(1) $p \in \mathbb{R}$

Испитати апсолутну и условну конвергенцију сл. реда:

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \log^2(n\sqrt[n]{n}) \frac{\cos\left(\frac{n^2}{n+1}\pi\right)}{(n+1)^p \cdot \log^3 n}}_{a_n}$$

$$a_n = \left(\log(n^{\frac{1}{n}})\right)^2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{n^2-1+1}{n+1}\pi\right)}{(n+1)^p \log^3 n} = \left(\frac{1}{n}\log n\right)^2 \frac{\cos\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right)}{(n+1)^p \log^3 n}$$

$$= \frac{\cancel{\log^2 n}}{n^2} \cdot \frac{\cos(n-1)\pi \cdot \cos\frac{\pi}{n+1} - \overbrace{\sin(n-1)\pi}^{=0} \sin\frac{\pi}{n+1}}{(n+1)^p \log^3 n}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \cdot (n+1)^p \log n} \cdot \cos\frac{\pi}{n+1}$$

- за $p+2<0$ је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^p \log n} \neq 0$ (проверите)

  па ред дивергира
  (и апсолутно и условно)

- за $p+2 \geq 0$: $\cos\frac{\pi}{n+1}$ је монотон и ограничен (са 1)
  $\left(\frac{\pi}{n+1} \in (0, \frac{\pi}{2})\right)$

  $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(1+n)^p \log n}$ конв. на основу Лајбницовог кр.

  $\left(\frac{1}{n^2(1+n)^p \log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ и монотон за } n \geq n_0\right)$

  ↑ проверите
  $\left(f(x) = \frac{1}{x^2(1+x)^p \log x}\right.$
  па извод..)

  ⇓ Абелов крит.

  $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ конвергира

АК: за $p+2 \geq 0$

$$\cos\frac{\pi}{n+1} > 0 \Rightarrow |a_n| = \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{n^2(1+n)^p \log n} \sim \frac{1}{n^{p+2} \log n}, \; n \to \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}\log n} \text{ конв.} \iff p+2>1 \iff p>-1$$

(2) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\int_0^n x^k e^{-x^2} dx}{\sqrt{n}}$, $k \in \mathbb{N}$.

$$a_n = \int_0^n x^k e^{-x^2} dx$$

$$a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} x^k e^{-x^2} dx > 0$$

$\Rightarrow$ (a_n) растући низ

$\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$ конвергира на основу поредбеног крит.

($\frac{x^k}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2}$ за $x \geq x_0$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ конв.)

($\int_0^1 x^k e^{-x^2} dx$ је Риманов)

$a_n \leq \int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$ тј. (a_n) је ограничен

и $\exists \lim_{n \to \infty} a_n$ (и једнак је $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} dx$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ конвергира на основу Лајбницовог критеријума

($\frac{1}{\sqrt{n}}$ монотоно тежи 0)

(a_n) монотон и ограничен

$\Rightarrow$ (Абелов кр.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot a_n$ конвергира

③ У зависности од реалног параметра α испитати конвергенцију реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\cdot \sin\sqrt{(n^2+1)\pi}$$

$$\sin\sqrt{(n^2+1)\pi} = \sin\left(\sqrt{(n^2+1)\pi} - n\pi + n\pi\right)$$

$$= \sin\left(\sqrt{(n^2+1)\pi} - n\pi\right)\cos n\pi + \underset{0}{\underset{\parallel}{\sin n\pi}}\cos\left(\sqrt{(n^2+1)\pi} - n\pi\right)$$

$$= (-1)^n \sin\left(\sqrt{(n^2+1)\pi} - n\pi\right)$$

$$= (-1)^n\cdot \sin\left(\frac{(n^2+1)\pi^2 - n^2\pi^2}{\sqrt{(n^2+1)\pi} + n\pi}\right) = (-1)^n\cdot \sin\left(\frac{\pi^2}{\pi(\sqrt{n^2+1}+n)}\right)$$

$$= (-1)^n\cdot \sin\frac{\pi}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}, \quad \sin\frac{\pi}{n\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \sim \sin\frac{\pi}{2n}, \; n\to\infty$$

$$a_n = n^{\alpha}\cdot \sin\left(\sqrt{n^2+1}\,\pi\right) = n^{\alpha}\cdot(-1)^n\cdot \sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

