f(z)|$. $\partial P = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$

За $|z| = 1$: $z = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$

$$|f(z)| = |e^{2it} - 2e^{it} + 3| = |(\cos 2t - 2\cos t + 3) + i(\sin 2t - 2\sin t)|$$

Једноставније је тражити max од $|f(z)|^2$ због краћег рачуна

$$|f(z)|^2 = (\cos 2t - 2\cos t + 3)^2 + (\sin 2t - 2\sin t)^2 = \cos^2 2t - 2\cos 2t(2\cos t - 3) + (2\cos t - 3)^2$$
$$+ \sin^2 2t - 4\sin 2t \sin t + 4\sin^2 t = 1 - 4(\cos 2t \cos t + \sin 2t \sin t) + 6\cos 2t + 4\cos^2 t - 12\cos t$$
$$+ 9 + 4\sin^2 t = 14 - 4\cdot\cos(2t - t) + 6\cos 2t - 12\cos t = 14 - 16\cos t + 6(2\cos^2 t - 1)$$
$$= 12\cos^2 t - 16\cos t + 8, \quad t \in [0, 2\pi]$$
$$= h(t)$$

$h(t) = 12\cos^2 t - 16\cos t + 8 = 4(3\cos^2 t - 4\cos t + 2)$

$g(u) = 3u^2 - 4u + 2 = 0$

$D = 16 - 4\cdot 3\cdot 2 < 0$ па нема реалних решења

$3 > 0 \implies 3u^2 - 4u + 2 > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$

теме параболе : $6u - 4 = 0$

$u = \frac{2}{3}$ (локални min)

$u = \cos t \in [-1, 1]$

$\max\limits_{t\in[0,2\pi]} h(t) = \max\limits_{u\in[-1,1]} |4\cdot g(u)| = 4\cdot \max\{g(-1), g(1)\}$ јер је $\frac{2}{3} \in [-1,1]$

$= 4\cdot \max\{3(-1)^2 - 4(-1) + 2,\ 3 - 4 + 2\}$

$= 4\cdot \max\{9, 1\} = 36$ и достиже се за $u = -1$ односно $t = \pi$ тј. $\boxed{z = -1}$

$\implies \max\limits_{|z|=1} |f(z)| = \sqrt{36} = 6$

$|z| = 2$: $\quad z = 2e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$

$|f(z)|^2 = |4e^{2it} - 2\cdot 2e^{it} + 3|^2$

$= |4\cos 2t + 4i\sin 2t - 4\cos t - 4i\sin t + 3|^2$

$= (4\cos 2t - 4\cos t + 3)^2 + (4\sin 2t - 4\sin t)^2$

$= 4^2\cos^2 2t - 2\cdot 4\cos 2t(4\cos t - 3) + (4\cos t - 3)^2 + (4\sin 2t)^2 - 2\cdot 4\sin 2t\cdot 4\sin t + 16\sin^2 t$

$= 16 - 32\cos 2t\cos t + 24\cos 2t + 16\cos^2 t - 24\cos t + 9 - 32\sin 2t\sin t + 16\sin^2 t$

$= 32 - 32(\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t) + 24(2\cos^2 t - 1) - 24\cos t + 9$

$= 41 - 32\cos t + 48\cos^2 t - 24 - 24\cos t$

$= 17 - 56\cos t + 48\cos^2 t = h(t)$ $\quad g(u) = 48u^2 - 56u + 17$

$D = 56^2 - 4\cdot 48\cdot 17 = 4^2\cdot 14^2 - 4^2\cdot 12\cdot 17$

$= 4^2\cdot(14^2 - 12\cdot 17) < 0$

$\Downarrow$

$g(u) > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$

$12\cdot 17 = 34$
$+17$
$204 > 196$

ТЕМЕ ПАРАБОЛЕ $g$: $2\cdot 48u = 56$

$u = \frac{56}{2\cdot 48} \in [-1, 1]$

$\Downarrow$

$\max h(t) = \max\{g(-1), g(1)\}$

$\max h(t) = \max\{48+56+17,\ 48-56+17\} = 121$

$\Rightarrow \max\limits_{|z|=2} |f(z)| = \sqrt{121} = 11$ и достиже се за $u=-1$ односно $t=\pi$ тј. $z = 2e^{i\pi} = -2$

! Коначно: $\max\limits_{z\in \overline{P}} |f(z)| = 11$ и достиже се за $z=-2$

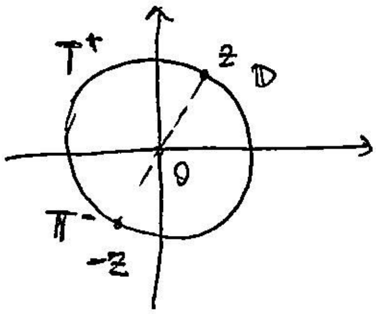
(5) Дата је фја $f$ холоморфна на $\mathbb{D}$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$ и важи

$|f(z)| \le a$ за све $z$ тд. $\operatorname{Im} z \ge 0$ и $z\in\partial\mathbb{D}$

и $|f(z)| \le b$ за све $z$ тд $\operatorname{Im} z \le 0$ и $z\in\partial\mathbb{D}$. , $a,b \ge 0$

Доказати: $|f(0)| \le \sqrt{ab}$

$\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$




$\mathbb{T}^+ = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z \ge 0,\ z\in\partial\mathbb{D}\}$

$\mathbb{T}^- = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z \le 0,\ z\in\partial\mathbb{D}\}$

кад $z\in\mathbb{T}^+$ онда $-z\in\mathbb{T}^-$ и обрнуто

$$\left.\begin{array}{l} |f(z)|\le a \\ |f(-z)|\le b \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z)|\cdot|f(-z)| \le ab$$

Посматрајмо зато функцију: $g(z)=f(z)\cdot f(-z)$

$\forall z\in\mathbb{T}$ је $|g(z)| = |f(z)|\cdot|f(-z)| \le ab$ јер је тачно један од $z$ и $-z$ је у $\mathbb{T}^+$, а други у $\mathbb{T}^-$

Из ПММ је $\max\limits_{z\in\mathbb{T}} |g(z)| = \max\limits_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |g(z)|$, па је

(јер је $g$ холоморфна на $\mathbb{D}$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$)

$|g(z)| \le \max\limits_{|z|=1} |g(z)| \le ab \quad \forall z\in\mathbb{D}$

$\Rightarrow |g(0)| \le ab \Rightarrow |f(0)|^2 \le ab \Rightarrow |f(0)| \le \sqrt{ab}$.