① Нека је $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$ и $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$
$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

а) Доказати да је $I_n - I_{n-1} = J_{n-1}$, $n \geq 1$.

б) Доказати да је $J_n = c$, за неко $c \in \mathbb{R}$

в) Наћи I_n.

а)
$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 (n-1)x}{\sin^2 x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx - \sin^2 (n-1)x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1-\cos 2nx}{2} - \frac{1-\cos 2(n-1)x}{2}}{\sin^2 x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{1}-\cos 2nx - \cancel{1}+\cos 2(n-1)x}{2\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin\frac{2(n-1)x+nx\cdot 2}{2}\sin\frac{2(n-1)x-2nx}{2}}{2\sin^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(2n-1)x \cdot \sin(-x)}{\sin^{\cancel{2}1} x} dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} dx = J_{n-1}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos x\cos y - \sin x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$\alpha = x+y$, $\beta = x-y$
$$= -2\sin x \sin y$$
$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

б)
$$J_n - J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{2x}{2}\cos\frac{4nx}{2}}{\sin x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cancel{\sin x}\cos 2nx}{\cancel{\sin x}} dx$$

$$= 2\cdot \frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n}\left(\sin(2n\tfrac{\pi}{2}) - \sin 0\right) = 0$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin x\cos y + \sin y \cos x - \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$\alpha = x+y$, $\beta = x-y$
$$= 2\sin y \cos x$$
$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\Rightarrow J_n = J_{n-1}$ индуктивно $J_n = J_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\boxed{J_n = \frac{\pi}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$$

в)
$$I_n = I_{n-1} + J_{n-1} = I_{n-1} + \frac{\pi}{2}, \quad I_0 = 0$$
$I_1 = \frac{\pi}{2}$, $I_2 = 2\frac{\pi}{2}$, …, $I_n = n\frac{\pi}{2}$ (индукцијом доказ)

$$\boxed{I_n = \frac{n\pi}{2}}$$

② Израчунати: $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$, n непаран, $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \begin{pmatrix} u = e^{-x^2} & du = e^{-x^2} \cdot (-2x) dx \\ dv = x^n dx & v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-x^2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) dx$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}}_{0} - 0 + \frac{2}{n+1} \int_0^{+\infty} x^{n+2} e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot I_{n+2} \qquad I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$$

$$n=1: \quad I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \begin{pmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{pmatrix} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} (-e^{-t}) \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} \Big(\underbrace{\lim_{t \to +\infty} e^{-t}}_{0} - e^0 \Big) = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \frac{1+1}{2} \cdot I_1 = I_1 = \frac{1}{2}$$

$$I_5 = \frac{3+1}{2} \cdot I_3 = 2 \cdot I_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$I_7 = \frac{5+1}{2} \cdot I_5 = 3 \cdot I_5 = 3$$

$$I_{2k+1} \underset{n=2k-1}{=} \frac{2k}{2} \cdot I_{2k-1} = k \cdot I_{2k-1}$$

$k=1$: $I_3 = 1 \cdot I_1$

$k=2$: $I_5 = 2 \cdot I_3 = 2 \cdot 1 \cdot I_1$

$k=3$: $I_7 = 3 \cdot I_5 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot I_1$

$$\boxed{I_{2k+1} = k! \; I_1 = \frac{k!}{2}}$$ (доказ индукцијом)

③ Дато је непрекидно пресликавање $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Одредити:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n f(x) e^{-nx} dx$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{1} n f(x) e^{-nx} dx$

* Прва т. о ср. вредности:
$g\in\mathcal{R}[a,b]$, g сталног знака
$f\in C[a,b] \Rightarrow \exists c\in(a,b)$
$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$

а)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} n f(x) e^{-nx}dx = \begin{pmatrix} t=nx \\ dt=ndx\end{pmatrix}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{c_n}{n}\right)\cdot\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t}dt$$

$e^{-t}\geq 0$ на $[0,\sqrt{n}]$
e^{-t} непр, па и Риман интегр.
} ПРИМЕЊУЈЕМО ТЕОРЕМУ О СР ВРЕДНОСТИ

$\exists\ c_n\in(0,\sqrt{n})$
$\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt = f\left(\frac{c_n}{n}\right)\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t}dt$

$$0<\frac{c_n}{n}<\frac{\sqrt{n}}{n}\leq 1$$

$0\to 0$, $\frac{c_n}{n}\xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\frac{\sqrt{n}}{n}\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{\sqrt{n}} = -e^{-\sqrt{n}}+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{f\left(\frac{c_n}{n}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} f(0)}\cdot\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t}dt}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} = f(0)$$

$f(0)$ јер је f непрекидна, а $\frac{c_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

б) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n f(x) e^{-nx}dx = \begin{pmatrix} t=nx \\ dt=ndx\end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt}_{\xrightarrow{n\to\infty} f(0)\ [\text{из дела а)}]} + \underbrace{\int_{\sqrt{n}}^{n} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt}_{\to\ ?}\Big)$$

$\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|=A$
$|f|$ непр па на $[0,1]$ (компакт) достиже max!