За АК:

$$a_n = n^{\alpha}\cdot(-1)^n\cdot \sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

$$|a_n| \sim n^{\alpha}\cdot\frac{\pi}{2n}, \; n\to\infty$$

$$|a_n| \sim \frac{\pi}{2n^{1-\alpha}}, \; n\to\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ конв.} \iff 1-\alpha>1 \iff \underline{\alpha<0}$$

- за $\alpha<0$ ред АК, па конв. и обично
- за $\alpha=0$: $a_n = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}$

конв. тада (што је овај део)

$$\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}} \in \left(0, \frac{\pi}{1+\sqrt{2}}\right) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin$ је растућа ф-ја на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

за $n_1>n_2$ је $n_1+\sqrt{n_1^2+1} > n_2+\sqrt{n_2^2+1}$

$$\frac{\pi}{n_1+\sqrt{n_1^2+1}} < \frac{\pi}{n_2+\sqrt{n_2^2+1}}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{n_1+\sqrt{n_1^2+1}} < \sin\frac{\pi}{n_2+\sqrt{n_2^2+1}}$$

тј. $\left(\sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)$ је монотоно опадајућа и тежи 0?

$\Downarrow$ Лајбниц

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}} \text{ конвергира}$$

- за $\alpha>0$:

за $\alpha\geq 1$ општи члан не тежи 0, па ред дивергира

за $\alpha\in(0,1)$:

$$\sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}} = \ldots = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \; n\to\infty$$

$$\sin\frac{\pi}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + \frac{\alpha(n)}{n^3}, \quad \alpha(n) \to 0, \; n\to+\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n} n^{\alpha} \cdot (-1)^n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}}$$

конв. по Лајбницовом кр.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\pi/8 + \alpha(n)}{n^3}$$ конв. апсолутно, па и обично $\left(\left|\frac{-\frac{\pi}{8}+\alpha(n)}{n^3}\right| \le \frac{c}{n^3}\right)$

$c = 2$ нпр.

$\Rightarrow$ за $\alpha \in (0,1)$ ред конвергира

---

④ Испитати конвергенцију реда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}}_{a_n \geq 0}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \ldots = \frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$ не може Даламбер

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$ па не може ни преко Гауса

Рабеов критеријум: $$p = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}}\, n = +\infty$$

$\Rightarrow$ ред конвергира

(5) Испитати конвергенцију реда (у зависности од $p, \varepsilon \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \frac{1}{n^\varepsilon}}_{}$$

$a_n \geq 0$

$$a_{n+1} = \left(\frac{(2(n+1)-1)!!}{(2(n+1))!!}\right)^p \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p \cdot \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\cancel{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}\right)^p \frac{1}{n^\varepsilon}}{\frac{(\cancel{(2n-1)!!}\cdot(2n+1))^p}{(\cancel{(2n)!!}\,(2n+2))^p}\cdot\frac{1}{(n+1)^\varepsilon}} = \frac{(n+1)^\varepsilon}{n^\varepsilon}\cdot\frac{(2n+2)^p}{(2n+1)^p}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^\varepsilon \cdot \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p$$

$$= \left(1+\frac{\varepsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \ n\to\infty$$

$$= 1+\frac{\varepsilon}{n}+\frac{p}{2n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \ n\to\infty$$

$$= 1+\frac{\varepsilon}{n}+\frac{p}{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \ n\to\infty$$

$$= 1+\frac{2\varepsilon+p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \ n\to\infty$$

Гаус $\Rightarrow$ $\mu = \frac{2\varepsilon+p}{2}$, за $\mu > 1$ конв.
за $\mu \leq 1$ див.

$\frac{2\varepsilon+p}{2} > 1$ за $2\varepsilon+p > 2$ конв, иначе див.

- конв. за $\boxed{\frac{p}{2}+\varepsilon > 1}$
- див за $\boxed{\frac{p}{2}+\varepsilon \leq 1}$