$$\left|\int_{\sqrt{n}}^{n} f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt\right| \leq \int_{\sqrt{n}}^{n}\left|f\left(\frac{t}{n}\right)\right|e^{-t}dt \leq \int_{\sqrt{n}}^{n} A e^{-t}dt = -Ae^{-t}\Big|_{\sqrt{n}}^{n}$$
$$= -A\left(e^{-n}-e^{-\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\sqrt{n}}^{n} f\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t}\,dt = 0 \quad \left(\text{јер је } \lim_{n\to\infty}(\underset{\downarrow\atop 0}{e^{-n}} - \underset{\downarrow\atop 0}{e^{-\sqrt{n}}}) = 0\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n f(x) e^{-nx}\,dx = f(0).$$

(4) Нека је $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ диференцијабилна ф-ја таква да је $|f(x)|\le e^{-\sqrt{x}}$ и $f'(x) = -3f(x) + 6f(2x)$ за $x>0$ и нека је $I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\,dx$. Изразити I_n преко I_0 за $n\in\mathbb{N}$.

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\,dx = \begin{pmatrix} u=f(x) & du=f'(x)dx \\ dv = x^n dx & v=\frac{x^{n+1}}{n+1}\end{pmatrix} \quad , \begin{matrix} n\in\mathbb{N} \\ n\ge 1\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} f(x)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} f'(x)\,dx$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} f(x) - 0 - \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} x^{n+1}\cdot\left(-3f(x) + 6f(2x)\right)dx$$

пошто је $|f(x)|\le e^{-\sqrt{x}}$, то је $\left|\frac{x^{n+1} f(x)}{n+1}\right| \le \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-\sqrt{x}}}_{\xrightarrow{x\to+\infty} 0}$

па је $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1} f(x)}{n+1} = 0$

$$I_n = \frac{-1}{n+1}\cdot\left(\int_0^{+\infty} (-3) x^{n+1} f(x)\,dx + 6\int_0^{+\infty} x^{n+1} f(2x)\,dx\right)$$

$$\uparrow\ t=2x, \quad dt = 2dx$$

$$I_n = \frac{-1}{n+1}\cdot\left(-3\int_0^{+\infty} x^{n+1} f(x)\,dx + 6\cdot\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot f(t)\,\frac{dt}{2}\right)$$

$$I_n = \frac{-1}{n+1}\left(-3\cdot I_{n+1} + 6\cdot\frac{1}{2^{n+2}}\cdot I_{n+1}\right) = I_{n+1}\cdot\frac{3}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{3}\cdot I_n\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \quad , I_1 = \frac{1}{3} I_0\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} I_0$$

$$I_2 = \frac{2}{3}\cdot I_1\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot I_0\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}$$

$$I_3 = \frac{3}{3}\cdot I_2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^3}} = \frac{3}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot I_0 \,\frac{1}{1-\frac{1}{2^1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}$$

$$\boxed{I_n = \frac{n!}{3^n}\cdot I_0 \,\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2^2})\cdots(1-\frac{1}{2^n})}}$$ (докаже се индукцијом)

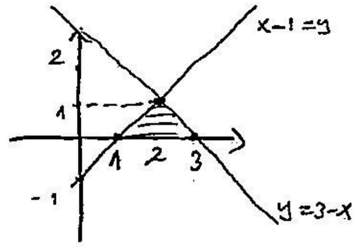
5) $f:[1,3]\to(-1,1)$ непрекидна функција таква да је

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 0$$

а) Ако је $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$, доказати да за свако $x\in[1,3]$ важи $F(x)\le \min\{x-1, 3-x\}$.

б) Доказати да је: $\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\,dx \le \ln\frac{4}{3}$.

а) $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt \le \int_1^x 1\,dt$ јер је $f(x)<1$ за све $x\in[1,3]$



$\underline{F(x)\le x-1}$

Да ли је $F(x)\le 3-x$?

$g(x)=F(x)+x-3$

$g'(x)=F'(x)+1=f(x)+1>0$ због кодомена од f

$(f(x)>-1)$

$\Rightarrow g\uparrow$ на $[1,3]$

$g(3)\ge g(x)\quad \forall x\in[1,3]$

$g(3)=F(3)=\int_1^3 f(t)\,dt=0$

Може даље користити:
$F(x)\le x-1$ за $x\in[1,2]$
$F(x)\le 3-x$ за $x\in[2,3]$

$g(x)=F(x)+x-3\le 0 \Rightarrow \underline{F(x)\le 3-x}$

б) $$\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\,dx = \left(\begin{matrix} u=\frac{1}{x} & du=\frac{-1}{x^2}dx \\ dv=f(x)dx & v=\int_1^x f(t)\,dt = F(x)\end{matrix}\right)$$ (једна од прим. ф-ја?)

треба ићи на F → парцијалном!

$$= F(x)\frac{1}{x}\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{-F(x)}{x^2}\,dx = \frac{\overset{=0}{F(3)}}{3} - \frac{\overset{=0}{F(1)}}{1} + \int_1^3\frac{F(x)}{x^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{F(x)}{x^2}\,dx + \int_2^3\frac{F(x)}{x^2}\,dx \underset{x^2>0 \text{ па важи}}{\le} \int_1^2\frac{x-1}{x^2}\,dx+\int_2^3\frac{3-x}{x^2}\,dx = \ldots = \ln\frac{4}{3}.$$